

Utrecht, 10 juni 2013

Modellen en Simulatie Stelsels Dvg

Gerard Sleijpen



Universiteit Utrecht
Department of Mathematics

<http://www.staff.science.uu.nl/~sleij101/>

Continu versus discreet: Lineaire modellen

Continu model. $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t).$

Als 0 geen eigenwaarde van \mathbf{A} :

opl. $\mathbf{x}(t)$ in evenwicht $\Leftrightarrow \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ alle t

$\mathbf{0}$ stabiel evenwicht $\Leftrightarrow \operatorname{Re}(\lambda) < 0$ alle eigenw. λ van \mathbf{A} .

Discreet model. $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_n.$

Als 1 geen eigenwaarde van \mathbf{A} :

opl. \mathbf{x}_n in evenwicht $\Leftrightarrow \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$ alle n

$\mathbf{0}$ stabiel evenwicht $\Leftrightarrow |\lambda| < 1$ alle eigenw. λ van \mathbf{A} .

Program

- Niet-lineaire continue modellen
- Evenwicht
- Stabiliteit
- Lineairiseren rond het evenwicht
- Voorbeelden: concurrentie
- Voorbeelden: roof-prooi dier
- Chaos
- Hamilton systemen
- Voorbeelden van Hamilton systemen
- Tot slot

Program

- Niet-lineaire continue modellen
- Evenwicht
- Stabiliteit
- Lineairiseren rond het evenwicht
- Voorbeelden: concurrentie
- Voorbeelden: roof-prooi dier
- Chaos
- Hamilton systemen
- Voorbeelden van Hamilton systemen
- Tot slot

Roof-prooidier model

In een zeker gebied komt, op tijdstip t , een diersoort X voor met dichtheid $x(t)$ en een ander diersoort Y met dichtheid $y(t)$. Prooidier X heeft Y niet nodig om te overleven. Roofdier Y heeft X wel nodig.

Aanname [Lotka & Volterra]:

- Continu model.
- Groeicoëfficiënt van X hangt lineair af van de dichtheid van zowel soort X als soort Y : bij grotere dichtheden wordt de groei geremd.
- Groeicoëfficiënt van Y hangt lineair af van de dichtheid van soort X : bij grotere dichtheden wordt de groei gestimuleerd.

Model:

$$\begin{cases} x' = (k_X - b_X x - c_X y) x \\ y' = -k_Y y + c_Y x y. \end{cases}$$

Haai-prooivis model

$$\begin{cases} x' = (a - by)x \\ y' = -cy + dxy. \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Lotka \&} \\ \text{Volterra} \end{array}$$

Program

- Niet-lineaire continue modellen
- Evenwicht
- Stabiliteit
- Lineairiseren rond het evenwicht
- Voorbeelden: concurrentie
- Voorbeelden: roof-prooi dier
- Chaos
- Hamilton systemen
- Voorbeelden van Hamilton systemen
- Tot slot

Niet-lineaire differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \quad \text{met bv.} \quad \begin{cases} f(x, y) = (a - b y) x \\ g(x, y) = -c y + d x y. \end{cases}$$

voor $t \geq t_0$, met beginwaarden $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$.

We nemen aan dat de differentiaalvergelijkingen en de beginwaarden **reëel** zijn, d.w.z.,

$$f(x, y), g(x, y) \in \mathbb{R}$$

voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ (waar f en g voor gedefinieerd zijn), en $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.

Opmerking. Ook al zijn de problemen reëel, in de analyse en in de oplosmethoden kunnen complexe, niet reële, grootheden een rol spelen: eigenwaarden en eigenvectoren van reële matrices **A** kunnen complex, niet-reëel, zijn.

Niet-lineaire differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \quad \text{met bv.} \quad \begin{cases} f(x, y) = (a - by)x \\ g(x, y) = -cy + dxy. \end{cases}$$

Evenwicht

Oplossing $(x(t), y(t))$ is in **evenwicht** (of **stationair**) als

$$x(t) = x(t_0) = \alpha \quad \& \quad y(t) = y(t_0) = \beta \quad \text{alle } t.$$

Bewering. *Evenwicht*

$$\Leftrightarrow x'(t) = 0 \quad \& \quad y'(t) = 0 \quad \text{alle } t$$

$$\Leftrightarrow f(x(t), y(t)) = 0 \quad \& \quad g(x(t), y(t)) = 0 \quad \text{alle } t$$

$$\Leftrightarrow f(\alpha, \beta) = 0, \quad g(\alpha, \beta) = 0 \quad \& \quad x(t) = \alpha, \quad y(t) = \beta \quad \text{alle } t$$

Haai-prooivis model

$$\begin{cases} x' = (a - by)x \\ y' = -cy + dxy. \end{cases} \quad \text{Lotka \& Volterra}$$

Evenwichten. 1. $(0, 0)$ 2. $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$

Effecten van jaarlijks constante deel vangen?

Haai-prooivis model

$$\begin{cases} x' = (a - by)x \\ y' = -cy + dxy. \end{cases} \quad \text{Lotka \& Volterra}$$

Evenwichten. 1. $(0, 0)$ 2. $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$

Effecten van jaarlijks constante deel vangen?

$$a \rightarrow a - \varepsilon, \quad c \rightarrow c + \varepsilon.$$

Evenwichten. $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) \rightarrow \left(\frac{c + \varepsilon}{d}, \frac{a - \varepsilon}{b}\right).$

Interpretatie:

aantal prooivissen neemt toe,
aantal haaien neemt af.

Program

- Niet-lineaire continue modellen
- Evenwicht
- Stabiliteit
- Lineairiseren rond het evenwicht
- Voorbeelden: concurrentie
- Voorbeelden: roof-prooi dier
- Chaos
- Hamilton systemen
- Voorbeelden van Hamilton systemen
- Tot slot

Stabiliteit

Evenwicht (α, β) is **stabiel** als $\varepsilon(t) \approx 0$ & $\delta(t) \approx 0$ alle t

en $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ & $\delta(t) \rightarrow 0$ voor $t \rightarrow \infty$

voor iedere opl. $\begin{cases} x(t) = \alpha + \varepsilon(t) \\ y(t) = \beta + \delta(t) \end{cases}$ met $\begin{cases} \varepsilon(t_0) \approx 0 \\ \delta(t_0) \approx 0. \end{cases}$

Stabiliteit

Evenwicht (α, β) is **stabiel** als $\varepsilon(t) \approx 0$ & $\delta(t) \approx 0$ alle t

en $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ & $\delta(t) \rightarrow 0$ voor $t \rightarrow \infty$

voor iedere opl. $\begin{cases} x(t) = \alpha + \varepsilon(t) \\ y(t) = \beta + \delta(t) \end{cases}$ met $\begin{cases} \varepsilon(t_0) \approx 0 \\ \delta(t_0) \approx 0. \end{cases}$

Voorbeeld. Lineaire differentiaalvergelijking:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

$\det(\mathbf{A}) \neq 0 \Rightarrow$ alleen evenwicht in $\alpha = 0$ & $\beta = 0$.

Stabiliteit

Evenwicht (α, β) is **stabiel** als $\varepsilon(t) \approx 0$ & $\delta(t) \approx 0$ alle t

en $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ & $\delta(t) \rightarrow 0$ voor $t \rightarrow \infty$

voor iedere opl. $\begin{cases} x(t) = \alpha + \varepsilon(t) \\ y(t) = \beta + \delta(t) \end{cases}$ met $\begin{cases} \varepsilon(t_0) \approx 0 \\ \delta(t_0) \approx 0. \end{cases}$

Voorbeeld. Lineaire differentiaalvergelijking:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

$\det(\mathbf{A}) \neq 0 \Rightarrow$ alleen evenwicht in $\alpha = 0$ & $\beta = 0$.

Stelling. $(0, 0)$ is een stabiel evenwicht

$\Leftrightarrow \operatorname{Re}(\lambda) < 0$ alle eigenwaarden λ van \mathbf{A} .

Program

- Niet-lineaire continue modellen
- Evenwicht
- Stabiliteit
- Lineariseren rond het evenwicht
- Voorbeelden: concurrentie
- Voorbeelden: roof-prooi dier
- Chaos
- Hamilton systemen
- Voorbeelden van Hamilton systemen
- Tot slot

Lineairiseren rond evenwicht

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \quad \text{of} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{bmatrix}$$

Beschouw een evenwicht $\vec{\alpha} \equiv (\alpha, \beta)$.

Lineairiseren rond evenwicht

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \quad \text{of} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{bmatrix}$$

Beschouw een evenwicht $\vec{\alpha} \equiv (\alpha, \beta)$.

Als $\begin{cases} x(t) = \alpha + \varepsilon(t) \\ y(t) = \beta + \delta(t) \end{cases}$ oplossing met $\begin{cases} |\varepsilon(t)| \approx 0 \\ |\delta(t)| \approx 0 \end{cases}$

dan $\begin{bmatrix} \varepsilon'(t) \\ \delta'(t) \end{bmatrix} \approx \mathbf{D} \begin{bmatrix} \varepsilon(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix}$, waarbij $\mathbf{D} \equiv D\mathbf{f}(\vec{\alpha})$.

$\mathbf{D} \equiv D\mathbf{f}(\vec{\alpha}) \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, \beta) & \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha, \beta) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(\alpha, \beta) & \frac{\partial g}{\partial y}(\alpha, \beta) \end{bmatrix}$ de **Jacobi matrix** van \mathbf{f} .

Lineairiseren rond evenwicht

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \quad \text{of} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{bmatrix}$$

Beschouw een evenwicht $\vec{\alpha} \equiv (\alpha, \beta)$.

Als $\begin{bmatrix} \varepsilon'(t) \\ \delta'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{D} \begin{bmatrix} \varepsilon(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix}$, waarbij $\mathbf{D} \equiv \mathbf{Df}(\vec{\alpha})$,

dan $\begin{cases} x(t) \approx \alpha + \varepsilon(t) \\ y(t) \approx \beta + \delta(t) \end{cases}$ oplossing, mits $\begin{cases} |\varepsilon(t)| \approx 0 \\ |\delta(t)| \approx 0. \end{cases}$

Lineariseren en stabiliteit

Stelling. $\vec{\alpha}$ evenwicht. λ eigenwaarde van $D\mathbf{f}(\vec{\alpha})$.

Evenwicht stabiel $\Leftrightarrow \operatorname{Re}(\lambda) < 0$ **alle** λ .

Evenwicht instabiel $\Leftrightarrow \operatorname{Re}(\lambda) > 0$ **zekere** λ .

Lineariseren en stabiliteit

Stelling. $\vec{\alpha}$ evenwicht. λ eigenwaarde van $D\mathbf{f}(\vec{\alpha})$.

Evenwicht stabiel $\Leftrightarrow \operatorname{Re}(\lambda) < 0$ **alle** λ .

Evenwicht instabiel $\Leftrightarrow \operatorname{Re}(\lambda) > 0$ **zekere** λ .

Geen conclusie als

$\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$ *alle* λ & $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$ *zekere* λ !!

Lineariseren en stabiliteit

Stelling. $\vec{\alpha}$ evenwicht. λ eigenwaarde van $D\mathbf{f}(\vec{\alpha})$.

Evenwicht stabiel $\Leftrightarrow \operatorname{Re}(\lambda) < 0$ **alle** λ .

Evenwicht instabiel $\Leftrightarrow \operatorname{Re}(\lambda) > 0$ **zekere** λ .

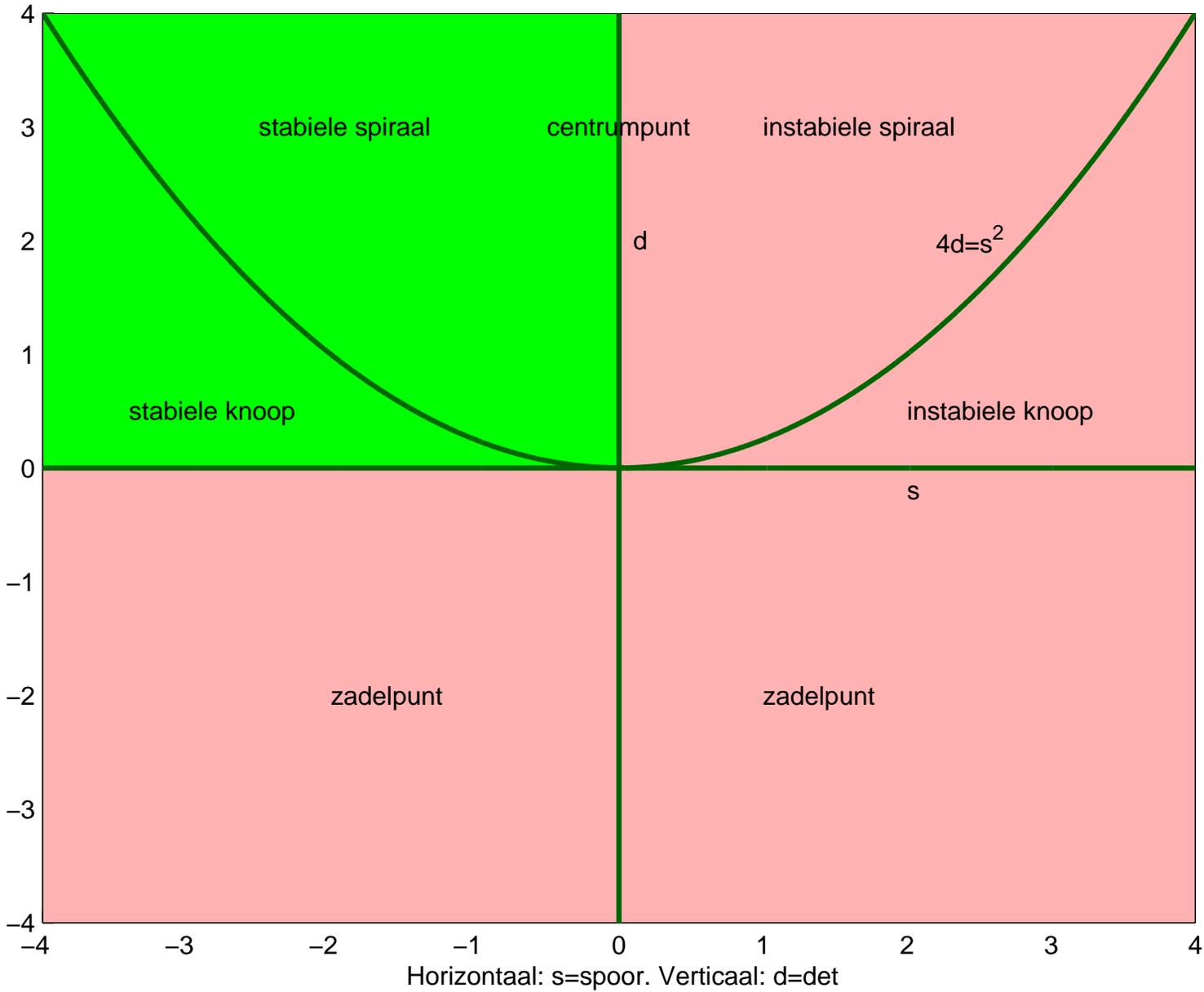
Geen conclusie als

$\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$ *alle* λ & $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$ *zekere* λ !!

Opmerkingen.

- Classificatie voor 2-dimensionale lineaire differentiaalvergelijkingen geldt ook voor niet lineaire (m.u.v., $s = d = 0$, $4d = s^2$).
- Stelling is ook goed in meer dan 2 dimensies.
- De gegeven classificatie geldt echter alleen voor twee dimensies (en reële problemen).

Overzicht classificatie evenwichten in 2-d



Guerilla oorlogsvoering

$x(t)$, $y(t)$ is (\approx) het aantal operationele soldaten van een regulier leger X , respectievelijk guerilla leger Y .

De legers X en Y bevechten elkaar.

Aanname:

De verliezen van X zijn evenredig met de schietkracht van Y , de verliezen van Y zijn evenredig met de schietkracht van X maar ook met het aantal guerilla soldaten van Y .

Model:
$$\begin{cases} x'(t) = a s_Y y(t) \\ y'(t) = b s_X x(t) y(t), \end{cases}$$

waarbij $a, b < 0$, $s_X, s_Y > 0$ bekend, evenals $x(t_0)$ en $y(t_0)$.

Guerilla oorlogsvoering

$x(t)$, $y(t)$ is (\approx) het aantal operationele soldaten van een regulier leger X , respectievelijk guerilla leger Y .

De legers X en Y bevechten elkaar.

Aanname:

De verliezen van X zijn evenredig met de schietkracht van Y , de verliezen van Y zijn evenredig met de schietkracht van X maar ook met het aantal guerilla soldaten van Y .

Model:
$$\begin{cases} x'(t) = a s_Y y(t) \\ y'(t) = b s_X x(t) y(t), \end{cases}$$

waarbij $a, b < 0$, $s_X, s_Y > 0$ bekend, evenals $x(t_0)$ en $y(t_0)$.

Werkt lineairisatie hier?

Autonome differentiaalvergelijkingen

Een differentiaal vergelijking is **autonoom** als het rechterlid niet expliciet afhangt van t .

Voorbeelden

1) autonoom

$$\begin{cases} x' = (3 - y) x \\ y' = (2x - 1) y \end{cases}$$

2) niet autonoom

$$\begin{cases} x' = (3 \sin^2(t) - y) x \\ y' = (2x - 1) y \end{cases}$$

Autonome differentiaalvergelijkingen

Een differentiaal vergelijking is **autonoom** als het rechterlid niet expliciet afhangt van t .

Voorbeelden

1) autonoom

$$\begin{cases} x' = (3 - y) x \\ y' = (2x - 1) y \end{cases}$$

2) niet autonoom

$$\begin{cases} x' = (3 \sin^2(t) - y) x \\ y' = (2x - 1) y \end{cases}$$

Autonoom: Stel $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \end{bmatrix}$ lost 1) op.

Dan is, voor iedere t_0 ,

$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}(t - t_0) \\ \tilde{y}(t - t_0) \end{bmatrix}$ ook een oplossing van 1).

Autonome differentiaalvergelijkingen

Een differentiaal vergelijking is **autonoom** als het rechterlid niet expliciet afhangt van t .

Voorbeelden

1) autonoom

$$\begin{cases} x' = (3 - y) x \\ y' = (2x - 1) y \end{cases}$$

2) niet autonoom

$$\begin{cases} x' = (3 \sin^2(t) - y) x \\ y' = (2x - 1) y \end{cases}$$

Niet autonoom: Stel $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \end{bmatrix}$ lost 2) op.

Dan is

$$\begin{aligned} \tilde{x}'(t - t_0) &= (3 \sin^2(t - t_0) - \tilde{y}(t - t_0)) \tilde{x}(t - t_0) \\ &= (3 \sin^2(t - t_0) - y(t)) x(t). \end{aligned}$$

Echter $\sin(t - t_0) \neq \sin(t)$, tenzij $t_0 = 2\pi k$ zekere $k \in \mathbb{Z}$.

Autonome differentiaalvergelijkingen

Een differentiaal vergelijking is **autonoom** als het rechterlid niet expliciet afhangt van t .

Voorbeelden

1) autonoom

$$\begin{cases} x' = (3 - y) x \\ y' = (2x - 1) y \end{cases}$$

2) niet autonoom

$$\begin{cases} x' = (3 \sin^2(t) - y) x \\ y' = (2x - 1) y \end{cases}$$

Gegeven stabiliteits analyse **alleen** voor autonome dvg.!

Program

- Niet-lineaire continue modellen
- Evenwicht
- Stabiliteit
- Lineairiseren rond het evenwicht
- Voorbeelden: concurrentie
- Voorbeelden: roof-prooi dier
- Chaos
- Hamilton systemen
- Voorbeelden van Hamilton systemen
- Tot slot

Concurrerende soorten

In een zeker gebied komt een plant X voor met dichtheid $x(t)$ op tijdstip t en een plant Y met dichtheid $y(t)$.

Aanname:

- Continu model.
- Groeicoëfficiënten hangen, voor beide soorten, lineair af van de dichtheid van zowel soort X als soort Y : grotere dichtheden remmen de groei.

Model:

$$\begin{cases} x' = (k_X - b_X x - c_X y) x \\ y' = (k_Y - b_Y x - c_Y y) y. \end{cases}$$

Voorbeeld.
$$\begin{cases} x' = (3 - x - y) x \\ y' = (4 - 2x - y) y. \end{cases}$$

Voer de schetsen alleen uit in het biologische relevante deel van het fase vlak.

Wiskundige opdrachten

- (a) Bepaal de evenwichtspunten.
- (b) Geef een indicatie voor het richtingsveld.
- (c) Classificeer de evenwichtspunten uit het richtingsveld en de classificatie theorie of door lineairisatie rond evenwicht.
- (d) Schets het fase portret.
Schets de separatrices.
Geef een nauwkeurige schets in de buurt van zadelpunten.

Biologische vragen

- (i) Waarom is het model verantwoord?
- (ii) Welke conclusies trek je uit de wiskundige analyse?

Evenwichtspunten.

$$(3 - x - y)x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \text{of} \quad x + y = 3$$

$$(4 - 2x - y)y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \quad \text{of} \quad 2x + y = 4.$$

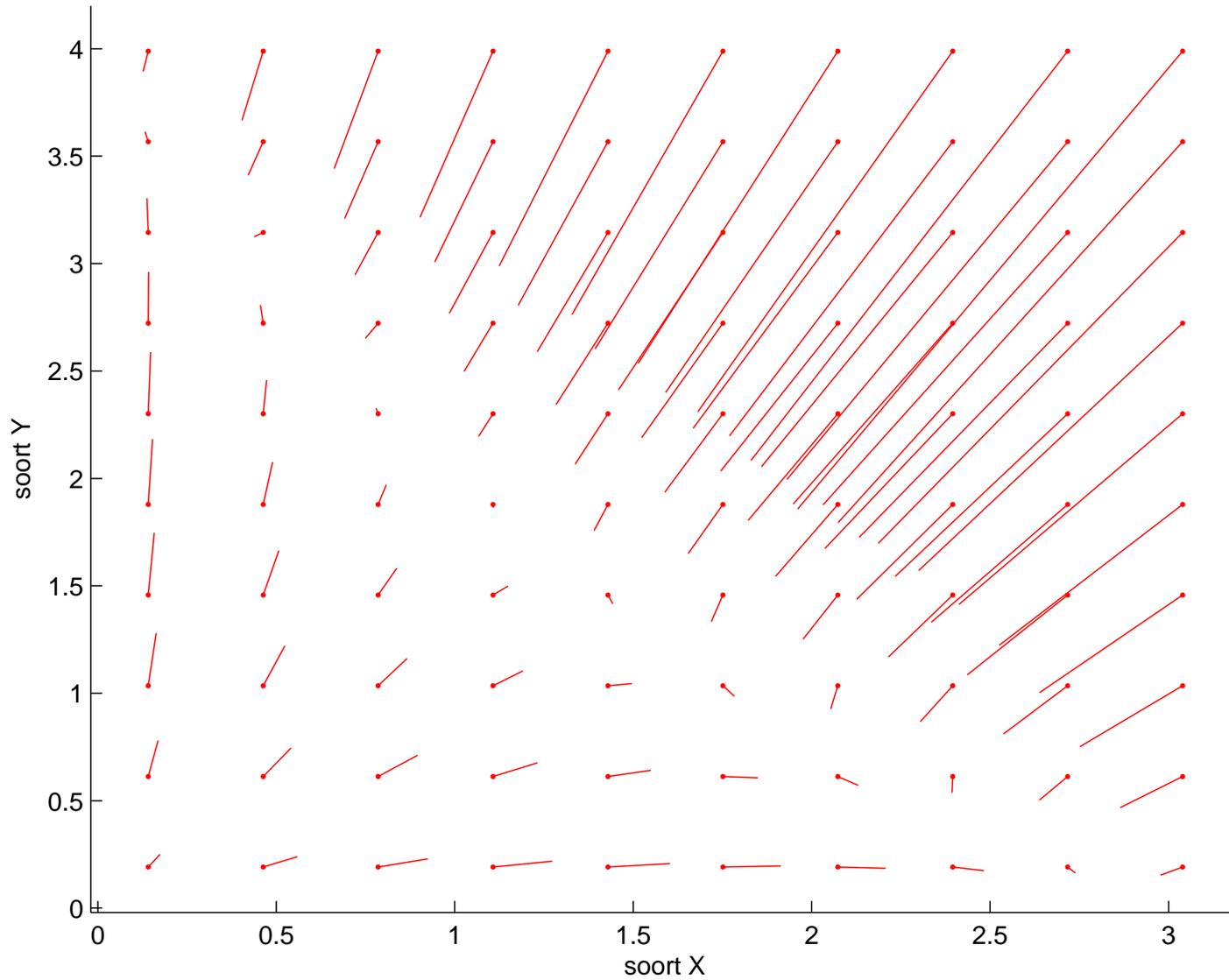
Dus evenwichtspunten in

1. $(0, 0)$
2. $(0, 4)$,
3. $(3, 0)$,
4. $(1, 2)$

Classificatie.

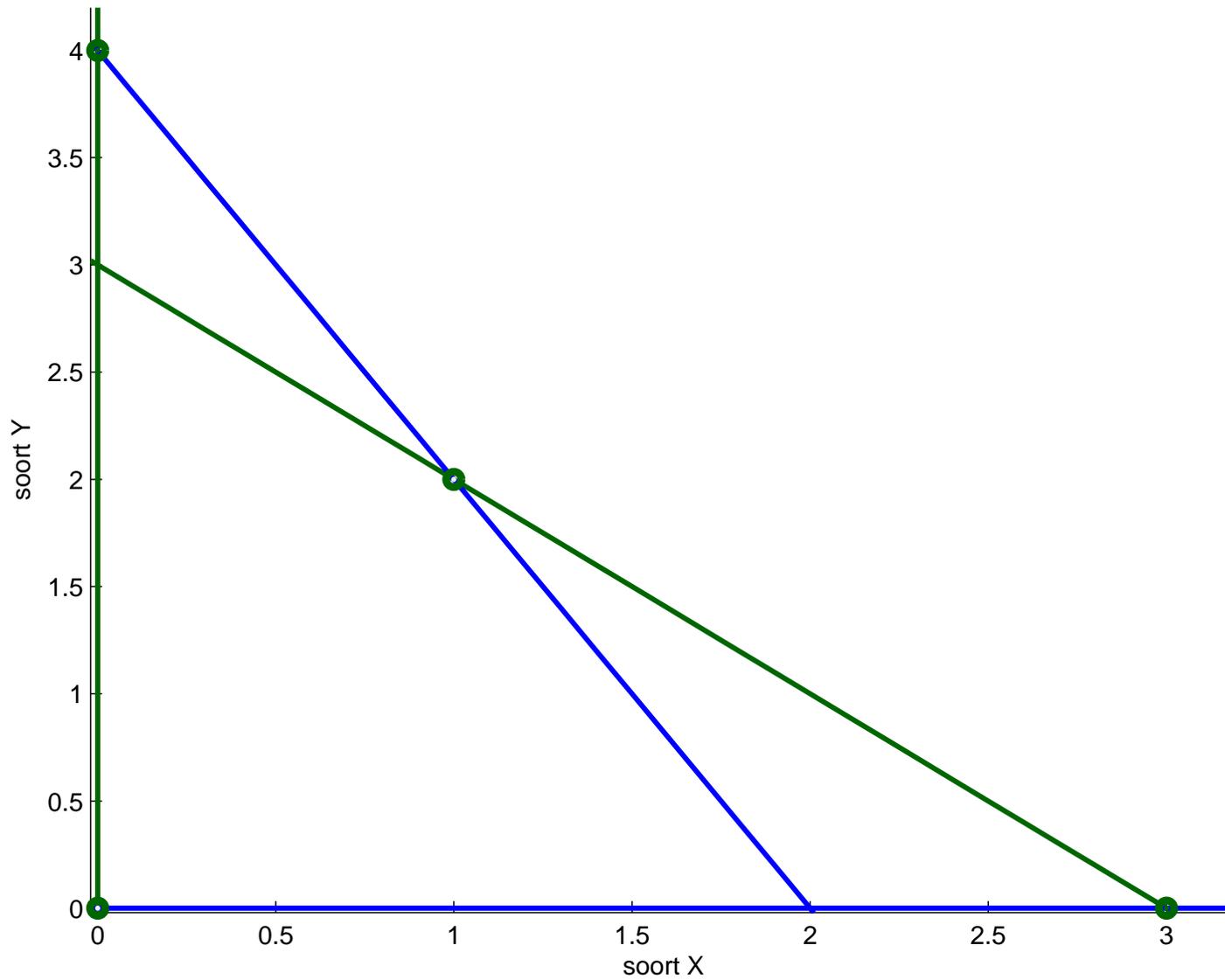
$$\begin{cases} x' = (3 - x - y) x \\ y' = (4 - 2x - y) y. \end{cases}$$

Concurrentie: $f=(3-x-y)x$, $g=(4-2x-y)y$



$$\begin{cases} x' = (3 - x - y) x \\ y' = (4 - 2x - y) y. \end{cases}$$

Concurrentie: $f=(3-x-y)x$, $g=(4-2x-y)y$



Evenwichtspunten.

$$(3 - x - y)x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \text{of} \quad x + y = 3$$

$$(4 - 2x - y)y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \quad \text{of} \quad 2x + y = 4.$$

Dus evenwichtspunten in

1. $(0, 0)$
2. $(0, 4)$,
3. $(3, 0)$,
4. $(1, 2)$

Classificatie.

Inspectie van het richtingsveld leert:

1. instabiel knoop,
2. stabiele knoop,
3. stabiele knoop,
4. zadelpunt.

Evenwichtspunten.

$$(3 - x - y)x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \text{of} \quad x + y = 3$$

$$(4 - 2x - y)y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \quad \text{of} \quad 2x + y = 4.$$

Dus evenwichtspunten in

1. (0,0) 2. (0,4), 3. (3,0), 4. (1,2)

Classificatie.

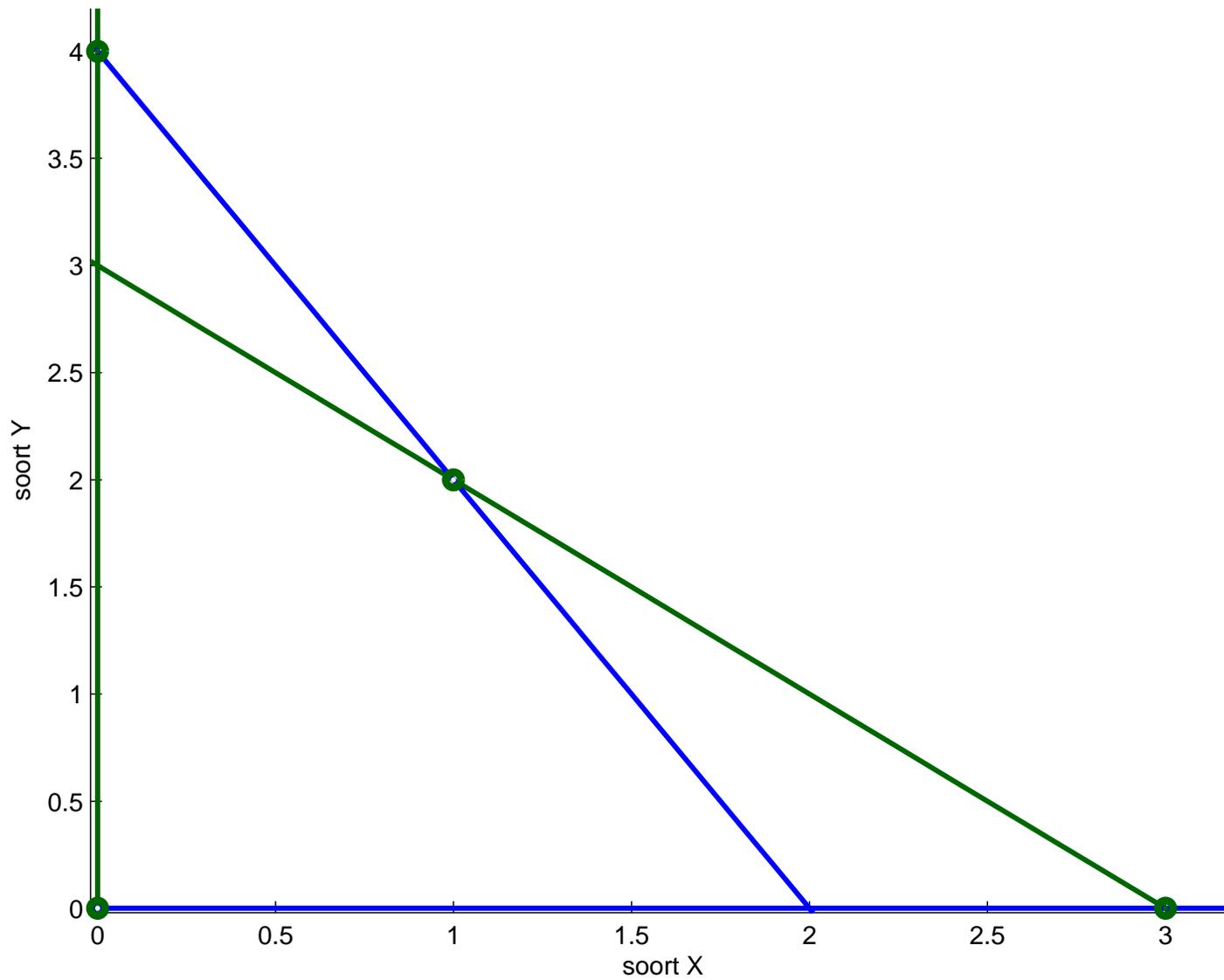
Door linearisatie:
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 2x - y & -x \\ -2y & 4 - 2x - 2y \end{bmatrix}$$

1. $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, 2. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}$ $s = -5 < 0$
 $d = 4 > 0$,

3. $\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ $s = -5$
 $d = 6$, 4. $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$ $d = -2$.

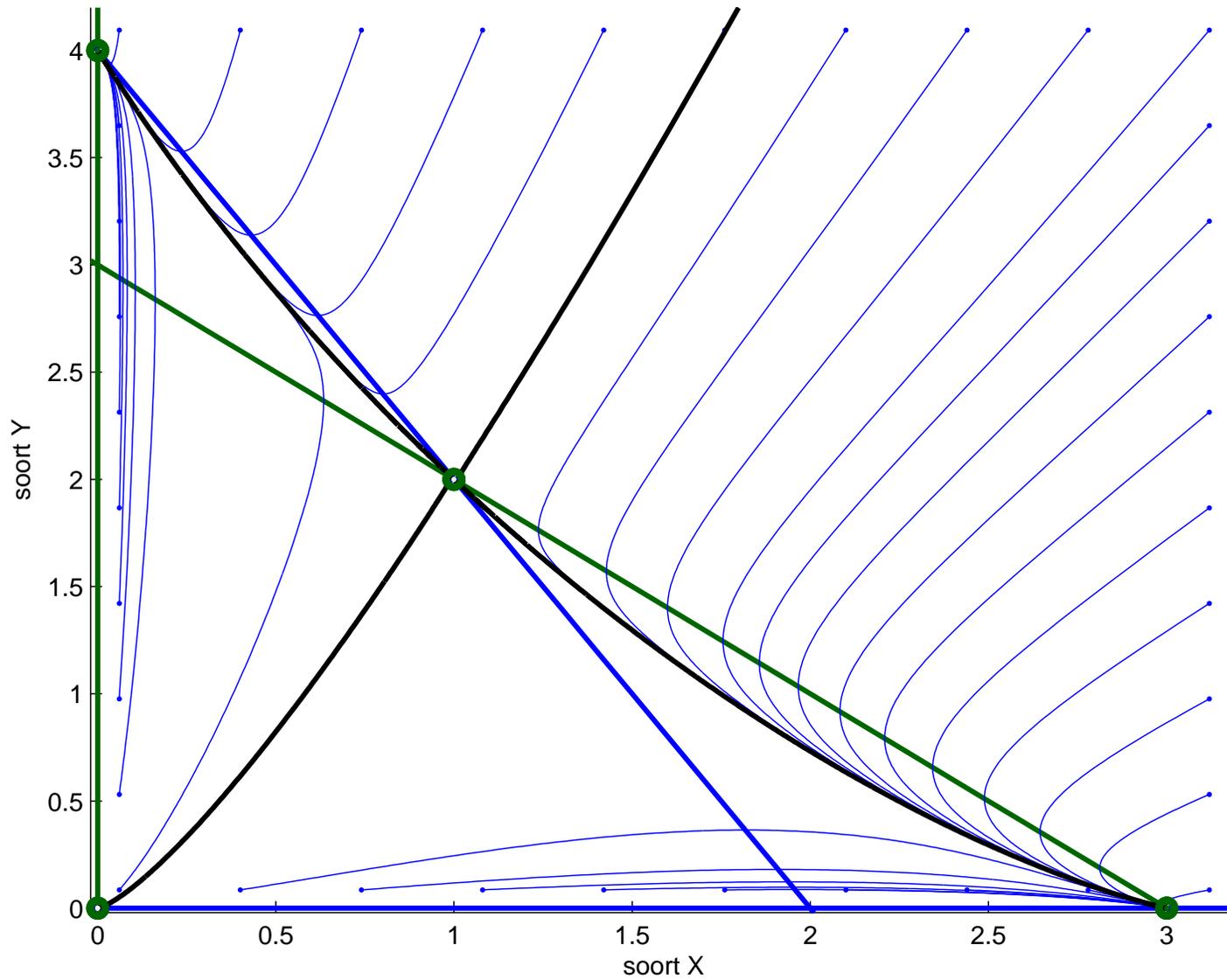
$$\begin{cases} x' = (3 - x - y) x \\ y' = (4 - 2x - y) y. \end{cases}$$

Concurrentie: $f=(3-x-y)x$, $g=(4-2x-y)y$



$$\begin{cases} x' = (3 - x - y) x \\ y' = (4 - 2x - y) y. \end{cases}$$

Concurrentie: $f=(3-x-y)x$, $g=(4-2x-y)y$



Concurrerende soorten

Voorbeeld.
$$\begin{cases} x' = (3 - x - y) x \\ y' = (4 - 2x - y) y. \end{cases}$$

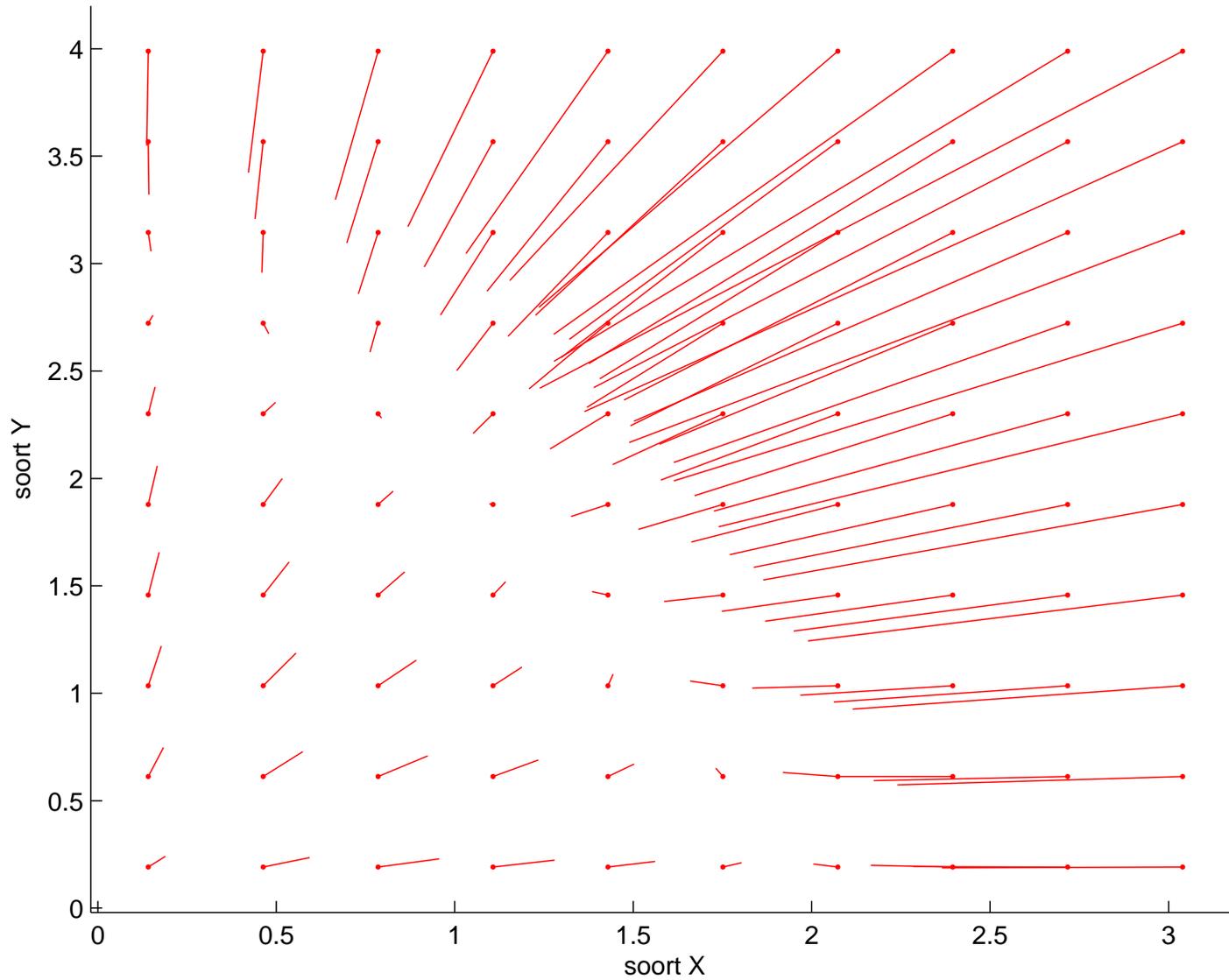
Concurrerende soorten

Voorbeeld.
$$\begin{cases} x' = (3 - x - y) x \\ y' = (4 - 2x - y) y. \end{cases}$$

Voorbeeld.
$$\begin{cases} x' = (4 - 2x - y) x \\ y' = (3 - x - y) y. \end{cases}$$

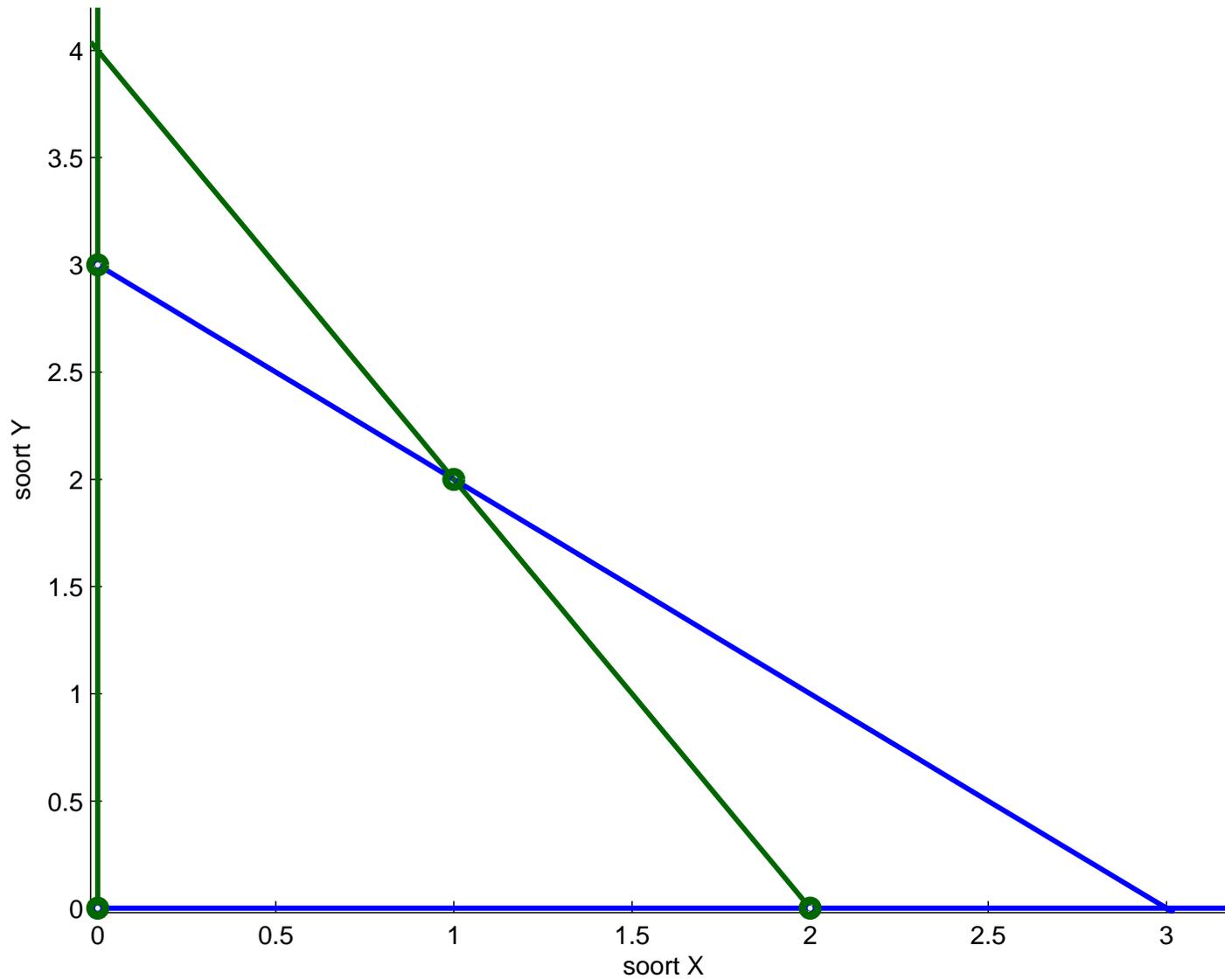
$$\begin{cases} x' = (4 - 2x - y)x \\ y' = (3 - x - y)y. \end{cases}$$

Concurrentie: $f=(4-2x-y)x$, $g=(3-x-y)y$



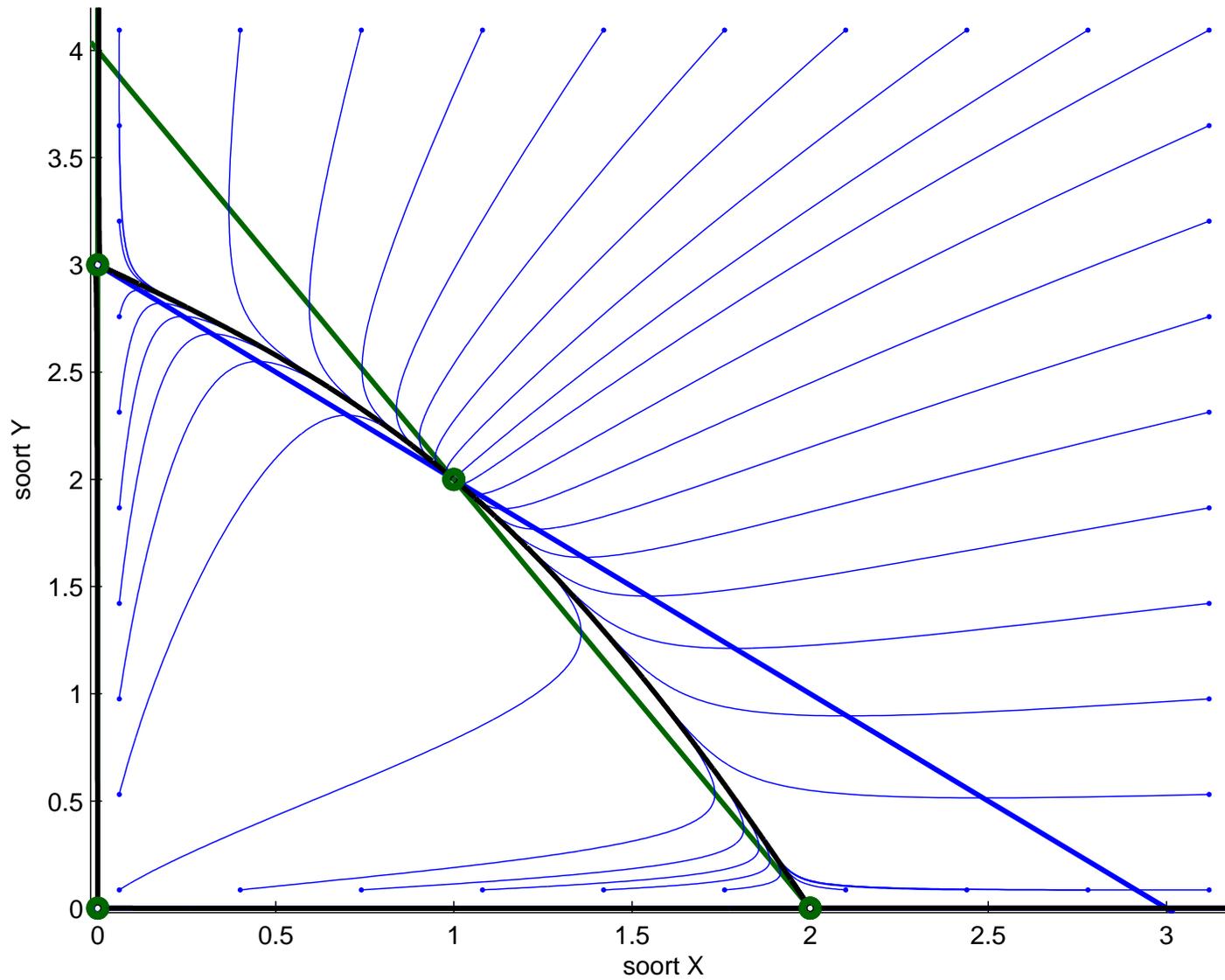
$$\begin{cases} x' = (4 - 2x - y)x \\ y' = (3 - x - y)y. \end{cases}$$

Concurrentie: $f=(4-2x-y)x$, $g=(3-x-y)y$



$$\begin{cases} x' = (4 - 2x - y)x \\ y' = (3 - x - y)y. \end{cases}$$

Concurrentie: $f=(4-2x-y)x$, $g=(3-x-y)y$



Concurrerende soorten

Voorbeeld.
$$\begin{cases} x' = (3 - x - y) x \\ y' = (4 - 2x - y) y. \end{cases}$$

Voorbeeld.
$$\begin{cases} x' = (4 - 2x - y) x \\ y' = (3 - x - y) y. \end{cases}$$

Voorbeeld.
$$\begin{cases} x' = (a - x^2 - y^2) x \\ y' = (4 - x - y) y \end{cases} \quad \text{voor } a = 9.$$

Concurrerende soorten

Voorbeeld.
$$\begin{cases} x' = (3 - x - y) x \\ y' = (4 - 2x - y) y. \end{cases}$$

Voorbeeld.
$$\begin{cases} x' = (4 - 2x - y) x \\ y' = (3 - x - y) y. \end{cases}$$

Voorbeeld.
$$\begin{cases} x' = (a - x^2 - y^2) x & \text{voor } a = 9. \\ y' = (4 - x - y) y \end{cases}$$

Bekijk de situatie ook voor a 's kleiner dan 9.

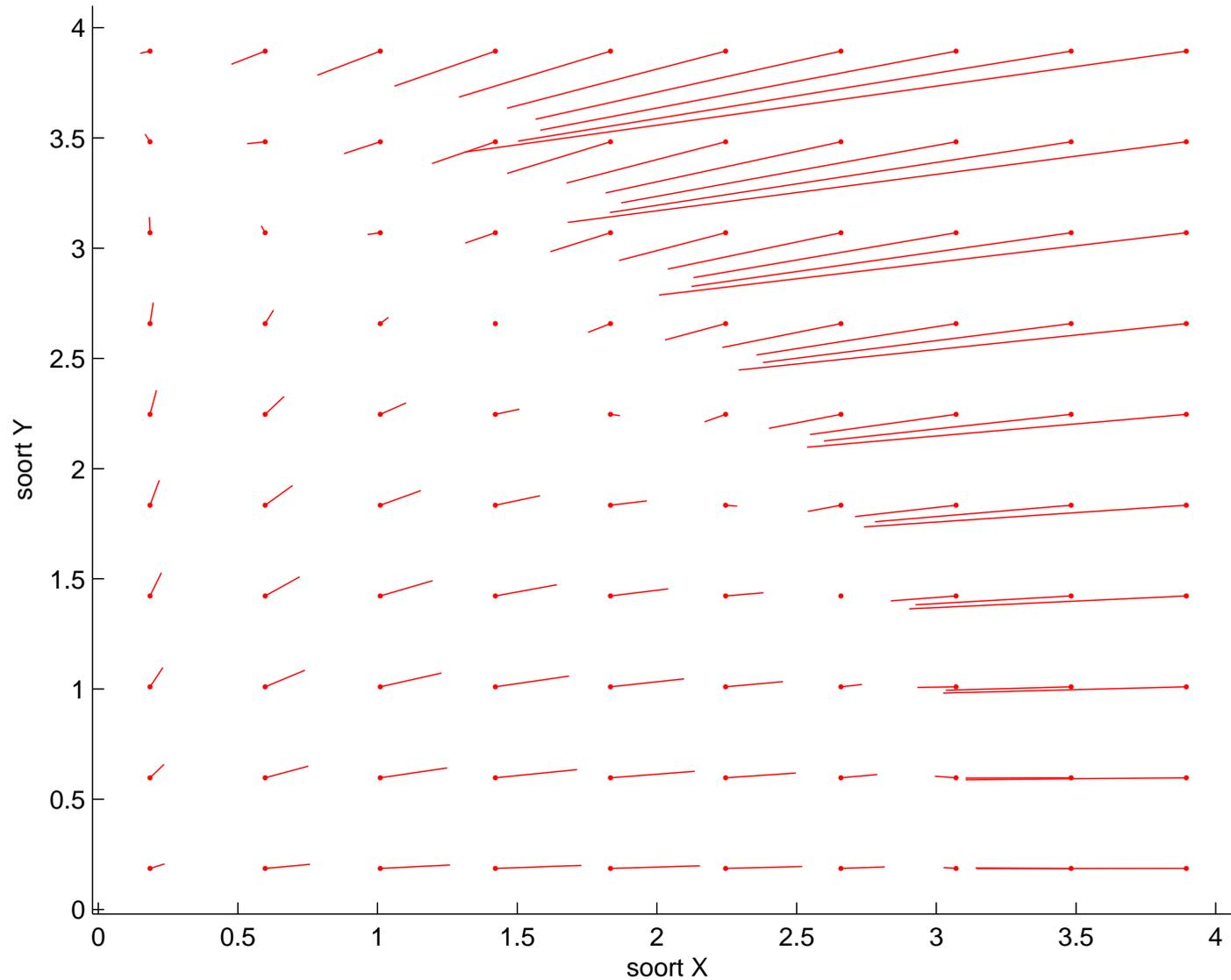
Vergelijk met name de situatie voor

$$a < 8 \quad \text{en} \quad a > 8.$$

Geef een verklaring.

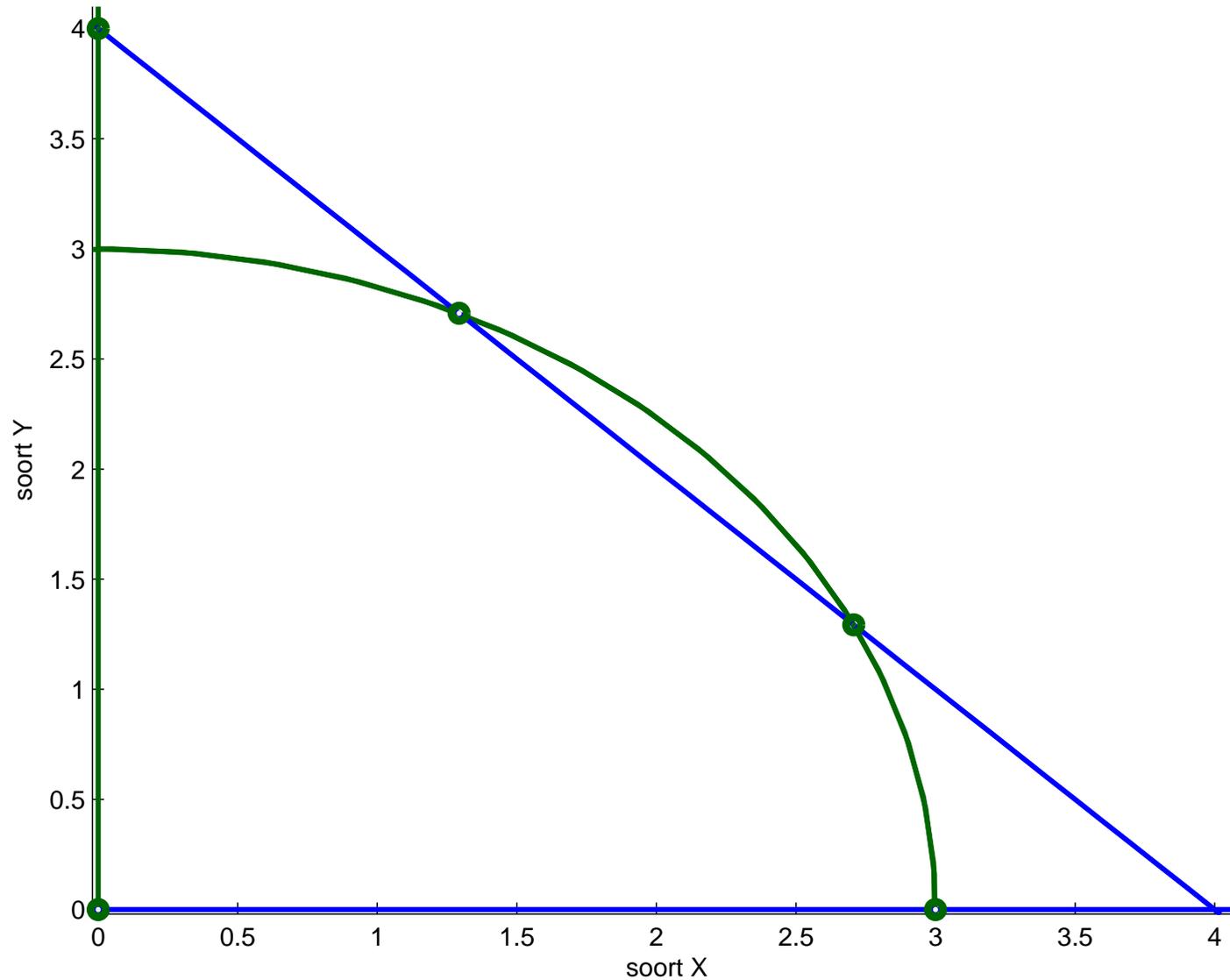
$$\begin{cases} x' = (a - x^2 - y^2)x & \text{voor } a = 9. \\ y' = (4 - x - y)y \end{cases}$$

concurrentie: $f=(a-x^2-y^2)x$, $g=(4-x-y)y$ met $a=9$



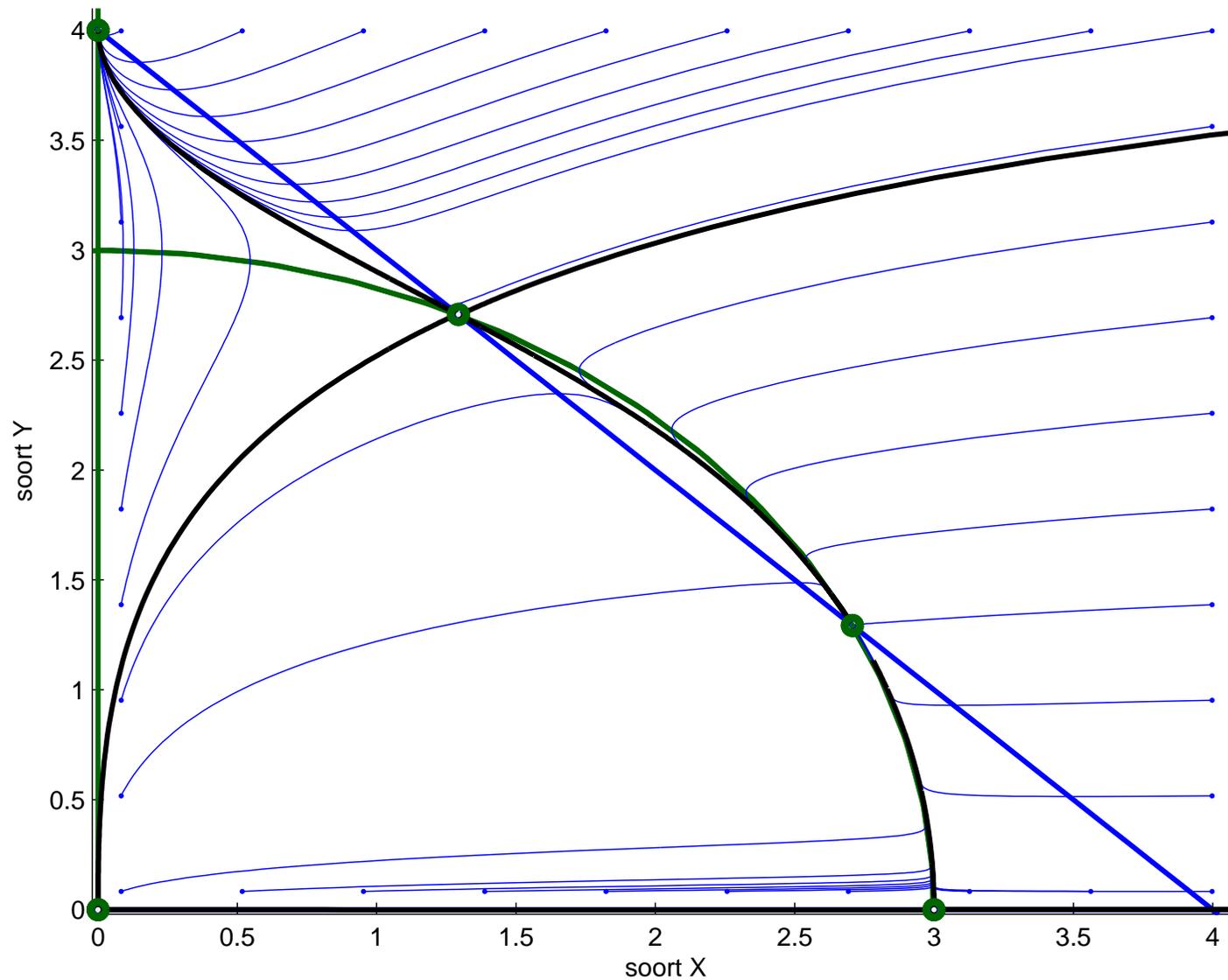
$$\begin{cases} x' = (a - x^2 - y^2) x & \text{voor } a = 9. \\ y' = (4 - x - y) y \end{cases}$$

concurrentie: $f=(a-x^2-y^2)x$, $g=(4-x-y)y$ met $a=9$



$$\begin{cases} x' = (a - x^2 - y^2)x & \text{voor } a = 9. \\ y' = (4 - x - y)y \end{cases}$$

concurrentie: $f=(a-x^2-y^2)x$, $g=(4-x-y)y$ met $a=9$



Concurrerende soorten

Voorbeeld.
$$\begin{cases} x' = (3 - x - y) x \\ y' = (4 - 2x - y) y. \end{cases}$$

Voorbeeld.
$$\begin{cases} x' = (4 - 2x - y) x \\ y' = (3 - x - y) y. \end{cases}$$

Voorbeeld.
$$\begin{cases} x' = (a - x^2 - y^2) x & \text{voor } a = 9. \\ y' = (4 - x - y) y \end{cases}$$

Bekijk de situatie ook voor a 's kleiner dan 9.

Vergelijk met name de situatie voor

$$a < 8 \quad \text{en} \quad a > 8.$$

Geef een verklaring.

Als a onder 8 zakt doet zich een catastrofe voor.

Program

- Niet-lineaire continue modellen
- Evenwicht
- Stabiliteit
- Lineairiseren rond het evenwicht
- Voorbeelden: concurrentie
- Voorbeelden: roof-prooi dier
- Chaos
- Hamilton systemen
- Voorbeelden van Hamilton systemen
- Tot slot

Roof-prooidier modellen I

$$\begin{cases} x' = (a - x - y)x \\ y' = (-1 + x)y \end{cases} \quad \text{voor } a > 0$$

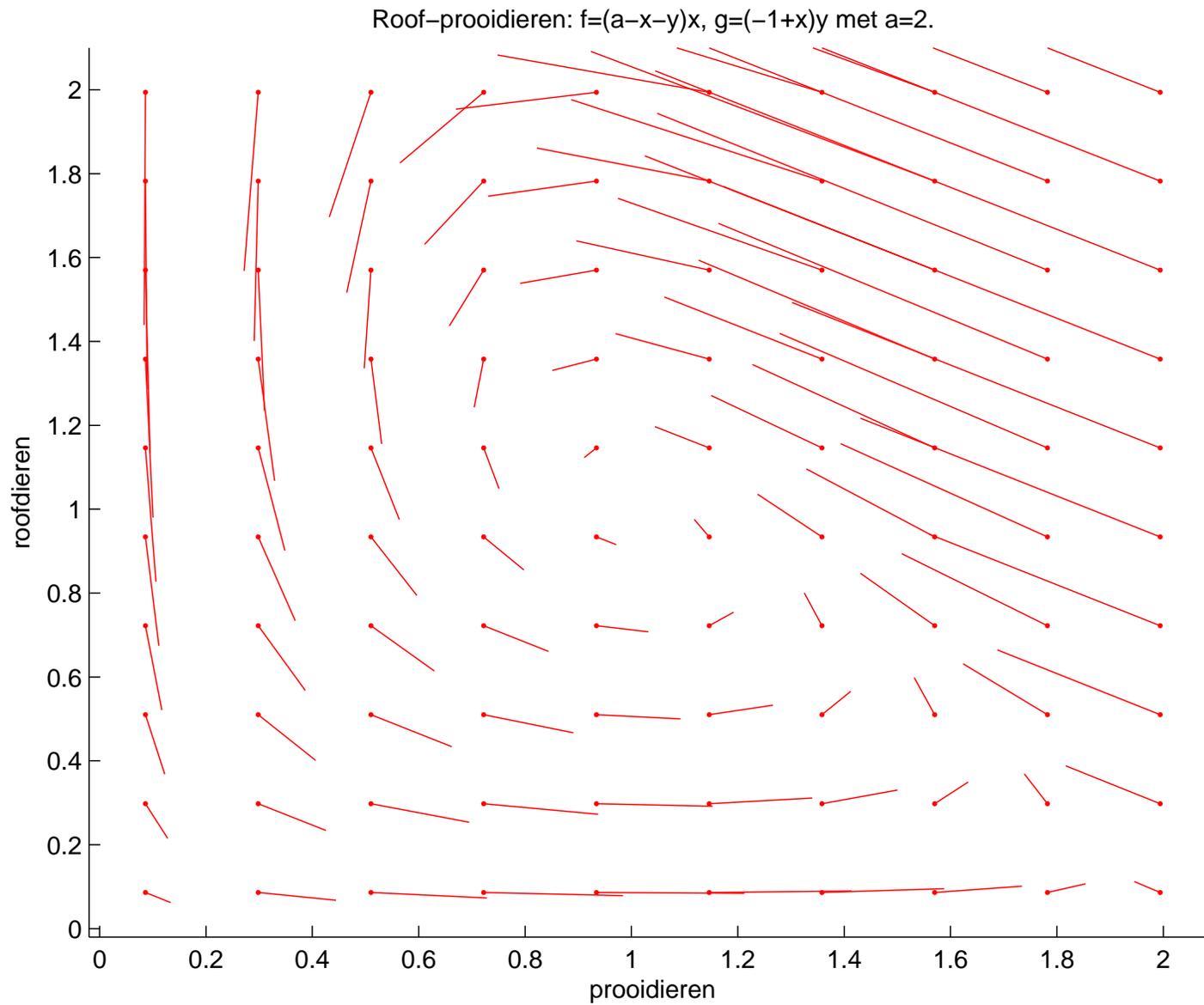
Roof-prooidier modellen I

$$\begin{cases} x' = (a - x - y)x & \text{voor } a > 0 \\ y' = (-1 + x)y \end{cases}$$

Evenwichten in

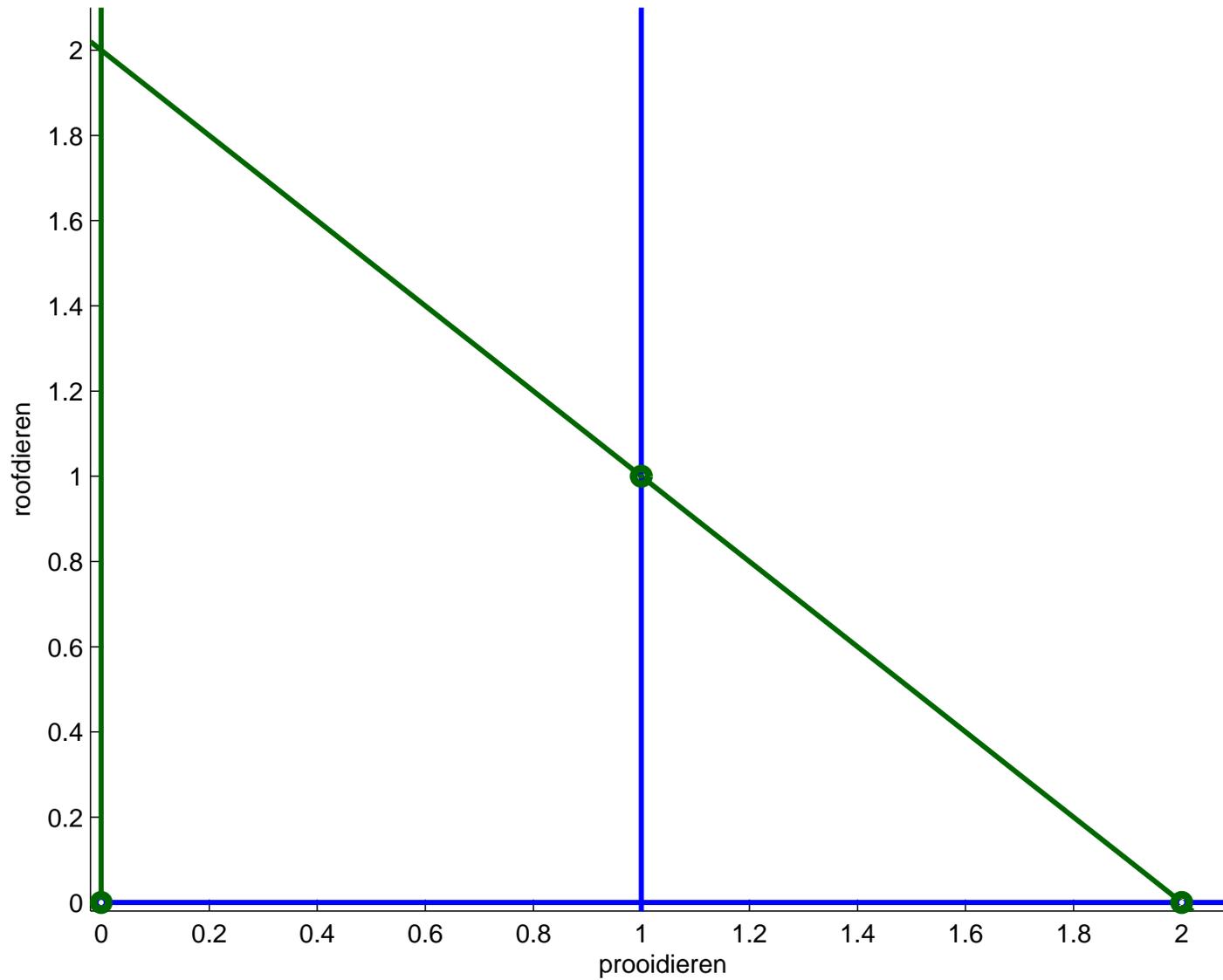
1. $(0, 0)$,
2. $(a, 0)$,
3. $(1, a - 1)$.

$$\begin{cases} x' = (a - x - y)x \\ y' = (-1 + x)y \end{cases} \quad \text{voor} \quad a = 2$$



$$\begin{cases} x' = (a - x - y)x & \text{voor } a = 2 \\ y' = (-1 + x)y \end{cases}$$

Roof-prooidieren: $f=(a-x-y)x$, $g=(-1+x)y$ met $a=2$.



Roof-prooidier modellen I

$$\begin{cases} x' = (a - x - y)x & \text{voor } a > 0 \\ y' = (-1 + x)y \end{cases}$$

Evenwichten in

1. $(0, 0)$,
2. $(a, 0)$,
3. $(1, a - 1)$.

Linearisatie:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - 2x - y & -x \\ y & x - 1 \end{bmatrix}.$$

Roof-prooidier modellen I

$$\begin{cases} x' = (a - x - y)x & \text{voor } a > 0 \\ y' = (-1 + x)y \end{cases}$$

Evenwichten in

1. $(0, 0)$,
2. $(a, 0)$,
3. $(1, a - 1)$.

Linearisatie:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - 2x - y & -x \\ y & x - 1 \end{bmatrix}.$$

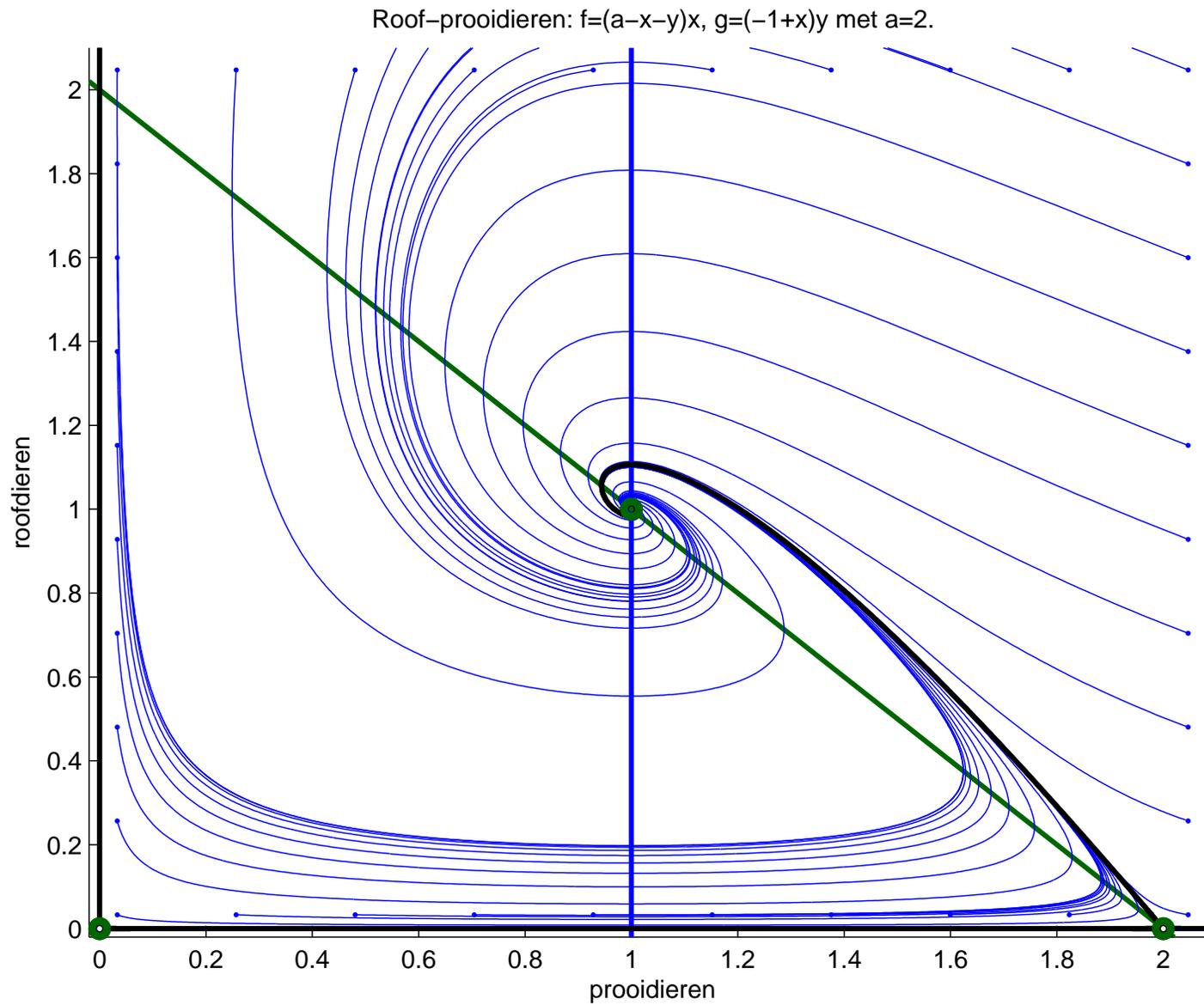
1. In $(0, 0)$: $d = -a < 0$.
2. In $(a, 0)$: $s = -1$, $d = a(1 - a)$. $d < 0 \Leftrightarrow a > 1$.
3. **Kan niet uit richtingsveld!!**

$(1, a - 1)$ alleen biologisch relevant als $a \geq 1$.

$$s = -1 \quad \& \quad d = a - 1 \text{ (put).}$$

$$1 = s^2 < 4(a - 1) \Leftrightarrow a > 5/4 \quad \text{(spiraal)}$$

$$\begin{cases} x' = (a - x - y)x \\ y' = (-1 + x)y \end{cases} \quad \text{voor } a = 2$$



Roof-prooidier modellen II

$$\begin{cases} x' = (h(x) - y) x & \text{voor zekere functie } h \\ y' = (-a + x) y & \text{voor zekere } a > 0 \end{cases}$$

We bekijken een h waarvoor, voor een $b > a$, geldt

$$h(x) > 0 \text{ als } 0 \leq x < b, \quad h(x) < 0 \text{ voor } x > b.$$

Roof-prooidier modellen II

$$\begin{cases} x' = (h(x) - y) x & \text{voor zekere functie } h \\ y' = (-a + x) y & \text{voor zekere } a > 0 \end{cases}$$

We bekijken een h waarvoor, voor een $b > a$, geldt

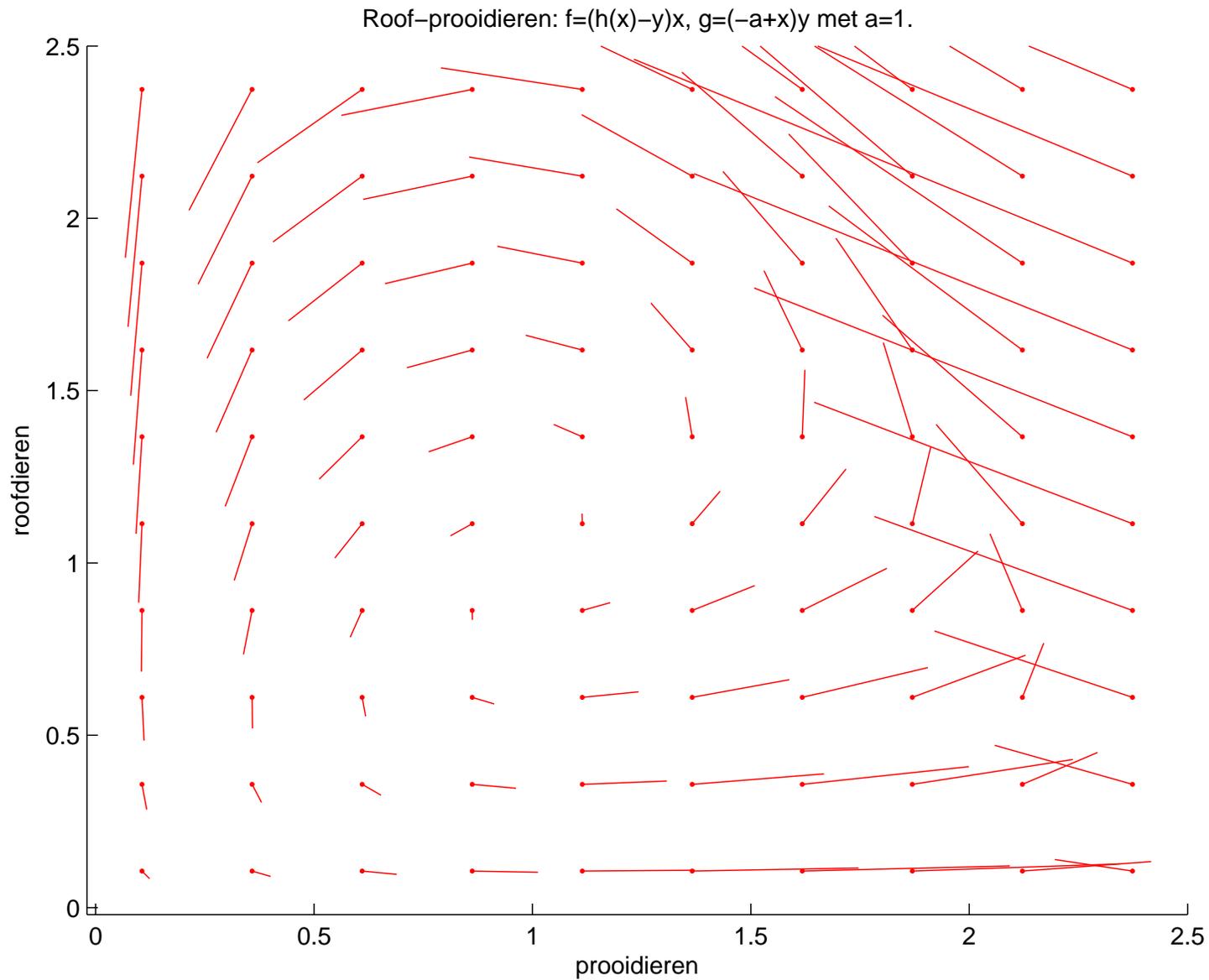
$$h(x) > 0 \text{ als } 0 \leq x < b, \quad h(x) < 0 \text{ voor } x > b.$$

Evenwichten in:

1. $(0, 0)$,
2. $(b, 0)$,
3. $(a, h(a))$.

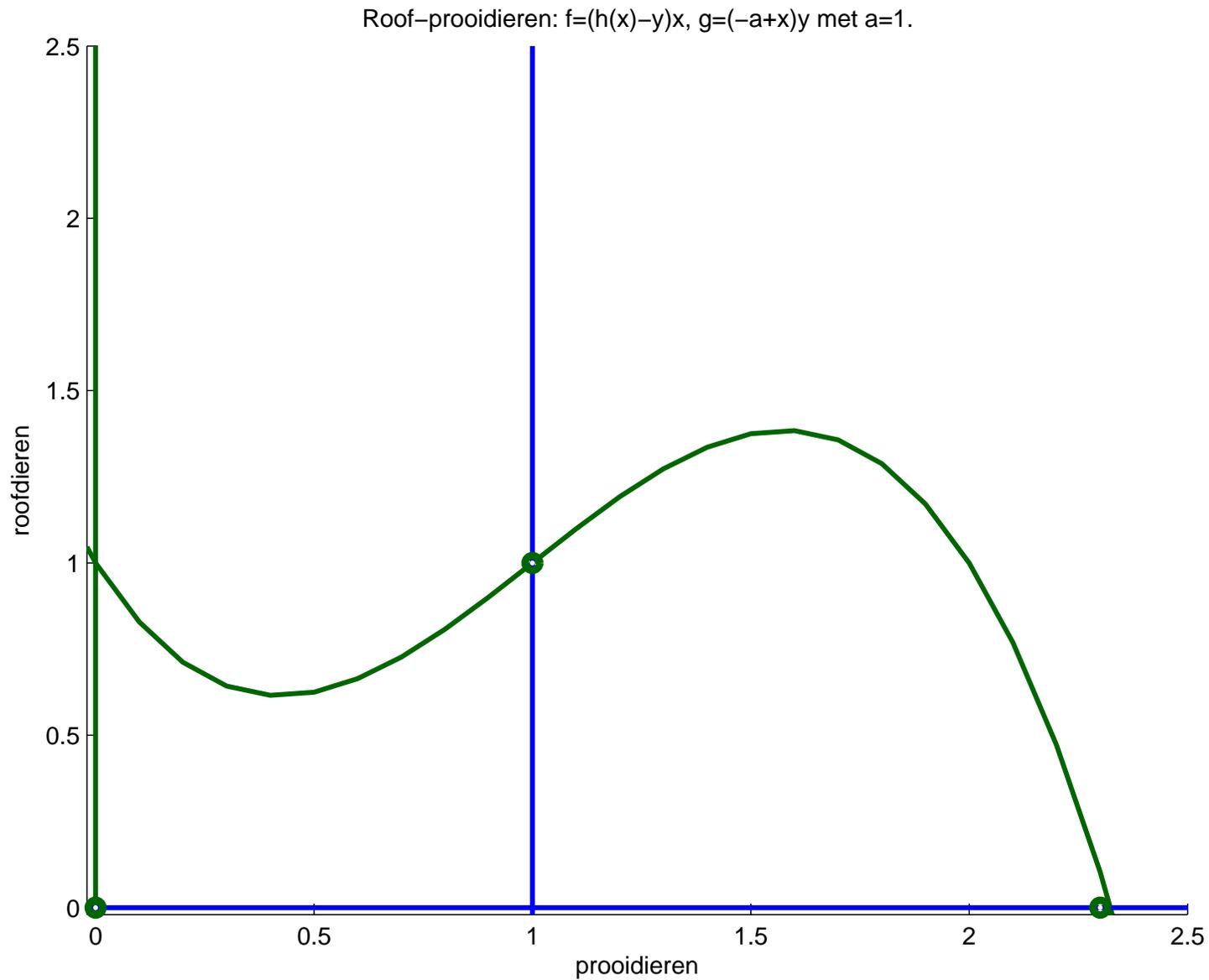
$$\begin{cases} x' = (h(x) - y)x \\ y' = (-a + x)y \end{cases} \quad \text{voor } a = 1$$

en $h = 1 - x(x - 1)(x - 2)$



$$\begin{cases} x' = (h(x) - y)x \\ y' = (-a + x)y \end{cases} \quad \text{voor } a = 1$$

en $h = 1 - x(x - 1)(x - 2)$



Roof-prooidier modellen II

$$\begin{cases} x' = (h(x) - y) x & \text{voor zekere functie } h \\ y' = (-a + x) y & \text{voor zekere } a > 0 \end{cases}$$

We bekijken een h waarvoor, voor een $b > a$, geldt

$$h(x) > 0 \text{ als } 0 \leq x < b, \quad h(x) < 0 \text{ voor } x > b.$$

Evenwichten in:

$$1. (0, 0), \quad 2. (b, 0), \quad 3. (a, h(a)).$$

Classificatie evenwicht $(a, h(a))$ door linearisatie:

$$\mathbf{Df}(a, h(a)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h'(a)a & -a \\ h(a) & 0 \end{bmatrix}.$$

$s = h'(a)a$, $d = ah(a)$: teken $h'(a)$ bepaalt stabiliteit

Roof-prooidier modellen II

$$\begin{cases} x' = (h(x) - y) x & \text{voor zekere functie } h \\ y' = (-a + x) y & \text{voor zekere } a > 0 \end{cases}$$

We bekijken een h waarvoor, voor een $b > a$, geldt

$$h(x) > 0 \text{ als } 0 \leq x < b, \quad h(x) < 0 \text{ voor } x > b.$$

Evenwichten in:

$$1. (0, 0), \quad 2. (b, 0), \quad 3. (a, h(a)).$$

Classificatie evenwicht $(a, h(a))$ door linearisatie:

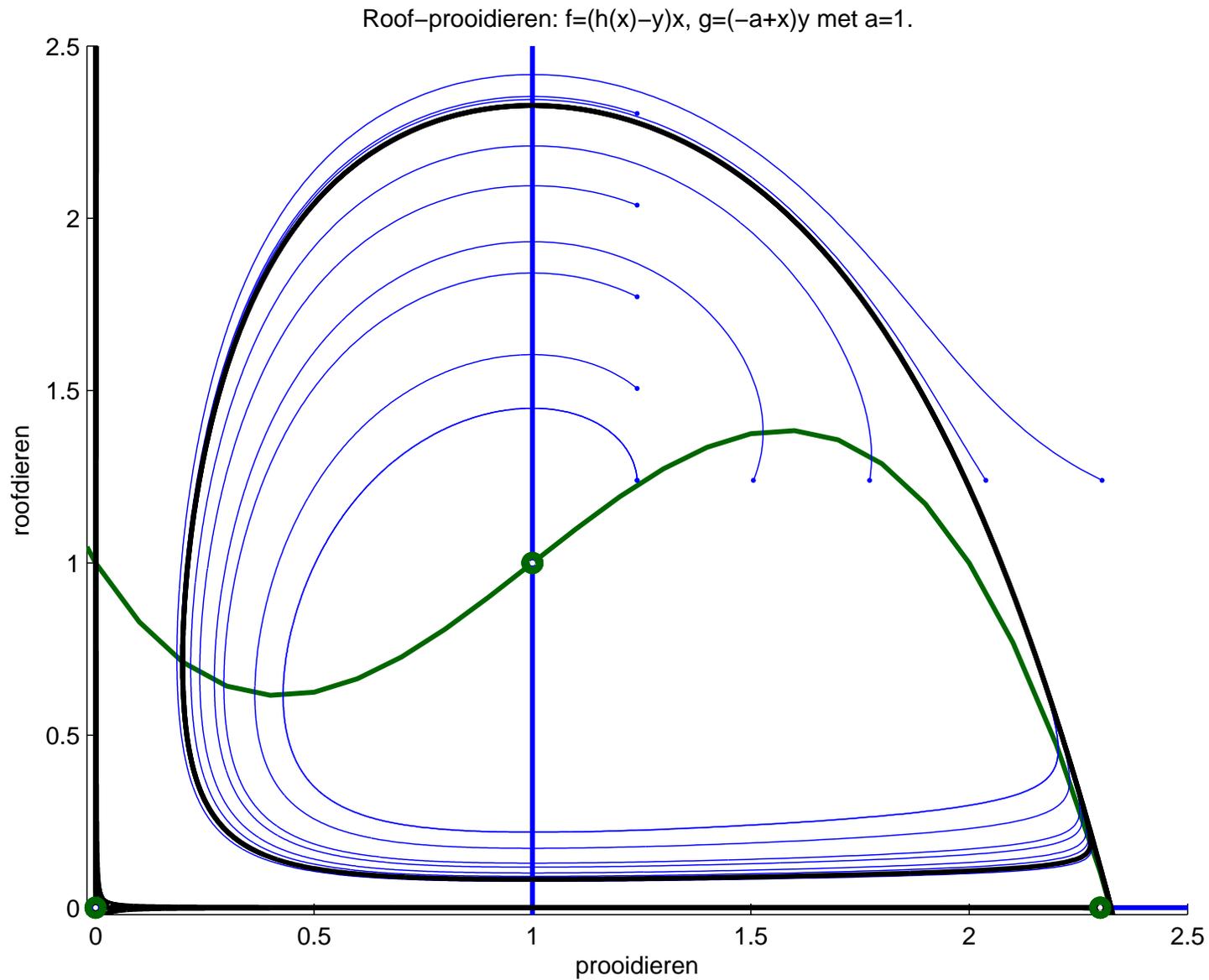
$$\mathbf{Df}(a, h(a)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h'(a)a & -a \\ h(a) & 0 \end{bmatrix}.$$

$s = h'(a)a$, $d = ah(a)$: teken $h'(a)$ bepaalt stabiliteit

Wat gebeurt er met de oplossingen, met x en y niet triviaal, voor $t \rightarrow \infty$ als $h'(a) > 0$?

$$\begin{cases} x' = (h(x) - y)x \\ y' = (-a + x)y \end{cases} \quad \text{voor } a = 1$$

en $h = 1 - x(x - 1)(x - 2)$



Roof–prooidier modellen II

$$\begin{cases} x' = (h(x) - y) x & \text{voor zekere functie } h \\ y' = (-a + x) y & \text{voor zekere } a > 0 \end{cases}$$

We bekijken een h waarvoor, voor een $b > a$, geldt

$$h(x) > 0 \text{ als } 0 \leq x < b, \quad h(x) < 0 \text{ voor } x > b.$$

Evenwichten in:

$$1. (0, 0), \quad 2. (b, 0), \quad 3. (a, h(a)).$$

Classificatie evenwicht $(a, h(a))$ door linearisatie:

$$\mathbf{Df}(a, h(a)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h'(a)a & -a \\ h(a) & 0 \end{bmatrix}.$$

$s = h'(a)a$, $d = ah(a)$: teken $h'(a)$ bepaalt stabiliteit

Oplossing benadert stabiele **Limiet cykel** als $h'(a) > 0$

Autonome differentiaalvergelijkingen

Een differentiaal vergelijking is **autonoom** als het rechterlid niet expliciet afhangt van t .

Voorbeelden

1) autonoom

$$\begin{cases} x' = (3 - y) x \\ y' = (2x - 1) y \end{cases}$$

2) niet autonoom

$$\begin{cases} x' = (3 \sin^2(t) - y) x \\ y' = (2x - 1) y \end{cases}$$

Voorbeeld

3) autonoom

$$\begin{cases} x' = (3 \sin^2(z) - y) x \\ y' = (2x - 1) y \\ z' = 1 \end{cases}$$

Autonome differentiaalvergelijkingen

Een differentiaal vergelijking is **autonoom** als het rechterlid niet expliciet afhangt van t .

Voorbeelden

1) autonoom

$$\begin{cases} x' = (3 - y) x \\ y' = (2x - 1) y \end{cases}$$

2) niet autonoom

$$\begin{cases} x' = (3 \sin^2(t) - y) x \\ y' = (2x - 1) y \end{cases}$$

Stelling. De oplossingskrommen $t \rightsquigarrow (x(t), y(t))$ van een autonome differentiaalvergelijkingen met continue differentieerbare rechterlid functies kruisen elkaar niet.

Gevolg. In 2-d. geen chaos voor autonome dvg.

Stelling. De oplossingskrommen $t \rightsquigarrow (x(t), y(t))$ van een autonome differentiaalvergelijkingen met continue differentieerbare rechterlid functies kruisen elkaar niet.

Voorbeeld

$$\begin{cases} x' = 2\sqrt{|x|} \\ y' = 1 \end{cases}$$

Stelling. De oplossingskrommen $t \rightsquigarrow (x(t), y(t))$ van een autonome differentiaalvergelijkingen met continue differentieerbare rechterlid functies kruisen elkaar niet.

Voorbeeld

$$\begin{cases} x' = 2\sqrt{|x|} \\ y' = 1 \end{cases}$$

Oplossing

$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = t \end{cases}$$

Stelling. De oplossingskrommen $t \rightsquigarrow (x(t), y(t))$ van een autonome differentiaalvergelijkingen met continue differentieerbare rechterlid functies kruisen elkaar niet.

Voorbeeld

$$\begin{cases} x' = 2\sqrt{|x|} \\ y' = 1 \end{cases}$$

Oplossing

$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = t \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} x(t) = t|t| \\ y(t) = t \end{cases}$$

Stelling. De oplossingskrommen $t \rightsquigarrow (x(t), y(t))$ van een autonome differentiaalvergelijkingen met continue differentieerbare rechterlid functies kruisen elkaar niet.

Voorbeeld

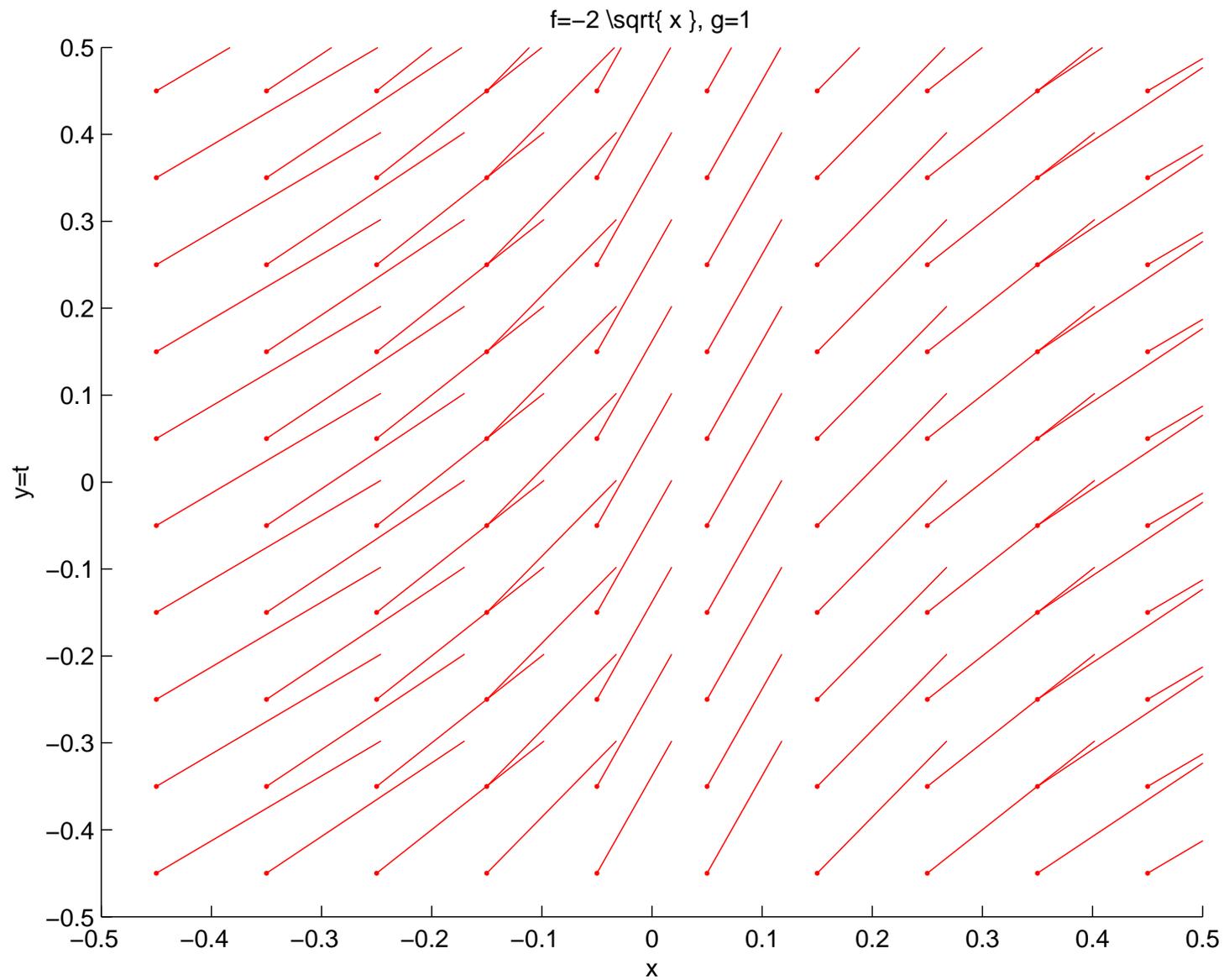
$$\begin{cases} x' = 2\sqrt{|x|} \\ y' = 1 \end{cases}$$

Oplossing

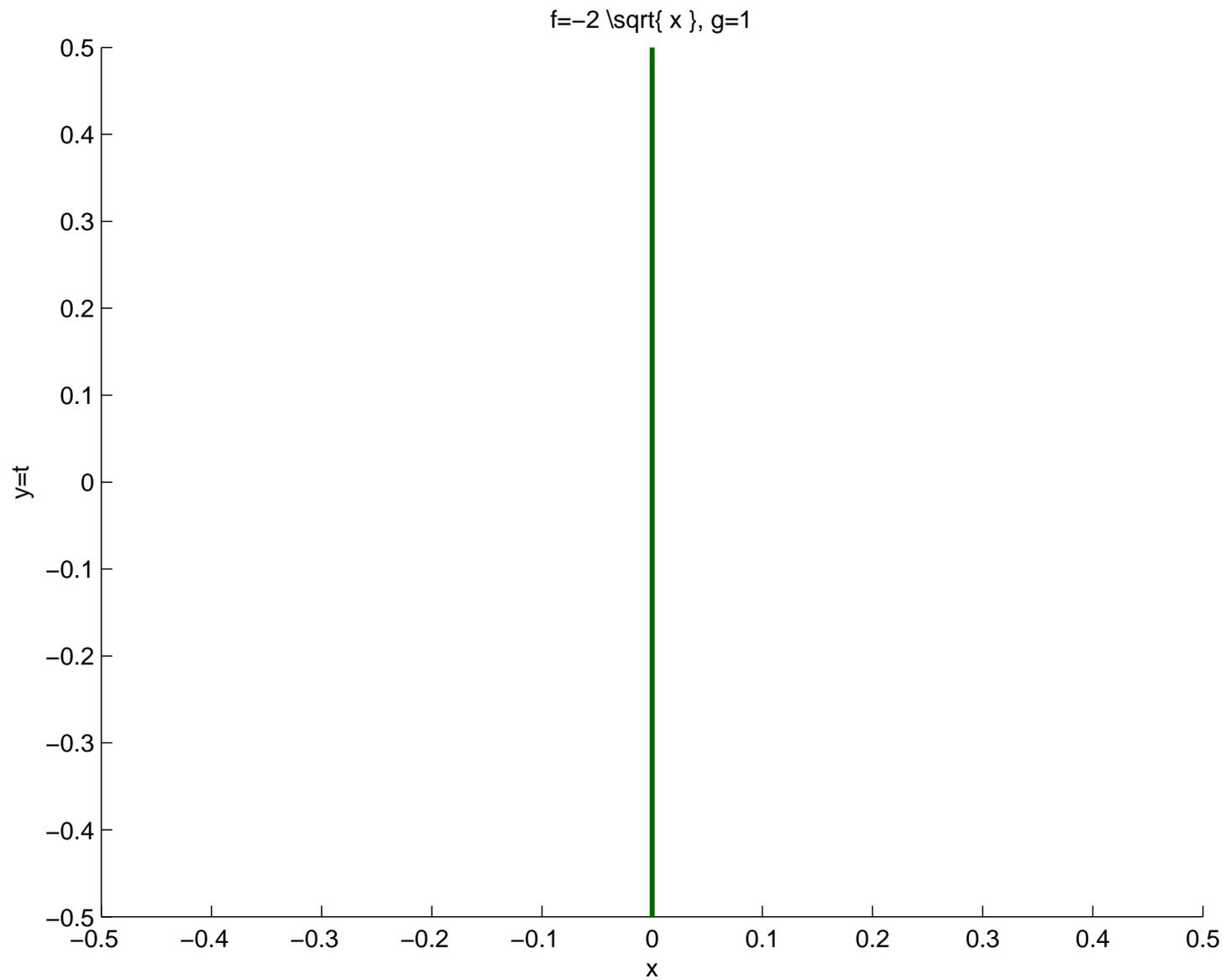
$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = t \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} x(t) = t|t| \\ y(t) = t \end{cases}$$

$f(x, y) = 2\sqrt{|x|}$ is niet differentieerbaar in $x = 0$.

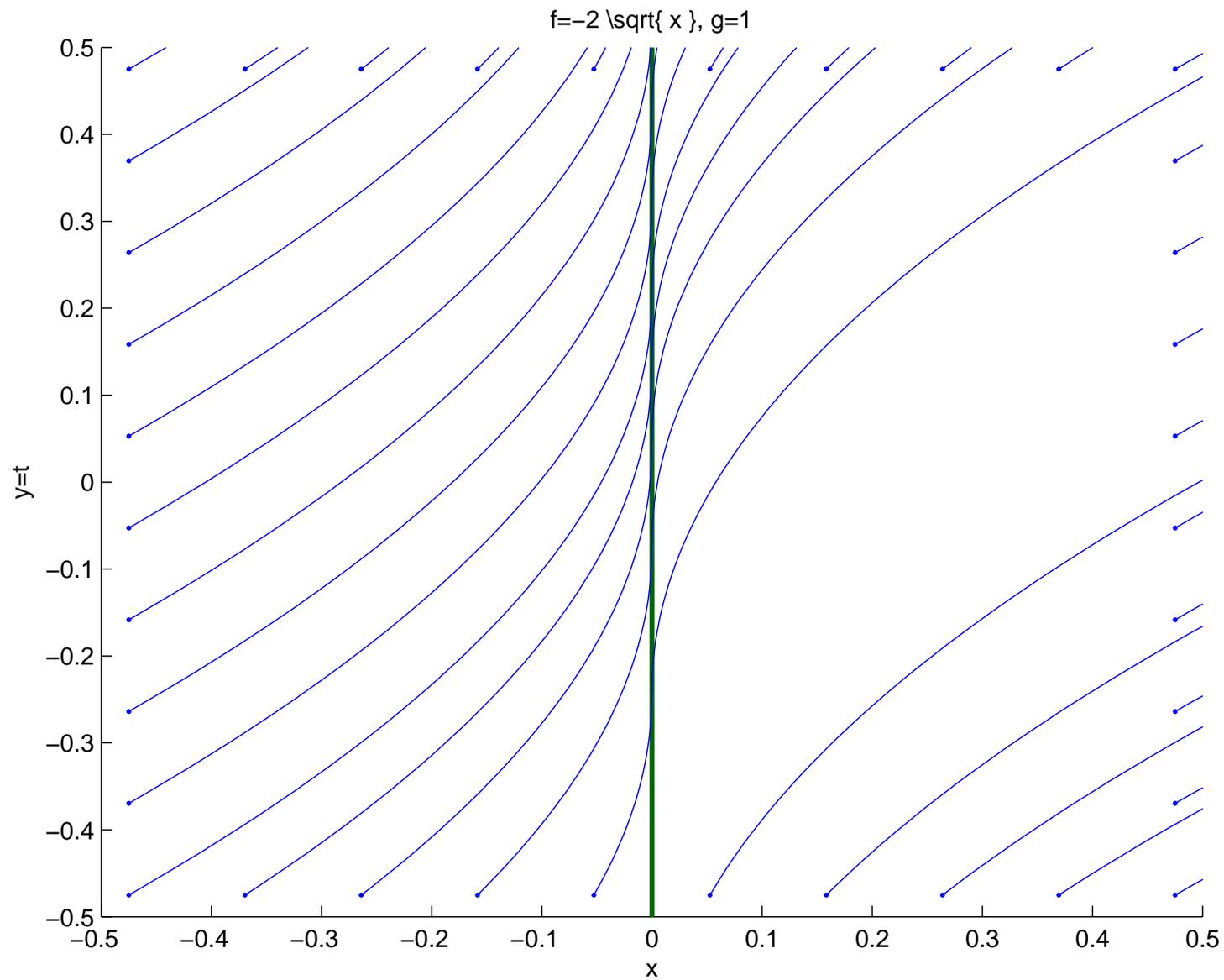
$$\begin{cases} x' = 2\sqrt{|x|} \\ y' = 1. \end{cases}$$



$$\begin{cases} x' = 2\sqrt{|x|} \\ y' = 1. \end{cases}$$



$$\begin{cases} x' = 2\sqrt{|x|} \\ y' = 1. \end{cases}$$



Limiet cykel in 2-dimensies

2-d autonome dvg:
$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

Stelling [Poincaré–Bendixon]

f, g continu differentieerbaar.

Als een oplossing $t \rightsquigarrow (x(t), y(t))$ voor $t \geq 0$ beperkt blijft tot een begrensd gebied dat geen evenwichtsooplossingen bevat dan nadert de baan van de kromme $t \rightsquigarrow (x(t), y(t))$ op den duur een **limiet cykel**, d.w.z. een gesloten kromme die zelf de baan is van een periodieke oplossing.

Definitie. Een oplossing $t \rightsquigarrow (x(t), y(t))$ is **periodiek** met **periode** $T > 0$ als

$$(x(t + T), y(t + T)) = (x(t), y(t)) \quad \text{voor alle } t \geq 0$$

Program

- Niet-lineaire continue modellen
- Evenwicht
- Stabiliteit
- Lineairiseren rond het evenwicht
- Voorbeelden: concurrentie
- Voorbeelden: roof-prooi dier
- Chaos
- Hamilton systemen
- Voorbeelden van Hamilton systemen
- Tot slot

Chaos in dimensie > 2

Voorbeeld [Lorenz, 1962]

$$\begin{cases} x' = 10(y - x) \\ y' = x(28 - z) - y \\ z' = xy - \frac{8}{3}z \end{cases}$$

Chaos

Een discreet model is een voorschrift om rijen te produceren. Voor zulk voorschrift is chaos gedefinieerd.

Hoe chaos te definiëren voor continue modellen?

Ook weer via een voorschrift om rijen te produceren.

Genereer rijen van x_n als volgt.

In 2 d.: Kies bijvoorbeeld de lijn $y = \beta$. De snijpunten van een oplossing $(x(t), y(t))$ met deze lijn levert een rij van x_n :

$$x_n = x(t_n) \text{ als } y(t_n) = \beta \text{ \& } y(t) \neq \beta \text{ voor } t_n < t < t_{n+1}.$$

In 3 d.: Kies een vlak en kijk naar de rij van snijpunten met dat vlak.

Chaos

In 2 d., voor autonome dvg., **geen chaos!!**

Iedere geproduceerde rij (x_n) (zie vorige transparant) gaat op den duur (d.w.z., $n \rightarrow \infty$)

- (1) of naar oneindig $(x_n \rightarrow \infty)$,
- (2) of naar een evenwicht $(x_n \rightarrow \alpha)$,
- (3) of wordt twee periodiek $(x_{2n} \rightarrow \alpha', x_{2n+1} \rightarrow \alpha'' \neq \alpha')$.

Program

- Niet-lineaire continue modellen
- Evenwicht
- Stabiliteit
- Lineairiseren rond het evenwicht
- Voorbeelden: concurrentie
- Voorbeelden: roof-prooi dier
- Chaos
- **Hamilton systemen**
- Voorbeelden van Hamilton systemen
- Tot slot

Hamilton systemen

Beschouw een differentieerbare \mathbb{R} -waardige functie F op \mathbb{R}^2 .

$$\begin{cases} x' = -\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \\ y' = +\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \end{cases}$$

Hamilton systemen

Beschouw een differentieerbare \mathbb{R} -waardige functie F op \mathbb{R}^2 .

$$\begin{cases} x' = -\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \\ y' = +\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \end{cases}$$

Stelling. *Voor iedere oplossing $(x(t), y(t))$ geldt*

$$F(x(t), y(t)) = C \quad \text{voor zekere constant } C.$$

Hamilton systemen

Beschouw een differentieerbare \mathbb{R} -waardige functie F op \mathbb{R}^2 .

$$\begin{cases} x' = -\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \\ y' = +\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \end{cases}$$

Stelling. Voor iedere oplossing $(x(t), y(t))$ geldt

$$F(x(t), y(t)) = C \quad \text{voor zekere constant } C.$$

Probleem. Gegeven f en g . Is er een F zodat

$$-\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = f(x, y) \quad \text{en} \quad +\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = g(x, y)$$

Hamilton systemen

Beschouw een differentieerbare \mathbb{R} -waardige functie F op \mathbb{R}^2 .

$$\begin{cases} x' = -\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \\ y' = +\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \end{cases}$$

Stelling. Voor iedere oplossing $(x(t), y(t))$ geldt

$$F(x(t), y(t)) = C \quad \text{voor zekere constant } C.$$

Probleem. Gegeven f en g . Is er een F zodat

$$-\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = f(x, y) \quad \text{en} \quad +\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = g(x, y)$$

of, m.a.w., is $\text{grad}(F) = (g, -f)$?

Hamilton systemen

Beschouw een differentieerbare \mathbb{R} -waardige functie F op \mathbb{R}^2 .

$$\begin{cases} x' = -\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \\ y' = +\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \end{cases}$$

Stelling. Voor iedere oplossing $(x(t), y(t))$ geldt

$$F(x(t), y(t)) = C \quad \text{voor zekere constant } C.$$

Probleem. Gegeven f en g . Is er een F zodat

$$-\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = f(x, y) \quad \text{en} \quad +\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = g(x, y)$$

of, m.a.w., is $\text{rot}(F) \equiv \left(-\frac{\partial F}{\partial y}(x, y), \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)\right) = (f, g)$?

Hamilton systemen

Beschouw een differentieerbare \mathbb{R} -waardige functie F op \mathbb{R}^2 .

$$\begin{cases} x' = -\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \\ y' = +\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \end{cases}$$

Stelling. Voor iedere oplossing $(x(t), y(t))$ geldt

$$F(x(t), y(t)) = C \quad \text{voor zekere constant } C.$$

Probleem. Gegeven f en g . Is er een F zodat

$$-\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = f(x, y) \quad \text{en} \quad +\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = g(x, y)$$

of, m.a.w., is $\text{grad}(F) = (g, -f)$?

Is $(g, -f)$ **exact**? Dwz, is $-\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}$?

Stelling. Voor iedere oplossing $t \rightsquigarrow (x(t), y(t))$ geldt

$$F(x(t), y(t)) = C \text{ voor zekere constante } C.$$

Bewijs. $t \rightsquigarrow (x(t), y(t))$ oplossing.

Uit de differentiaalvergelijking volgt

$$x'(t) \frac{\partial F}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial F}{\partial y}(x(t), y(t)) = 0$$

Omdat

$$\frac{d}{dt}F(x(t), y(t)) = x'(t) \frac{\partial F}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial F}{\partial y}(x(t), y(t))$$

is
$$\frac{d}{dt}F(x(t), y(t)) = 0$$

en de stelling volgt door integratie.

Hamilton systemen

Beschouw een differentieerbare \mathbb{R} -waardige functie F op \mathbb{R}^2 .

$$\begin{cases} x' = -\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \\ y' = +\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \end{cases}$$

Stelling. Voor iedere oplossing $(x(t), y(t))$ geldt

$$F(x(t), y(t)) = C \quad \text{voor zekere constant } C.$$

Voorbeeld. Stel H en G zijn \mathbb{R} -waardig op een deel van \mathbb{R}

zo dat $\frac{dG}{dy}(y) = f(x, y)$ en $\frac{dH}{dx}(x) = g(x, y)$.

Dan
$$F(x, y) = H(x) - G(y).$$

Voorbeeld [Slinger] $\phi'' = -\nu^2 \sin \phi$ met $\nu^2 \equiv g/\ell$.

Schrijf $y \equiv \phi$ en $x \equiv \phi'$. Dan

$$\begin{cases} x' = -\nu^2 \sin(y) \\ y' = x \end{cases}$$

Voorbeeld [Slinger] $\phi'' = -\nu^2 \sin \phi$ met $\nu^2 \equiv g/\ell$.

Schrijf $y \equiv \phi$ en $x \equiv \phi'$. Dan

$$\begin{cases} x' = -\nu^2 \sin(y) \\ y' = x \end{cases}$$

Met $F(x, y) = -\nu^2 \cos(y) + \frac{1}{2}x^2$ is

$$\text{grad}(F) = (x, \nu^2 \sin(y)) = (g, -f).$$

Voorbeeld [Slinger] $\phi'' = -\nu^2 \sin \phi$ met $\nu^2 \equiv g/\ell$.

Schrijf $y \equiv \phi$ en $x \equiv \phi'$. Dan

$$\begin{cases} x' = -\nu^2 \sin(y) \\ y' = x \end{cases}$$

Met $F(x, y) = -\nu^2 \cos(y) + \frac{1}{2}x^2$ is

$$\text{grad}(F) = (x, \nu^2 \sin(y)) = (g, -f).$$

Na schaling, $m\ell^2 F(x, y) = C' \equiv m\ell^2 C$, geldt

$$-gm\ell \cos(y) + \frac{1}{2}m\ell^2 x^2 = -gm\ell \cos(\phi) + \frac{1}{2}m(\ell\phi')^2 = C' :$$

potentiële energie + kinetische energie = constant

Dus $F(x, y) = C$ is de **Wet van behoud van energie**.

Voorbeeld [Slinger] $\phi'' = -\nu^2 \sin \phi$ met $\nu^2 \equiv g/\ell$.

Schrijf $y \equiv \phi$ en $x \equiv \phi'$. Dan

$$\begin{cases} x' = -\nu^2 \sin(y) \\ y' = x \end{cases}$$

Met $F(x, y) = -\nu^2 \cos(y) + \frac{1}{2}x^2$ is

$$\text{grad}(F) = (x, \nu^2 \sin(y)) = (g, -f).$$

Als $\phi(0) = \phi_0$ and $\phi'(0) = 0$, dan is $C' = -gml \cos(\phi_0)$ en

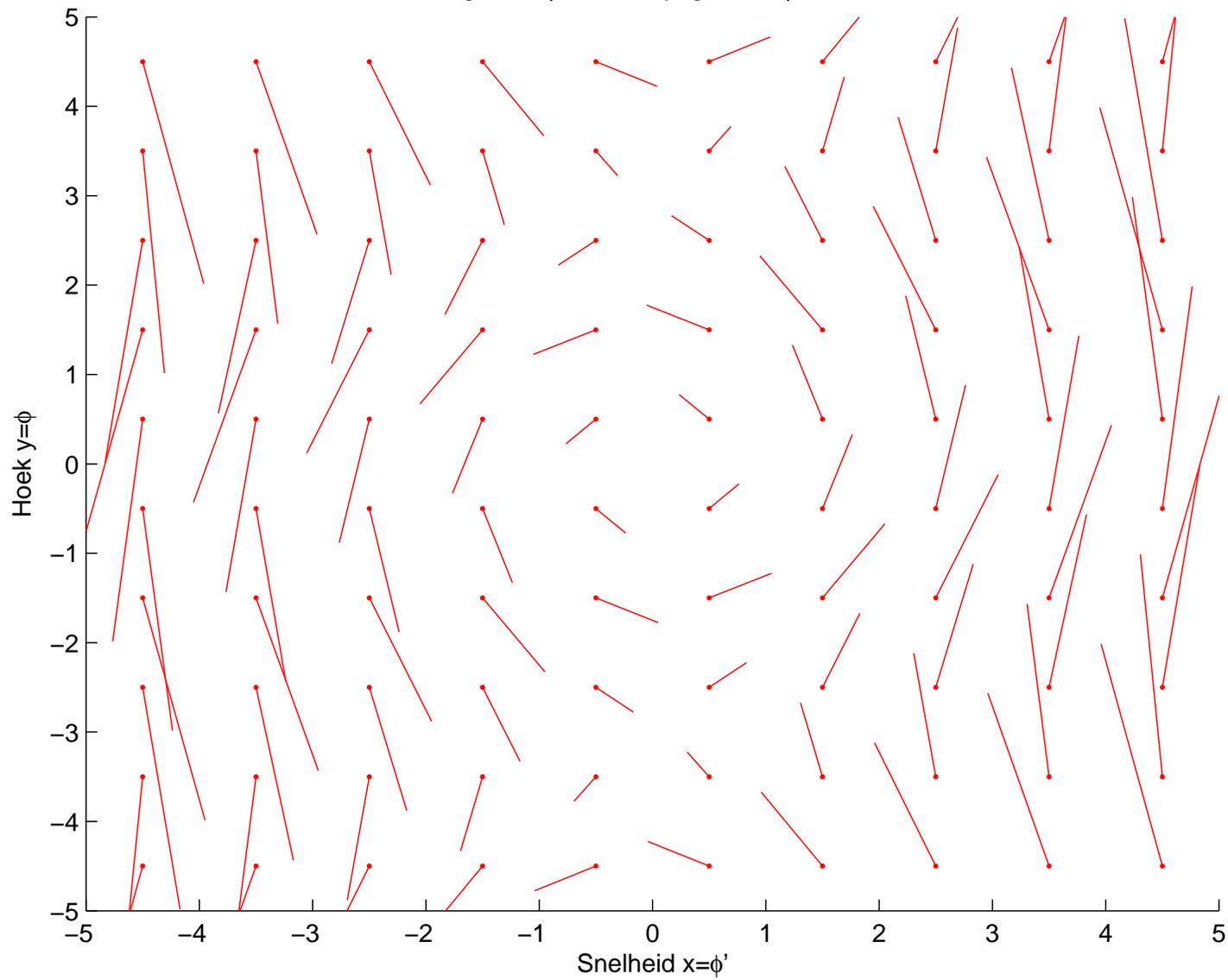
$$gml(1 - \cos(\phi)) + \frac{1}{2}m(\ell\phi')^2 = gml(1 - \cos(\phi_0)) :$$

potentiële energie + kinetische energie = constant

Dus $F(x, y) = C$ is de **Wet van behoud van energie**.

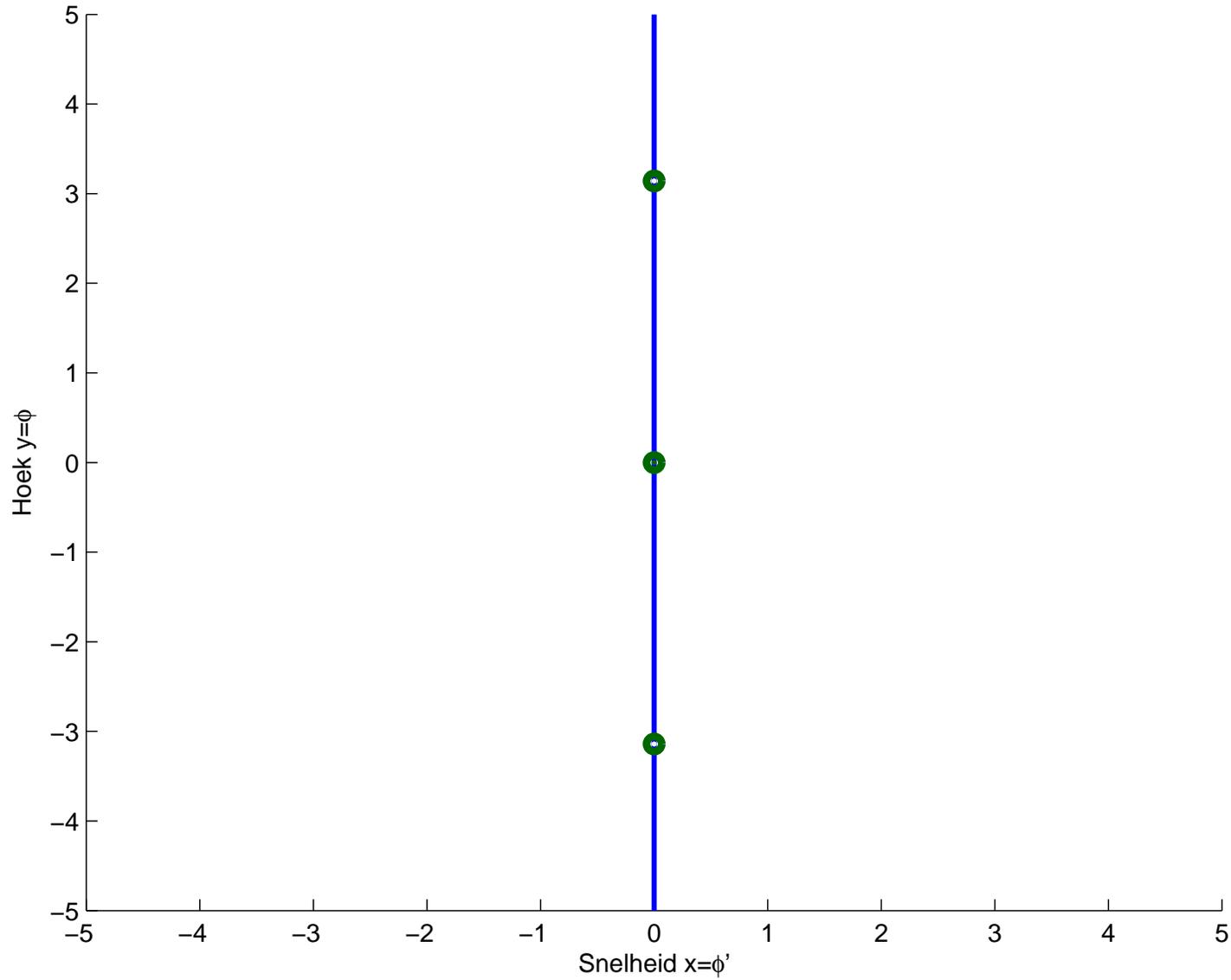
$$\begin{cases} x' = -\sin(y) \\ y' = x \end{cases}$$

Slinger: $f = -\rho x - v \sin y$, $g = x$ met $\rho = 0$, $v = 1$



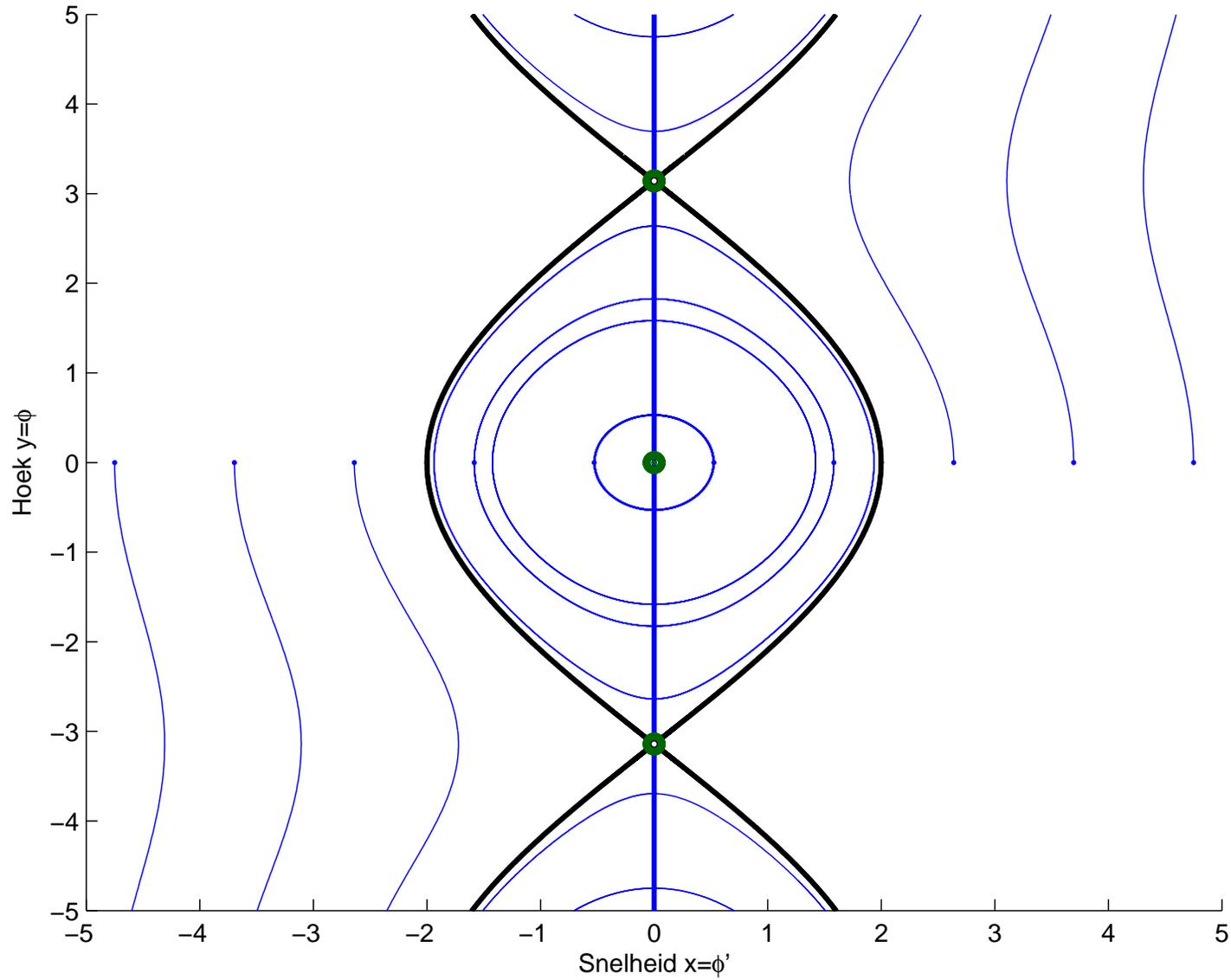
$$\begin{cases} x' = -\sin(y) \\ y' = x \end{cases}$$

Slinger: $f = -\rho x - v \sin y$, $g = x$ met $\rho = 0$, $v = 1$



$$\begin{cases} x' = -\sin(y) \\ y' = x \end{cases}$$

Slinger: $f = -\rho x - v \sin y$, $g = x$ met $\rho = 0$, $v = 1$



Hamilton systemen II

F en h scalair-velden (dwz \mathbb{R} -waardig) op \mathbb{R}^2 , F differentieerbaar.

$$\begin{cases} x' = -h(x, y) \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \\ y' = +h(x, y) \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \end{cases} \quad \text{Hamilton systeem}$$

Hamilton systemen II

F en h scalair-velden (dwz \mathbb{R} -waardig) op \mathbb{R}^2 , F differentieerbaar.

$$\begin{cases} x' = -h(x, y) \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \\ y' = +h(x, y) \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Hamilton} \\ \text{systeem} \end{array}$$

Stelling. Voor iedere oplossing $t \rightsquigarrow (x(t), y(t))$ geldt

$$F(x(t), y(t)) = C \quad \text{voor zekere constante } C.$$

Hamilton systemen II

F en h scalair-velden (dwz \mathbb{R} -waardig) op \mathbb{R}^2 , F differentieerbaar.

$$\begin{cases} x' = -h(x, y) \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \\ y' = +h(x, y) \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \end{cases} \quad \text{Hamilton systeem}$$

Stelling. Voor iedere oplossing $t \rightsquigarrow (x(t), y(t))$ geldt

$$F(x(t), y(t)) = C \quad \text{voor zekere constante } C.$$

Bewijs. $(x(t), y(t))$ oplossing. Dan, uit dvg.,

$$x'(t) \frac{\partial F}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial F}{\partial y}(x(t), y(t)) = 0.$$

Hamilton systemen II

F en h scalair-velden (dwz \mathbb{R} -waardig) op \mathbb{R}^2 , F differentieerbaar.

$$\begin{cases} x' = -h(x, y) \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \\ y' = +h(x, y) \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \end{cases} \quad \text{Hamilton systeem}$$

Stelling. Voor iedere oplossing $t \rightsquigarrow (x(t), y(t))$ geldt

$$F(x(t), y(t)) = C \quad \text{voor zekere constante } C.$$

Gegeven f en g .

Is er een F en een zgn **integrerende factor** h zodat

$$\text{grad}(F) = \left(\frac{g}{h}, -\frac{f}{h} \right)?$$

Hamilton systemen II

F en h scalair-velden (dwz \mathbb{R} -waardig) op \mathbb{R}^2 , F differentieerbaar.

$$\begin{cases} x' = -h(x, y) \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \\ y' = +h(x, y) \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \end{cases} \quad \text{Hamilton systeem}$$

Stelling. Voor iedere oplossing $t \rightsquigarrow (x(t), y(t))$ geldt

$$F(x(t), y(t)) = C \quad \text{voor zekere constante } C.$$

Voorbeeld. Stel H en G zijn \mathbb{R} -waardig op een deel van \mathbb{R}

zo dat
$$\frac{dG}{dy}(y) = \frac{f(x, y)}{h(x, y)} \quad \text{en} \quad \frac{dH}{dx}(x) = \frac{g(x, y)}{h(x, y)}.$$

Dan
$$F(x, y) = H(x) - G(y).$$

Hamilton systemen: snelheid

Snelheid. Als $t \rightsquigarrow (x_h(t), y_h(t))$ voldoet aan

$$x' = -h(x, y) \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \quad \text{en} \quad y' = +h(x, y) \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$$

en als $t \rightsquigarrow (x_s(t), y_s(t))$ voldoet aan

$$x' = -\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \quad \text{en} \quad y' = +\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$$

en $x_s(0) = x_h(0), \quad y_s(0) = y_h(0),$

dan bewandelen beide oplossingen in het (x, y) -vlak dezelfde kromme, maar met een andere 'snelheid':

als (x_0, y_0) een punt is op de oplossingskromme, dan is (x_h, y_h) op dat punt $h(x_0, y_0)$ maal 'sneller' dan (x_s, y_s) op dat zelfde punt.

Merk op dat (x_h, y_h) en (x_s, y_s) niet op hetzelfde tijdstip t in (x_0, y_0) zullen zijn.

Program

- Niet-lineaire continue modellen
- Evenwicht
- Stabiliteit
- Lineairiseren rond het evenwicht
- Voorbeelden: concurrentie
- Voorbeelden: roof-prooi dier
- Chaos
- Hamilton systemen
- Voorbeelden van Hamilton systemen
- Tot slot

Voorbeeld [Guerilla oorlog]

$$\begin{cases} x' = -\alpha y \\ y' = -\beta x y \end{cases}$$

Voorbeeld [Guerilla oorlog] $\begin{cases} x' = -\alpha y \\ y' = -\beta x y \end{cases}$

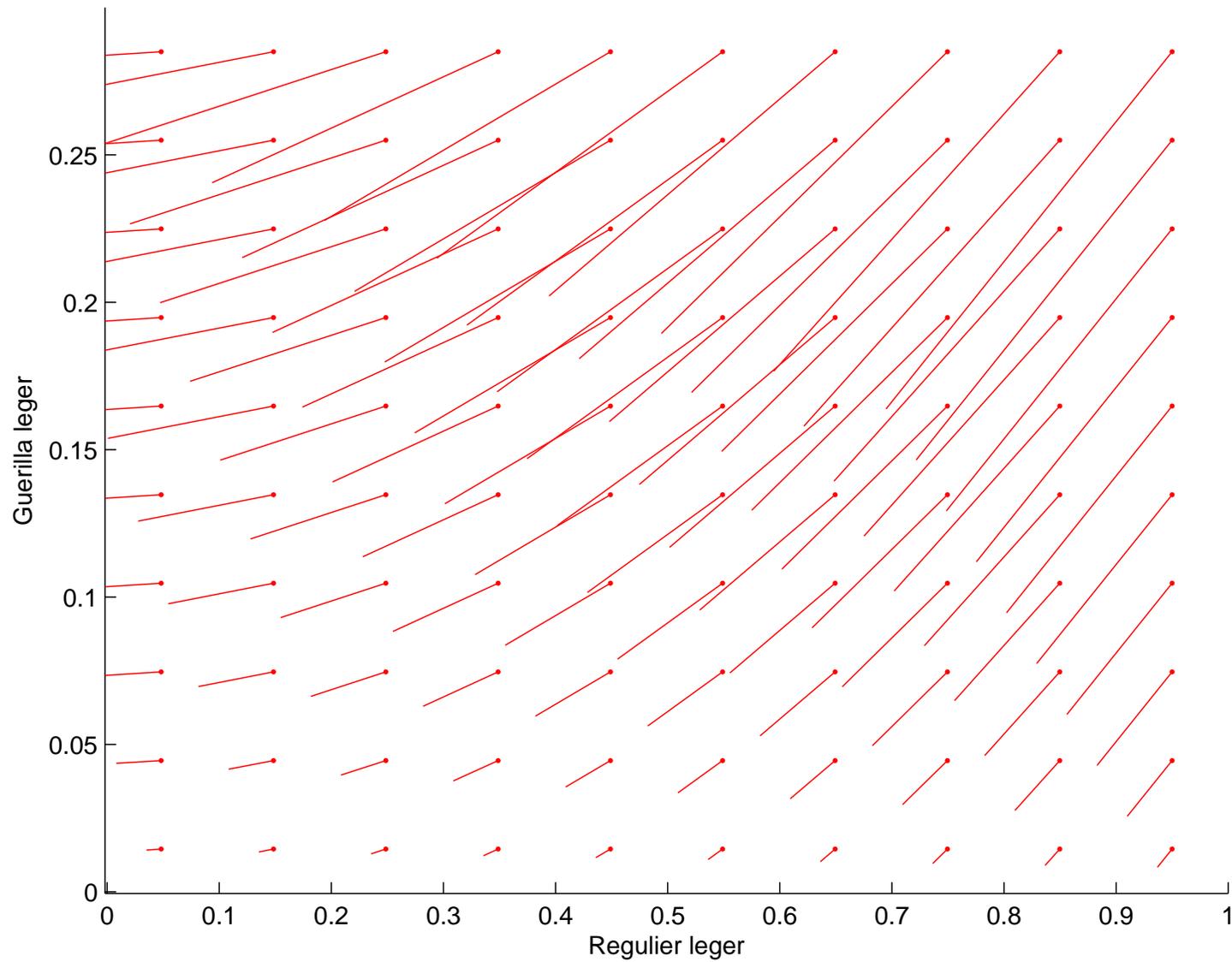
$$\begin{cases} x' = -\alpha y = y (-\alpha) \\ y' = -\beta x y = y (-\beta x) \end{cases}$$

Met $F(x, y) = \alpha y - \frac{1}{2} \beta x^2$ en $h(x, y) = y$ is

$$\text{grad}(F) = \left(\frac{g}{h}, -\frac{f}{h} \right) = (-\beta x, \alpha).$$

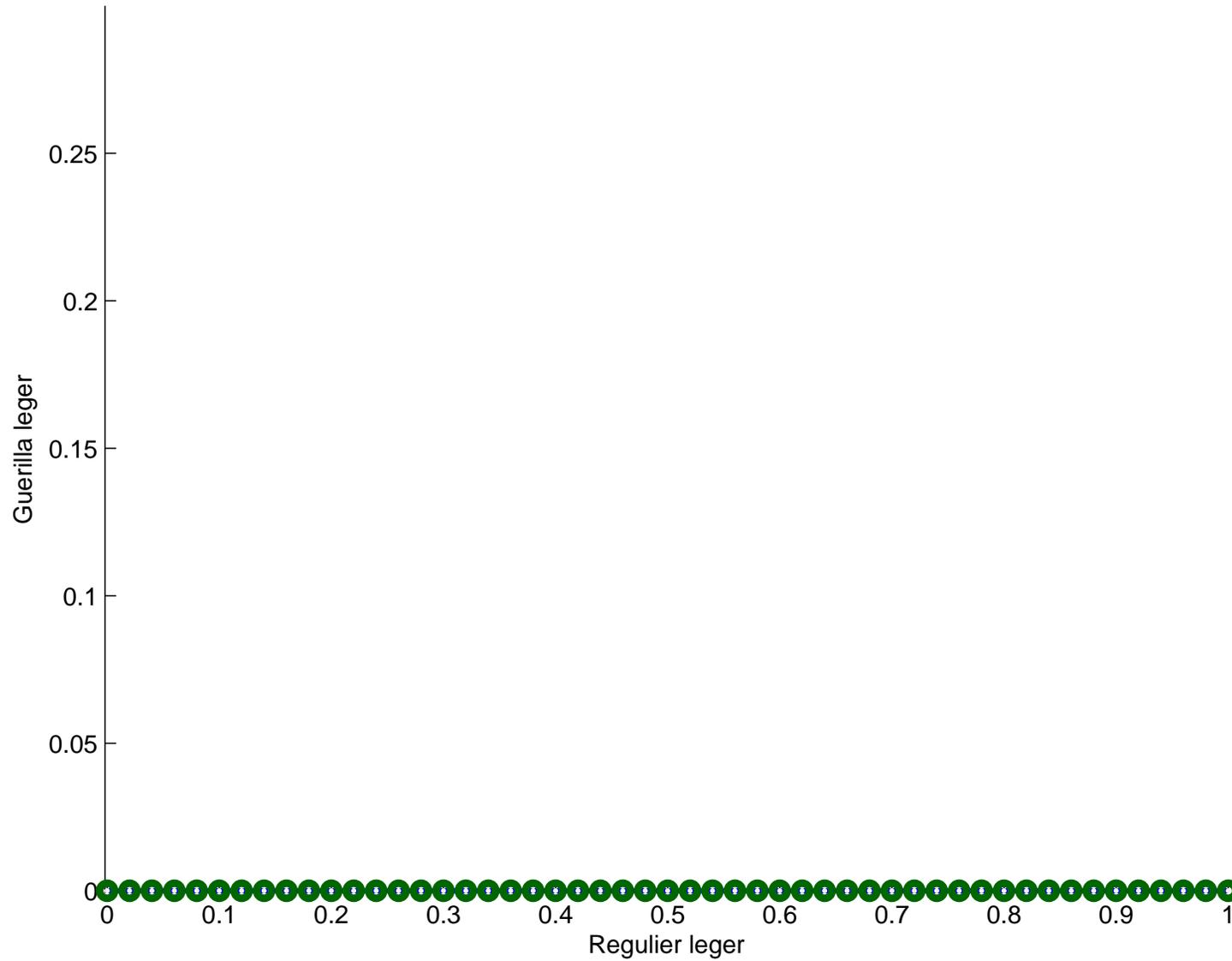
$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = -0.5xy \end{cases}$$

Guerilla oorlog: $f = -\rho y$ $g = -\beta xy$ met $\rho=1$, $\beta=0.5$



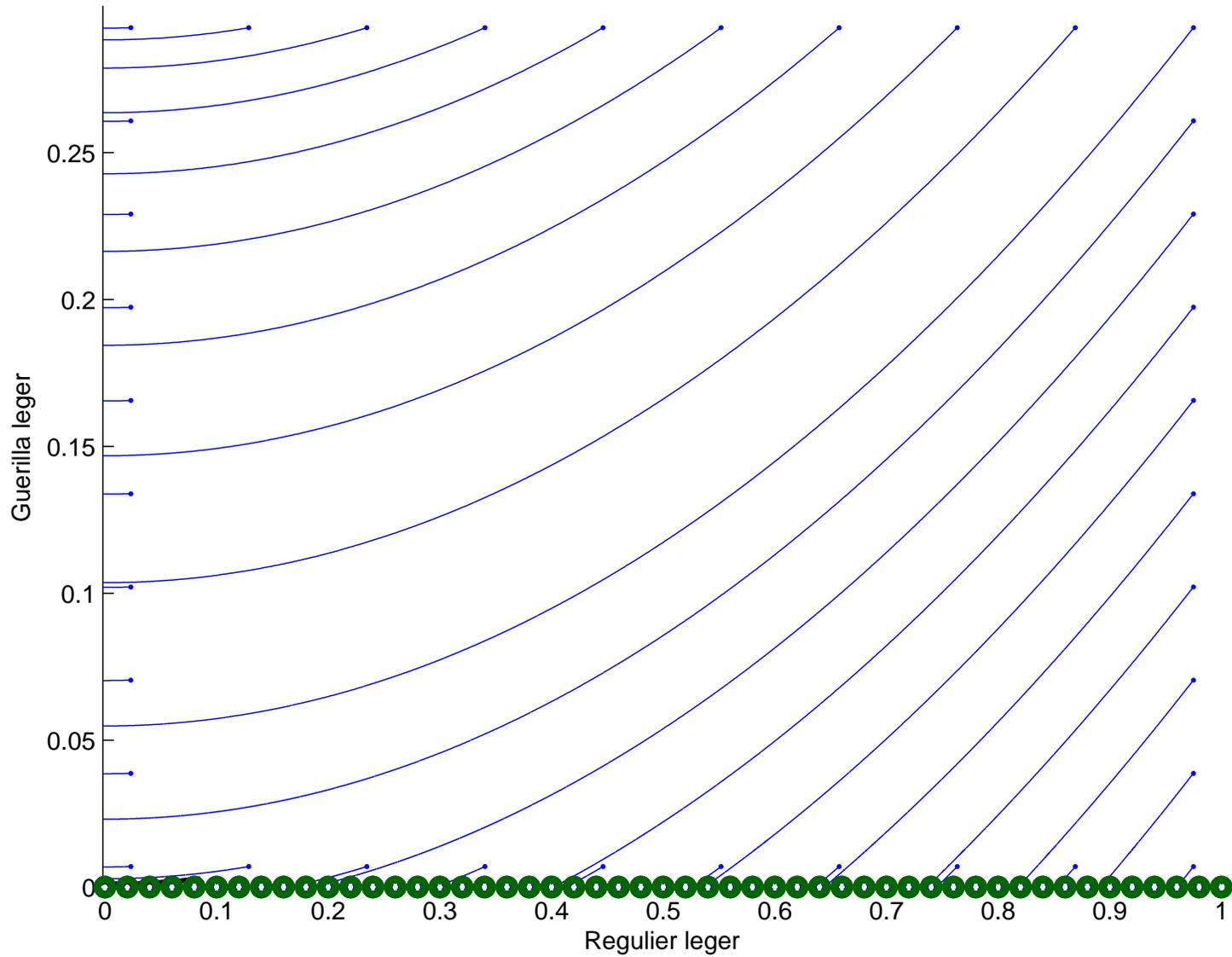
$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = -0.5xy \end{cases}$$

Guerilla oorlog: $f=-\rho y$ $g=-\beta xy$ met $\rho=1$, $\beta=0.5$



$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = -0.5xy \end{cases}$$

Guerilla oorlog: $f=-\rho y$ $g=-\beta xy$ met $\rho=1$, $\beta=0.5$



Epidemie

$x(t)$ is het deel van de bevolking dat op tijdstip t vatbaar is voor de ziekte maar niet ziek is, $y(t)$ is het deel dat ziek is.

Aanname:

- Mensen die genezen zijn immuun en niet meer besmettelijk.
- Zieken zijn onmiddellijk besmettelijk.
- Het aantal mensen dat per tijdseenheid geneest of sterft is een vast deel van het aantal zieke mensen.
- Het aantal mensen verandert alleen door bezwijken aan de ziekte.

Model. Voor zekere $\rho, \gamma > 0$ geldt

$$\begin{cases} x' = -\rho x y, \\ y' = \rho x y - \gamma y. \end{cases}$$

Bijzonderheid. $(\alpha, 0)$ evenwicht voor alle α .

Voorbeeld [Epidemie]

$$\begin{cases} x' = -x y, \\ y' = x y - \frac{1}{2} y. \end{cases}$$

Voorbeeld [Epidemie]

$$\begin{cases} x' = -x y, \\ y' = x y - \frac{1}{2} y. \end{cases}$$

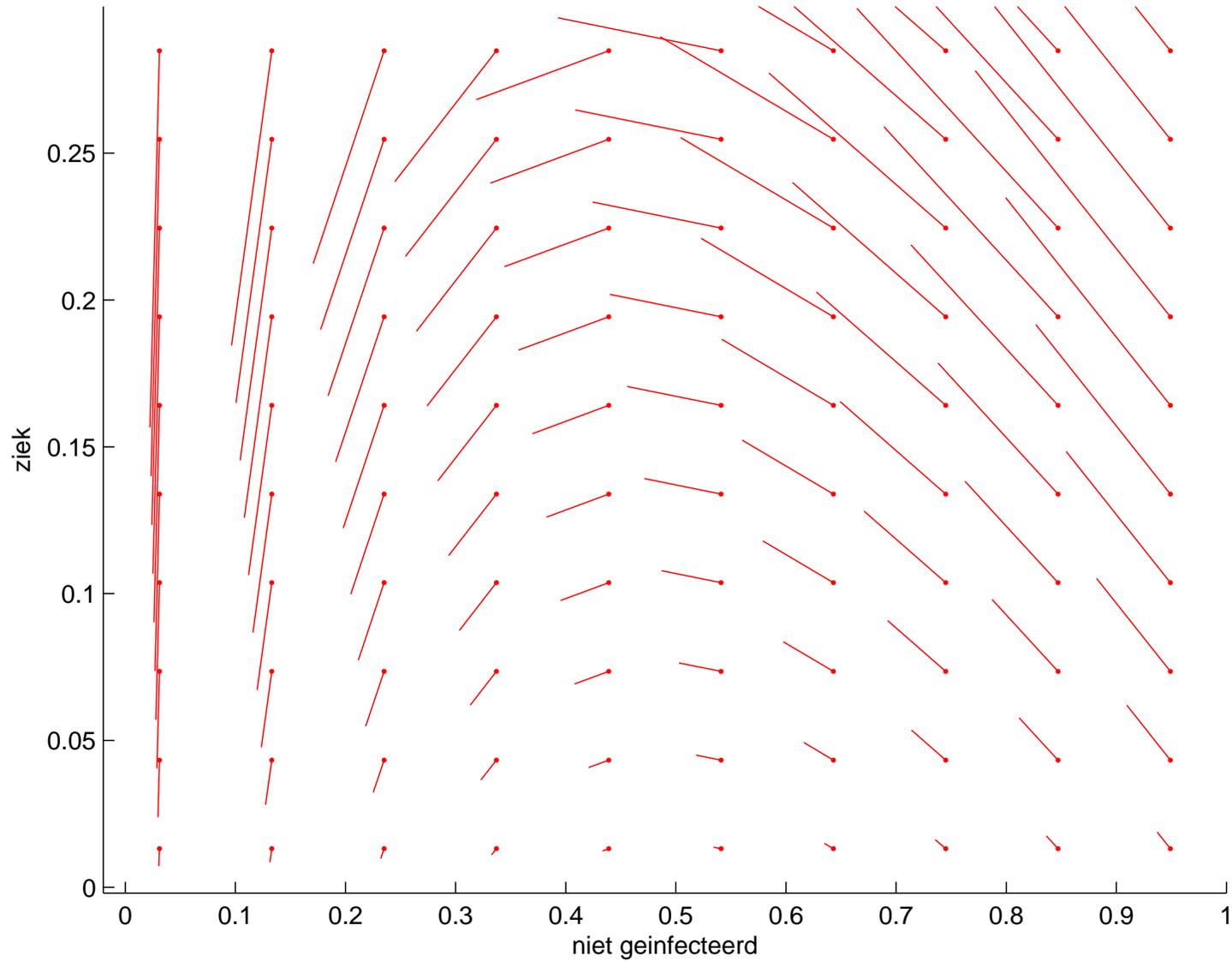
$$\begin{cases} x' = -x y = x y(-1) \\ y' = x y - \frac{1}{2} y = x y(1 - \frac{1}{2x}). \end{cases}$$

Neem $F(x, y) = y + x - \frac{1}{2} \ln(x)$, en

$$h(x, y) = x y.$$

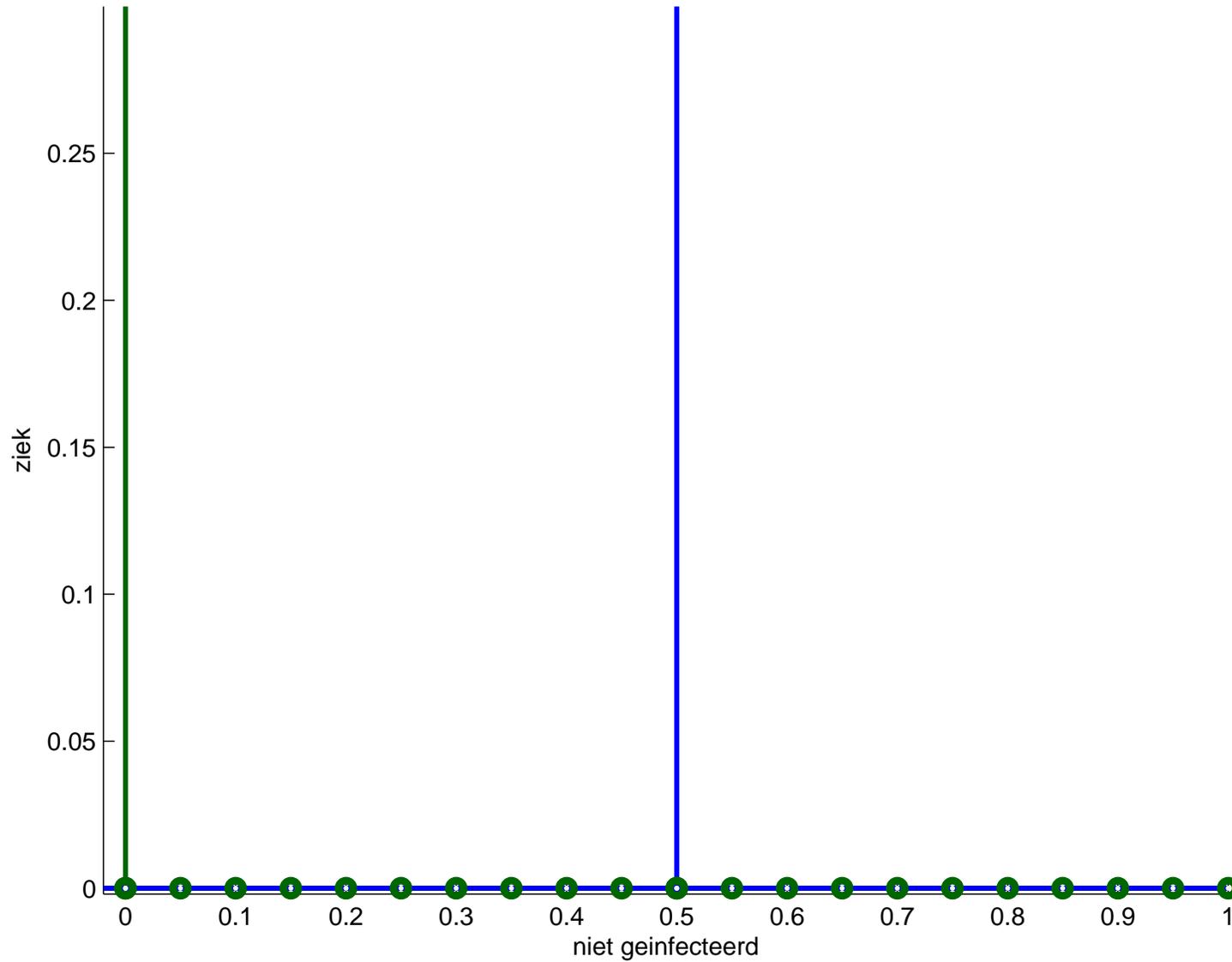
$$\begin{cases} x' = -xy \\ y' = xy - \frac{1}{2}y \end{cases}$$

Epidemie: $f=rx$ $g=(rx-b)y$ met $r=1$, $b=0.5$



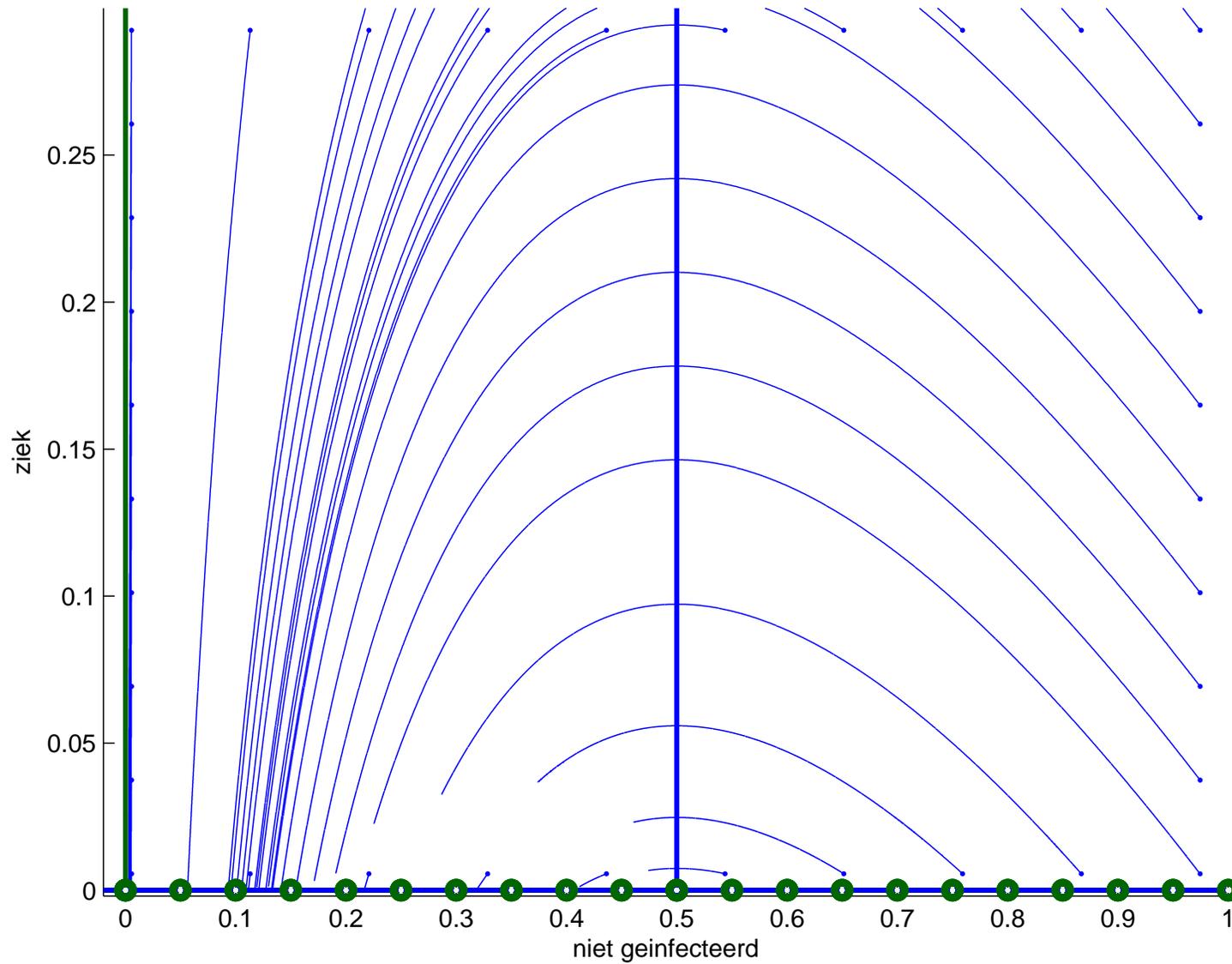
$$\begin{cases} x' = -xy \\ y' = xy - \frac{1}{2}y \end{cases}$$

Epidemie: $f=rx$ $g=(rx-b)y$ met $r=1$, $b=0.5$



$$\begin{cases} x' = -xy \\ y' = xy - \frac{1}{2}y \end{cases}$$

Epidemie: $f=rx$ $g=(rx-b)y$ met $r=1$, $b=0.5$



Voorbeeld [Epidemie]

$$\begin{cases} x' = -x y, \\ y' = x y - \frac{1}{2} y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = -x y = x y(-1) \\ y' = x y - \frac{1}{2} y = x y(1 - \frac{1}{2x}). \end{cases}$$

Neem $F(x, y) = y + x - \frac{1}{2} \ln(x)$, en

$$h(x, y) = xy.$$

Als 90% van de bevolking vatbaar is, hoe groot is het deel van de bevolking maximaal dat ziek is op hetzelfde moment?

Voorbeeld [Epidemie]

$$\begin{cases} x' = -x y, \\ y' = x y - \frac{1}{2} y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = -x y = x y(-1) \\ y' = x y - \frac{1}{2} y = x y(1 - \frac{1}{2x}). \end{cases}$$

Neem $F(x, y) = y + x - \frac{1}{2} \ln(x)$, en

$$h(x, y) = xy.$$

$x(0) = 0.9$. Bereken $\max y(t)$.

$y = C - x + \frac{1}{2} \ln(x)$ voor een zekere C .

Op tijdstip $t = 0$ is $y = 0$ en $x = 0.9$. Dus $C = 0 + 0.9 - \frac{1}{2} \ln(0.9)$.

y maximaal als $\frac{dy}{dx} = 0$. Dus als $\frac{dy}{dx} = -1 + \frac{1}{2x} = 0$.

Dus y is maximaal als $x = 0.5$.

Dan is y gelijk aan $0.9 - \frac{1}{2} \ln(0.9) - 0.5 + \frac{1}{2} \ln(0.5)$.

Brandnetels

In een zeker gebied is $x(t)$ de gemiddelde hoeveelheid brandnetel op tijdstip t en $y(t)$ de gemiddelde hoeveelheid giftige stof in de bodem die door de brandnetels zelf geproduceerd is.

Aanname:

- De groei van de brandnetels wordt geremd door zijn eigen gif met een evenredigheidsconstante c .
- In de grond wordt het gif met constante snelheid κ afgebroken.

Model. Voor zekere $a, b > 0$ geldt

$$\begin{cases} x'(t) = (a - cy(t))x(t) \\ y'(t) = bx(t) - K(y(t)), \end{cases} \text{ waarbij } K(y) = \begin{cases} \kappa & \text{als } y > 0 \\ 0 & \text{als } y = 0. \end{cases}$$

Bijzonderheid. K hangt niet continu van y af.

Voorbeeld [Brandnetels]

$$\begin{cases} x' = (2 - y) x \\ y' = 2x - K(y) \end{cases} \quad \text{met} \quad K(y) = \begin{cases} 2 & \text{als } y > 0 \\ 0 & \text{als } y = 0. \end{cases}$$

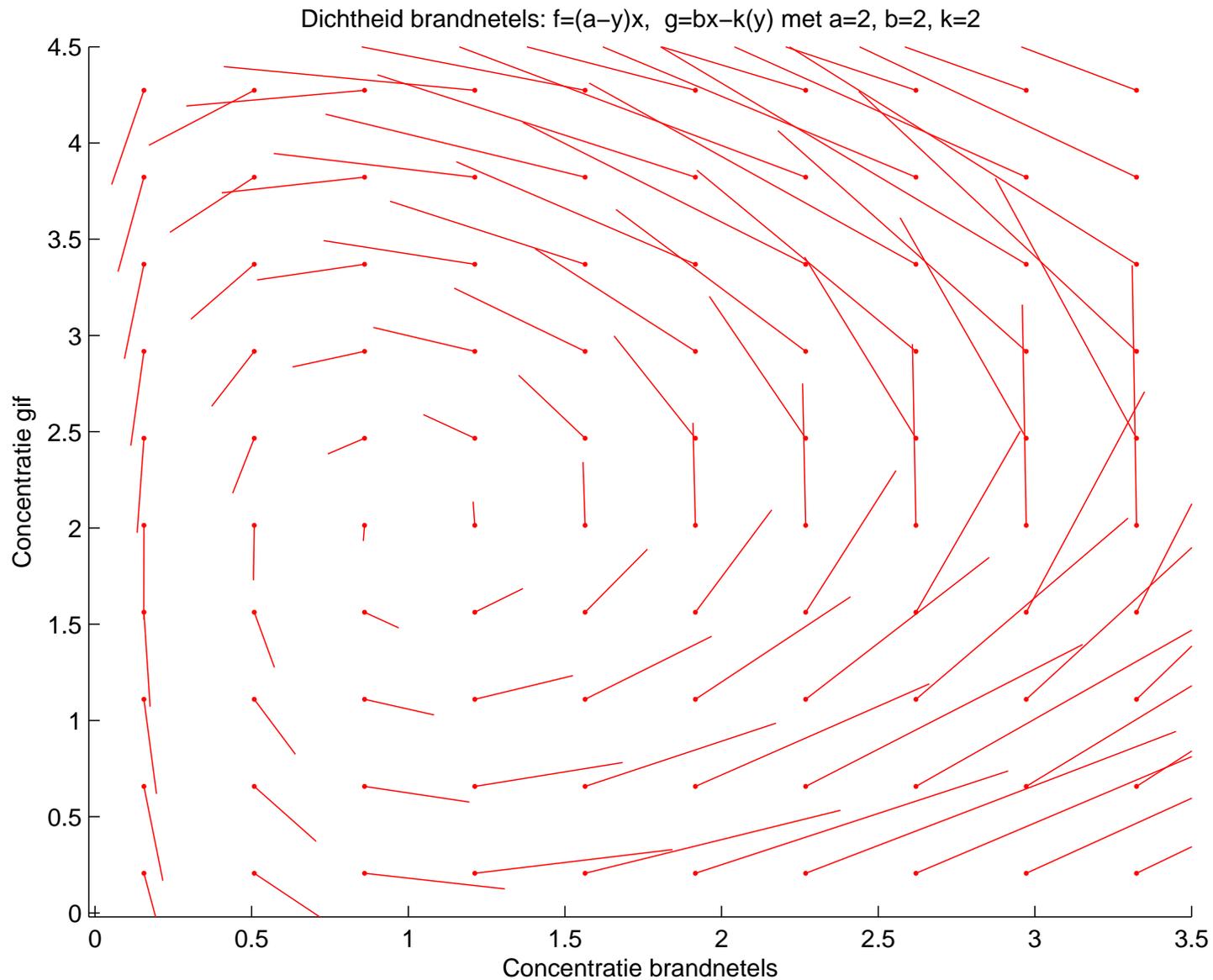
Voorbeeld [Brandnetels]

$$\begin{cases} x' = (2 - y)x \\ y' = 2x - K(y) \end{cases} \quad \text{met} \quad K(y) = \begin{cases} 2 & \text{als } y > 0 \\ 0 & \text{als } y = 0. \end{cases}$$

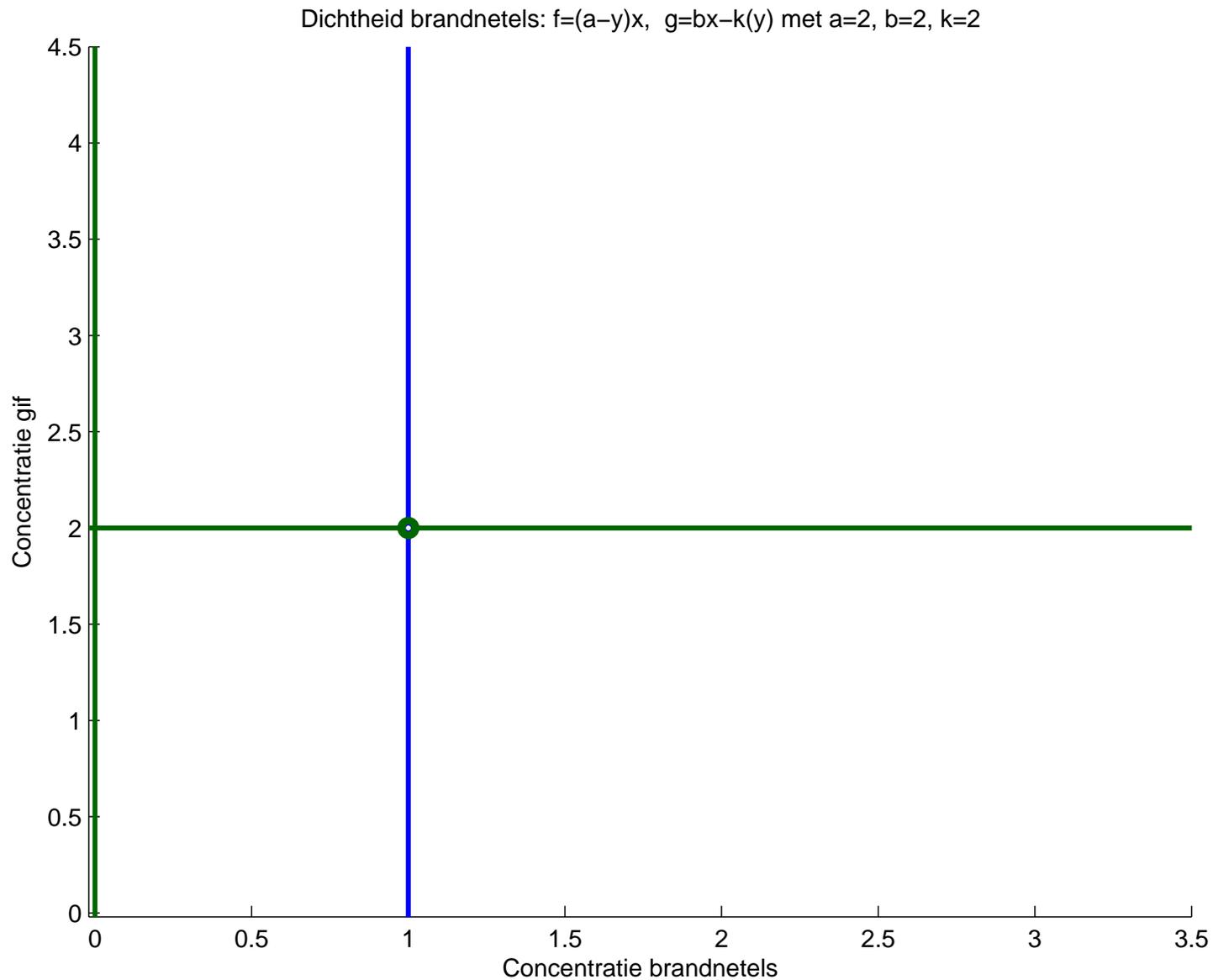
$$\begin{cases} x' = (2 - y)x = x(2 - y) \\ y' = 2x - 2 = x\left(2 - \frac{2}{x}\right) \end{cases}$$

Neem $F(x, y) = -2y + \frac{1}{2}y^2 + 2x - 2 \ln(x)$, en
 $h(x, y) = x$.

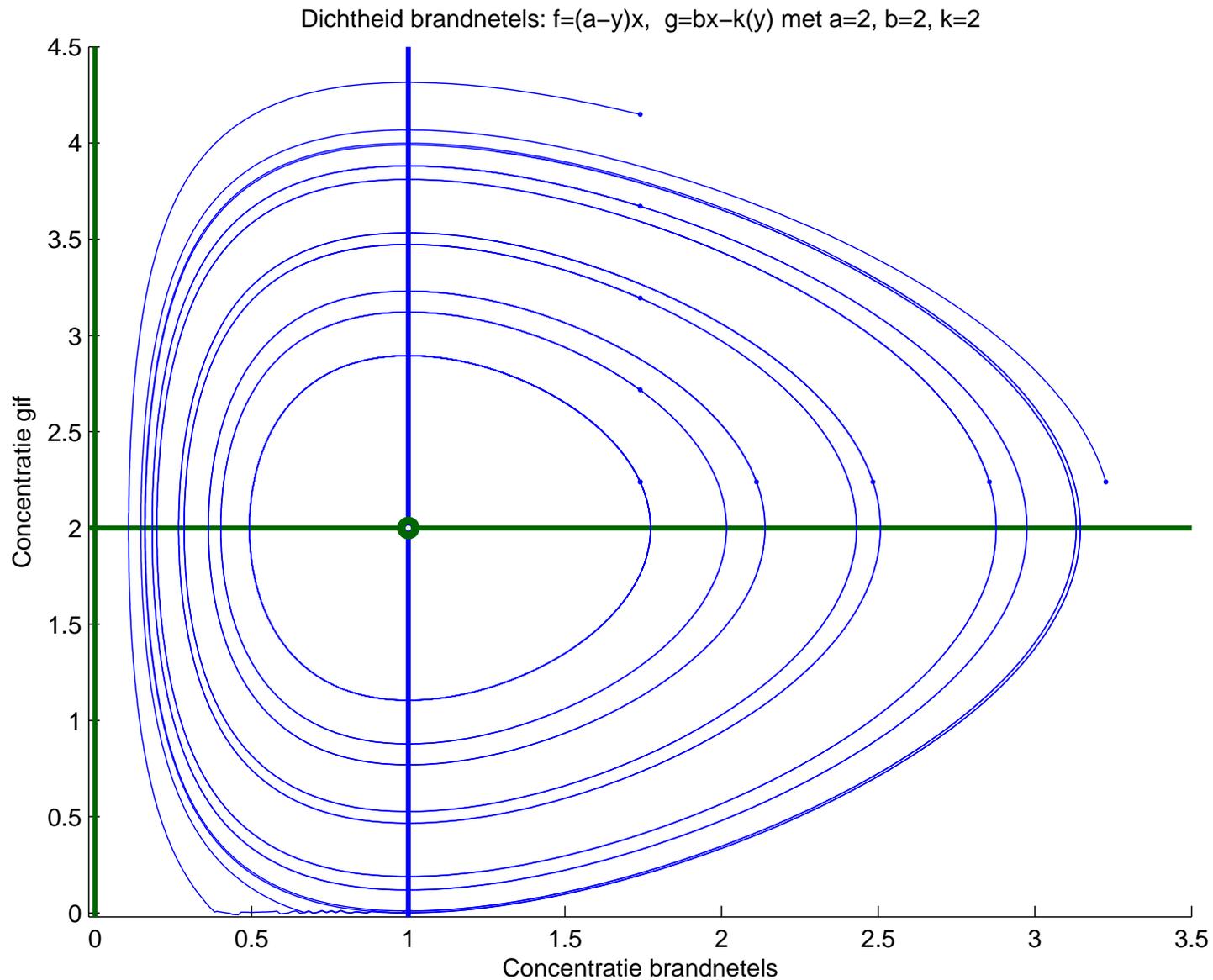
$$\begin{cases} x' = (2 - y)x \\ y' = 2x - K(y) \end{cases} \quad \text{met} \quad K(y) = \begin{cases} 2 & \text{als } y > 0 \\ 0 & \text{als } y = 0. \end{cases}$$



$$\begin{cases} x' = (2 - y) x \\ y' = 2x - K(y) \end{cases} \quad \text{met} \quad K(y) = \begin{cases} 2 & \text{als } y > 0 \\ 0 & \text{als } y = 0. \end{cases}$$



$$\begin{cases} x' = (2 - y)x \\ y' = 2x - K(y) \end{cases} \quad \text{met} \quad K(y) = \begin{cases} 2 & \text{als } y > 0 \\ 0 & \text{als } y = 0. \end{cases}$$



Voorbeeld [Lotka-Volterra]

$$\begin{cases} x' = (2 - y) x \\ y' = (-1 + x) y \end{cases}$$

Voorbeeld [Lotka-Volterra]

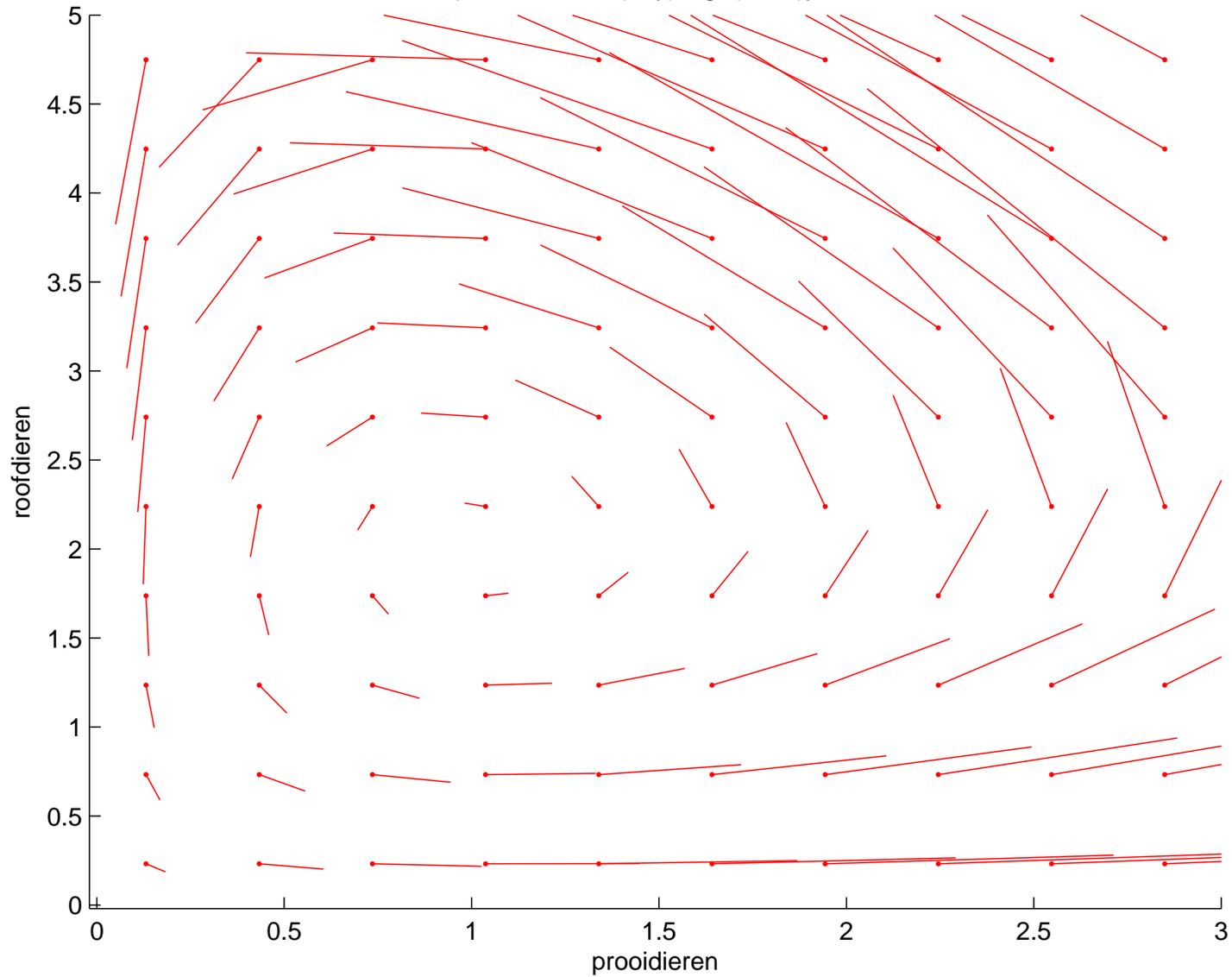
$$\begin{cases} x' = (2 - y) x \\ y' = (-1 + x) y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = (2 - y) x = xy \left(\frac{2}{y} - 1 \right) \\ y' = (-1 + x) y = xy \left(-\frac{1}{x} + 1 \right) \end{cases}$$

Neem $F(x, y) = -2 \ln(y) + y - \ln(x) + x$ en
 $h(x, y) = xy$.

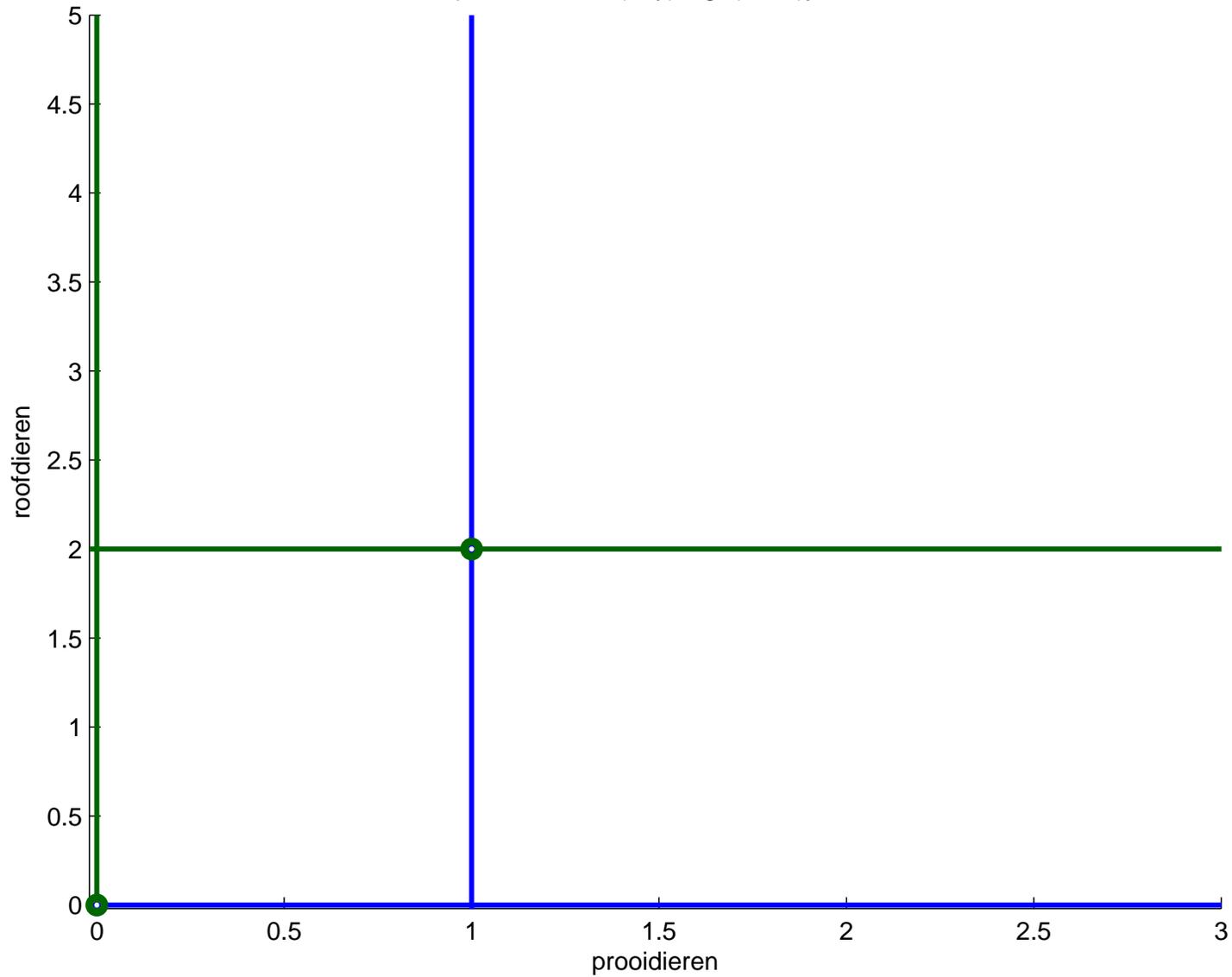
$$\begin{cases} x' = (2 - y)x \\ y' = (-1 + x)y \end{cases}$$

Roof-prooidieren: $f=(a-y)x$, $g=(-1+x)y$ met $a=2$.



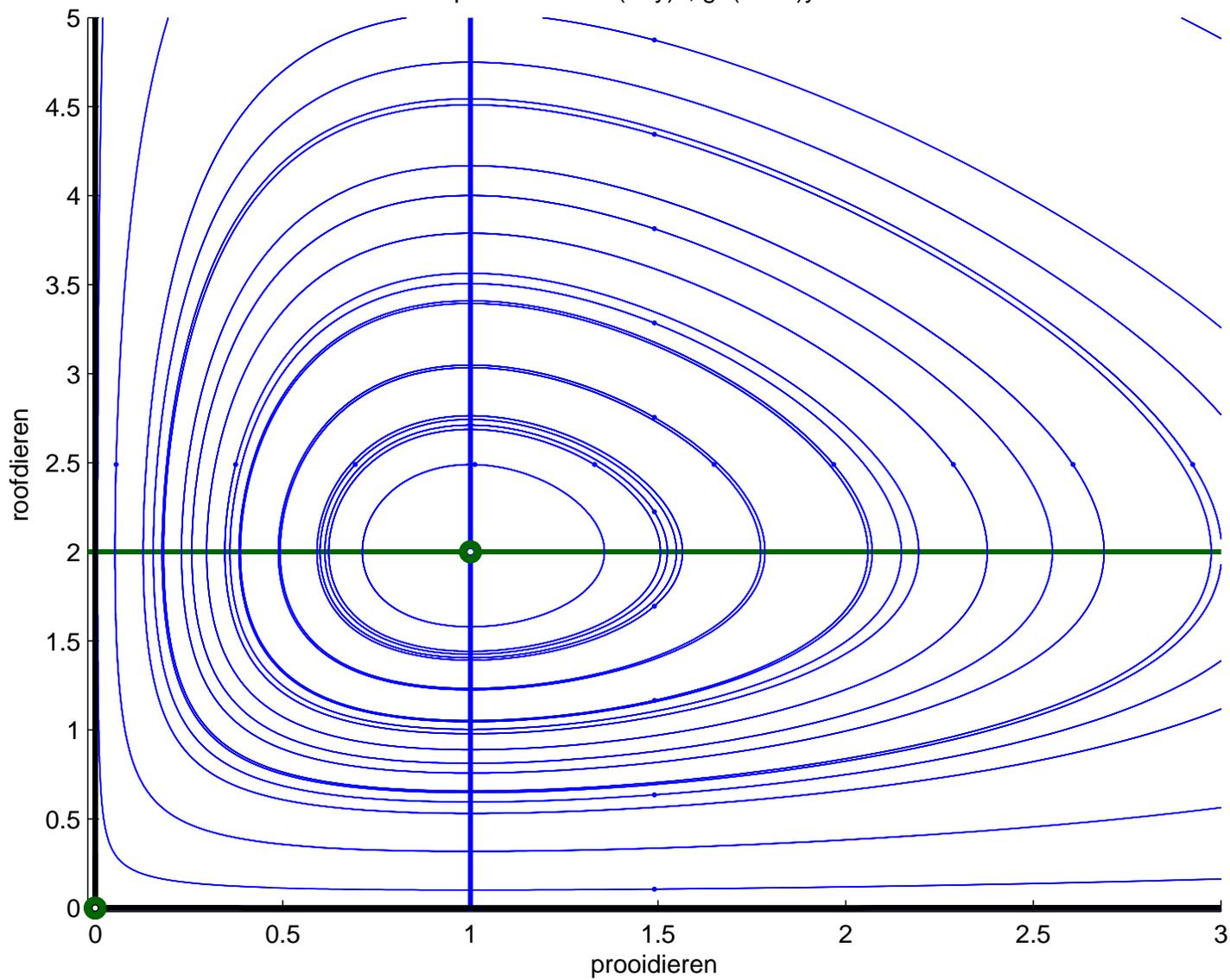
$$\begin{cases} x' = (2 - y) x \\ y' = (-1 + x) y \end{cases}$$

Roof-prooidieren: $f=(a-y)x$, $g=(-1+x)y$ met $a=2$.



$$\begin{cases} x' = (2 - y)x \\ y' = (-1 + x)y \end{cases}$$

Roof-prooidieren: $f=(a-y)x$, $g=(-1+x)y$ met $a=2$.



Voorbeeld [Roof-prooidier]

$$\begin{cases} x' = (2 - x - y) x \\ y' = (-1 + x) y \end{cases}$$

Voorbeeld [Roof-prooidier]

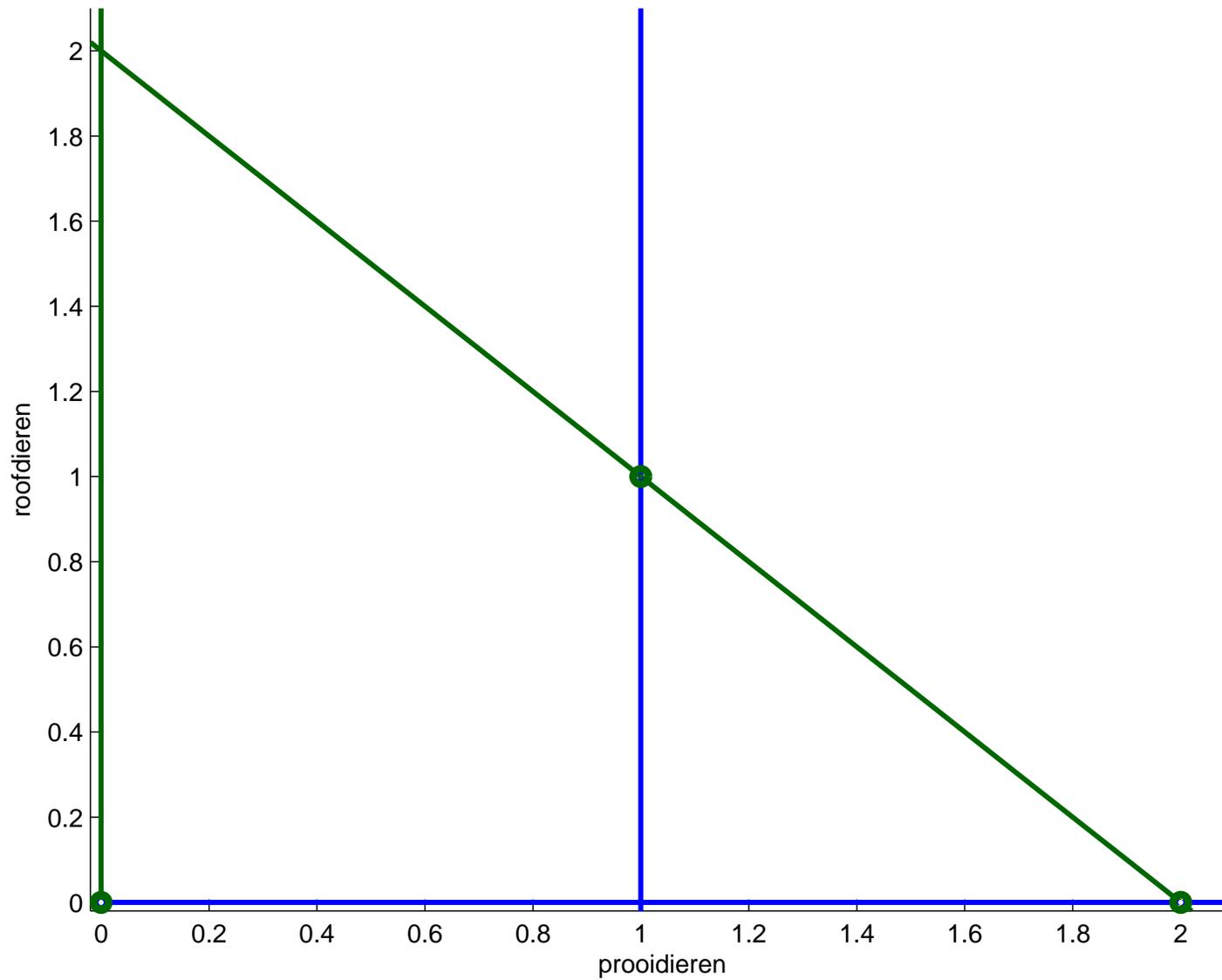
$$\begin{cases} x' = (2 - x - y) x \\ y' = (-1 + x) y \end{cases}$$

Met $F(x, y) = ???$ en $h(x, y) = ???$ is

$$\text{grad}(F) = \left(\frac{g}{h}, -\frac{f}{h} \right)$$

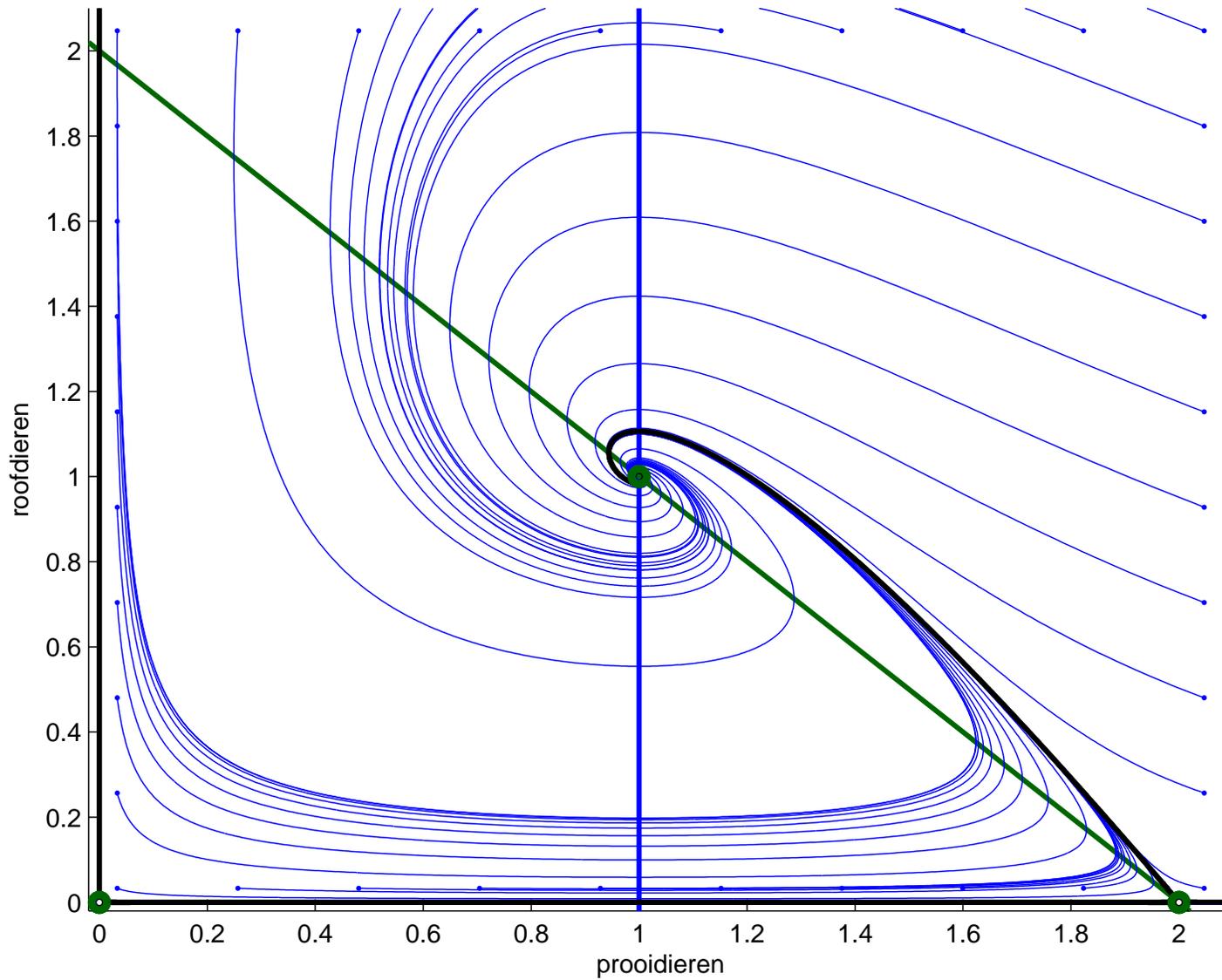
$$\begin{cases} x' = (2 - x - y) x \\ y' = (-1 + x) y \end{cases}$$

Roof-prooidieren: $f=(a-x-y)x$, $g=(-1+x)y$ met $a=2$.



$$\begin{cases} x' = (2 - x - y)x \\ y' = (-1 + x)y \end{cases}$$

Roof-prooidieren: $f=(a-x-y)x$, $g=(-1+x)y$ met $a=2$.



Voorbeeld [Gedempte slinger] $\phi'' = -\mu \sin \phi$.

Neem $y = \phi$ en $x = \phi'$. Dan

$$\begin{cases} x' = -2\rho x - \nu^2 \sin(y) \\ y' = x \end{cases}$$

Voorbeeld [Gedempte slinger] $\phi'' = -\mu \sin \phi$.

Neem $y = \phi$ en $x = \phi'$. Dan

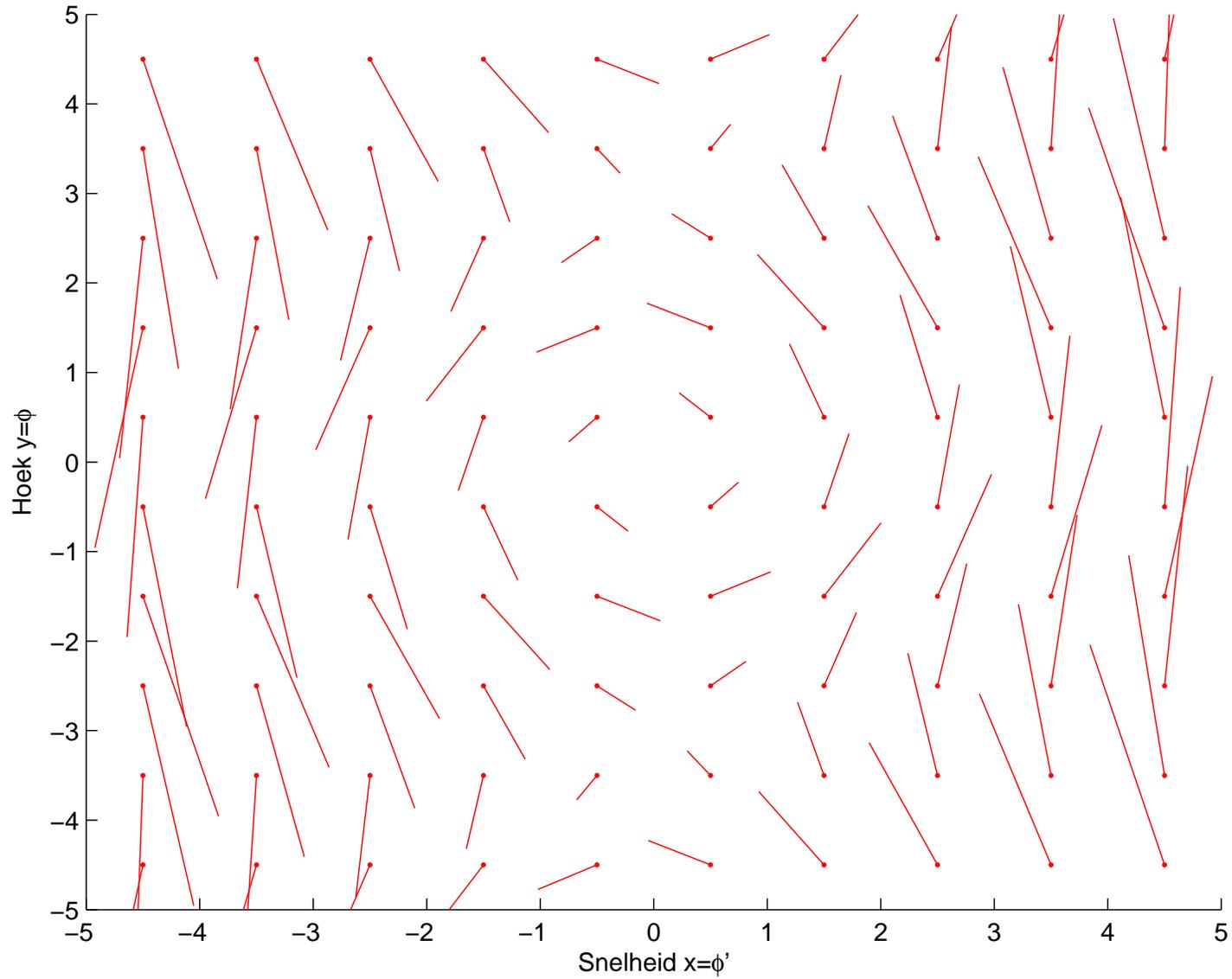
$$\begin{cases} x' = -2\rho x - \nu^2 \sin(y) \\ y' = x \end{cases}$$

Met $F(x, y) = ???$ en $h(x, y) = ???$ is

$$\text{grad}(F) = \left(\frac{g}{h}, -\frac{f}{h} \right)$$

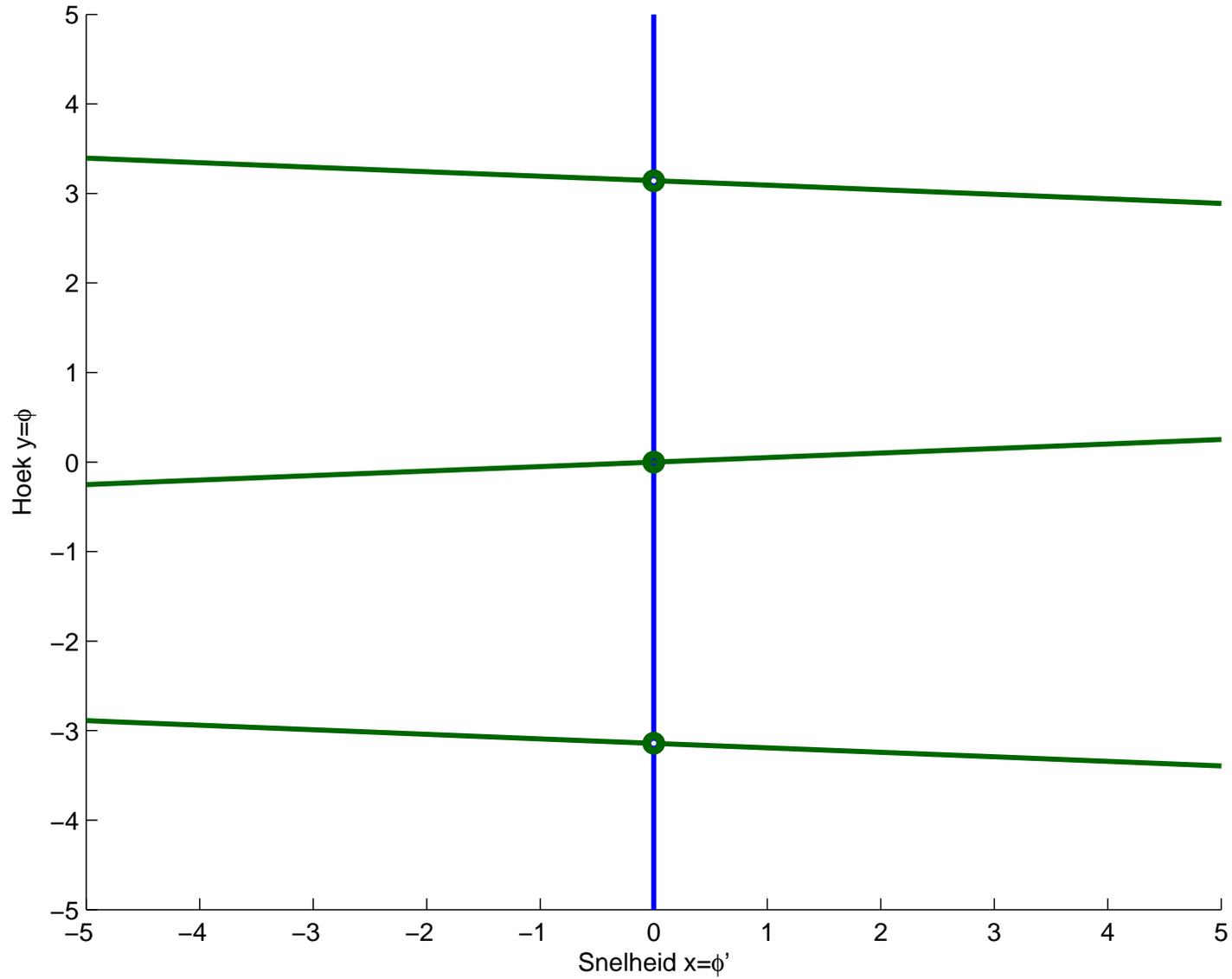
$$\begin{cases} x' = -0.01x - \sin(y) \\ y' = x \end{cases}$$

Slinger: $f = -\rho x - v \sin y$, $g = x$ met $\rho = 0.05$, $v = 1$



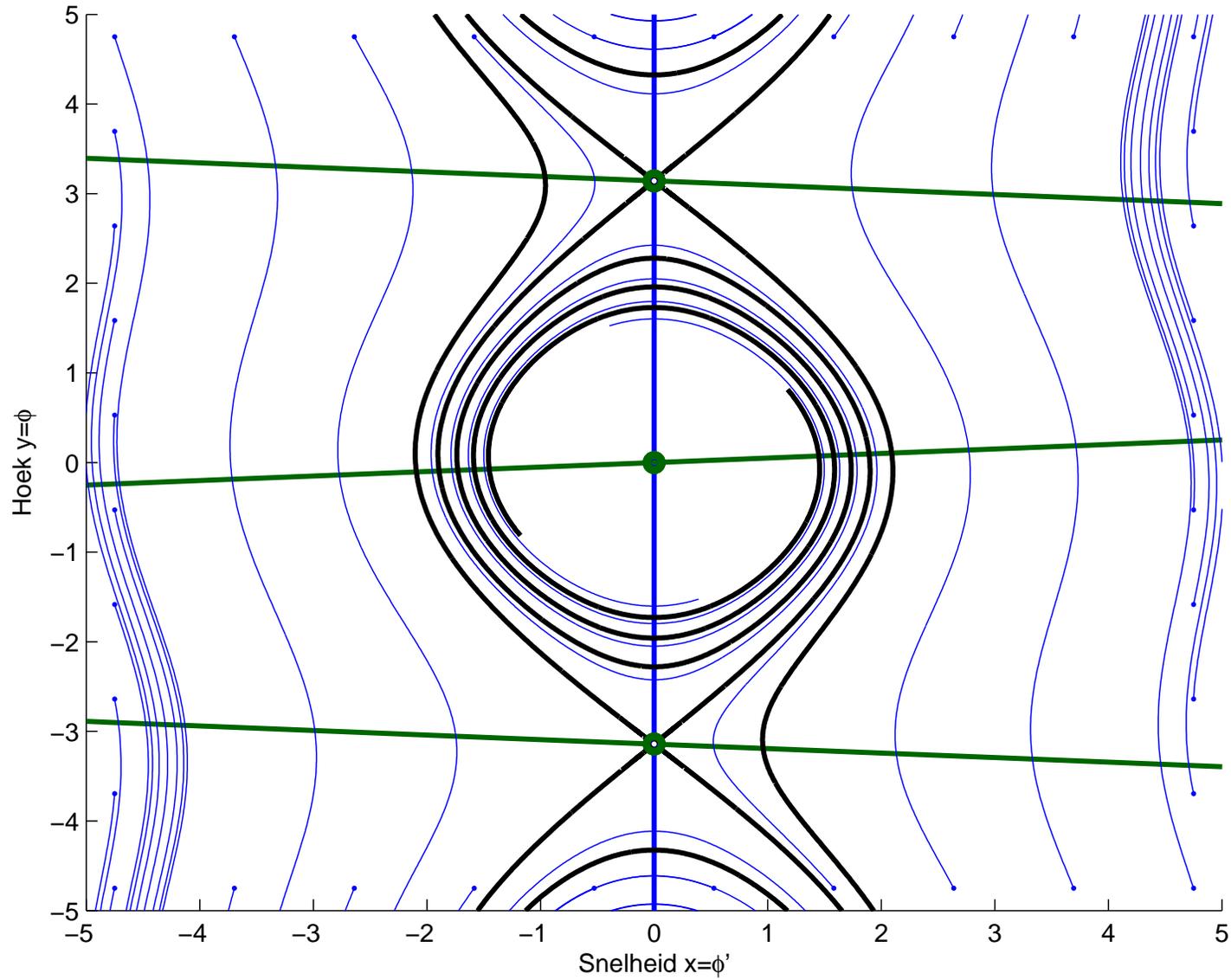
$$\begin{cases} x' = -0.01x - \sin(y) \\ y' = x \end{cases}$$

Slinger: $f = -\rho x - v \sin y$, $g = x$ met $\rho = 0.05$, $v = 1$



$$\begin{cases} x' = -0.01x - \sin(y) \\ y' = x \end{cases}$$

Slinger: $f = -\rho x - v \sin y$, $g = x$ met $\rho = 0.05$, $v = 1$



Hamilton systemen

Voordelen.

- Theorie geeft een '**globale**' uitspraak over de oplossing: het geeft een uitdrukking voor $y = y(t)$ in termen van $x(t)$ voor iedere oplossing $t \rightsquigarrow (x(t), y(t))$. (De analyse via lineairisatie in het evenwicht geeft maar alleen uitspraken in de buurt van het evenwicht).
- Geeft een (exacte) **analytische formule** waaraan de oplossingen voldoen (lineairisatie geeft alleen benaderende oplossingen).
- Geeft exacte uitspraken voor 'centrumpuntachtige' oplossingen (situaties waarin de hogere orde termen in het lineairisatie proces precies niet verwaarloosd mogen worden).
- Komen in de 'natuur' nogal eens voor. De bewering, 'de oplossingskrommen voldoen aan $F(x(t), y(t)) = C$ voor alle t ' verwoordt vaak een **behoudswet** (behoud van energie, **bv** voor de slinger is $\frac{1}{2} m (\phi')^2$ de kinetische energy en $\ell \cos(\phi)$ de potentiële).

Nadelen.

- Komen welliswaar in de 'natuur' nogal eens voor, maar dan wel vooral in 'model' situaties (met centrumpunt achtige evenwichten).
- De relatie waaraan de oplossing voldoet ($F(x, y) = C$) geeft geen informatie over de tijdsafhankelijkheid.

Program

- Niet-lineaire continue modellen
- Evenwicht
- Stabiliteit
- Lineairiseren rond het evenwicht
- Voorbeelden: concurrentie
- Voorbeelden: roof-prooi dier
- Chaos
- Hamilton systemen
- Voorbeelden van Hamilton systemen
- Tot slot

Analyseren/oplossen dvg

Doel:

- **Inzicht** in

- het gedrag van de oplossing (dalend, stijgend, fluctuerend)
- hoe de oplossing reageert op verstoringen
- hoe de oplossing afhangt van parameters

Van belang in onderzoek

- **Numerieke waarden** (grafieken, animaties)

Van belang in techniek (ontwerp) en beleid

- **Een combinatie**

In onderzoek

In techniek

*“The purpose of computing
is insight not numbers”*

R.W. Hamming 1962

Aanpak

Als functie van de tijd: $t \rightsquigarrow x_i(t)$, $t \rightsquigarrow \phi^{(i)}(t)$

- **Analystisch** Geeft **alle** oplossingen **exact**
Zelden mogelijk of de oplossing is gecompliceerd
en inzicht vergt alsnog extra analyse
- **Numeriek** Geeft de gezochte oplossing **nauwkeurig**,
Geeft alleen de **gezochte** oplossing
Welke oplossing zoeken we?

Fase portret: x_i als functie van x_1 , $\phi^{(i)}$ als functie van ϕ
voor autonome dvg met glad richtingsveld

- **Schets richtingsveld** Geeft globaal een globaal beeld
Werkt alleen voor 2-d problemen
Is niet altijd nauwkeurig genoeg
- **Linearizeer in evenwicht** Nauwkeurig in buurt van evenwicht
Geen info elders
- **Hamilton systeem** Geeft alle oplossingskromme exact
Zelden mogelijk (alleen voor 2n-d en
typisch alleen voor spoor = 0 of det = 0)

Combinaties

Continue modellen: Wat er te doen is

○ Lineaire problemen

- homogeen met constante coëfficiënten: $\mathbf{x}' = \mathbf{A} \mathbf{x}$,

- inhomogeen met constante coëfficiënten:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t),$$

met variabele coëfficiënten: $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t)$.

○ Niet lineaire problemen

- autonome $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$,

niet autonome $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$.

Vertraagde differentiaalvergelijkingen

$$x'(t) = (2 - x(t)) x(t - 1).$$

- = uitgebreid behandeld
- = aandacht aan besteed
= niet gedaan.

Continue modellen: Wat er te doen is

Partiële differentiaalvergelijkingen

$u(t, x)$ hangt af van het tijdstip tijd t en de plaats x .

lineair
$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2u + a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

niet-lineair 1
$$\frac{\partial u}{\partial t} = (2 - u)u + a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

niet-lineair 2
$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Combinaties van alles & in meer dimensies

Numerieke methoden

Kies $h > 0$. In $t_{n+1} = t_n + h$

$$\mathbf{x}(t_{n+1}) \approx \mathbf{x}(t_n) + h \mathbf{f}(t_n, \mathbf{x}(t_n)).$$