Utrecht, 13 juni 2013

Modellen en Simulatie
Lineare Programmering

Gerard Sleijpen

Universiteit Utrecht
Department of Mathematics

http://www.staff.science.uu.nl/~sleij101/

Program

- Optimaliseren
- Lineaire programmering
- Voorbeelden
- Polytopen
- Intermezzo: rang
- Intermezzo: notatie
- Hoekpunten
- Intermezzo: vegen
- Standaard vorm
- Simplex methode
- Positiviteitsristricties
- Het eerste hoekpunt

Program

- Optimaliseren
- Lineaire programmering
- Voorbeelden
- Polytopen
- Intermezzo: rang
- Intermezzo: notatie
- Hoekpunten
- Intermezzo: vegen
- Standaard vorm
- Simplex methode
- Positiviteitsristricties
- Het eerste hoekpunt

Optimaliseren

$\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbf{f} : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$.

Probleem. Vind $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{V}$ zo dat $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \geq \mathbf{f}(\mathbf{x})$ voor alle $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$.

Optimaliseren

$\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbf{f} : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$.

Probleem. Vind $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{V}$ zo dat $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \geq \mathbf{f}(\mathbf{x})$ voor alle $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$.

Voorbeeld. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continu differentieerbaar.

Dan $\quad x \in \{a, b\} \quad$ of $\quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = 0$

Optimaliseren

$\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbf{f} : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$.

Probleem. Vind $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{V}$ zo dat $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \geq \mathbf{f}(\mathbf{x})$ voor alle $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$.

Voorbeeld. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continu differentieerbaar.

Dan $\qquad x \in \{a, b\} \qquad$ of $\qquad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = 0$

Oplosmethode.

1) Gebruik Newton om de nulpunten x_i van f' te bepalen
2) Vind maximum: vergelijk $f(x_i)$, $f(a)$, $f(b)$.

Optimaliseren

$\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbf{f} : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$.

Probleem. Vind $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{V}$ zo dat $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \geq \mathbf{f}(\mathbf{x})$ voor alle $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$.

Voorbeeld. $n > 1$.
1) Vind nulpunten van

$$\mathbf{F} \equiv \mathbf{D}\,\mathbf{f} \equiv \mathrm{grad}(\mathbf{f}) \equiv \left(\frac{\partial\,\mathbf{f}}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial\,\mathbf{f}}{\partial x_n}\right)^{\mathsf{T}} : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^n$$

Gebruik Newton: $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - (\mathbf{DF}(\mathbf{x}_n))^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}_n)$

met $$\mathbf{DF} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{F}_n}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial \mathbf{F}_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2\,\mathbf{f}}{\partial x_1\,\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial^2\,\mathbf{f}}{\partial x_n\,\partial x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2\,\mathbf{f}}{\partial x_1\,\partial x_n} & \ldots & \frac{\partial^2\,\mathbf{f}}{\partial x_n\,\partial x_n} \end{bmatrix}$$

2) Vergelijk $\mathbf{f}$ waarden in de gevonden $\mathbf{x}_i$ met die in de randpunten.

Newton

Voordelen. Snelle convergentie

Problemen.

1) Vindt geen randextrema
   (in hogere dimensies is de rand groot)

2) Kan "blijven hangen" in lokale extrema

3) Werkt alleen als $\mathbf{f}$ glad is
   (minimaal twee maal continu differentieerbaar).

4) De stappen zijn rekenintensief voor hogere dimensies

Newton

Voordelen. Snelle convergentie

Problemen.

1) Vindt geen randextrema
   (in hogere dimensies is de rand groot)
2) Kan "blijven hangen" in lokale extrema
3) Werkt alleen als **f** glad is
   (minimaal twee maal continu differentieerbaar).
4) De stappen zijn rekenintensief voor hogere dimensies

Vaak is er geen rand:

Voorbeeld. *Ladingsverdeling op een bol*
(minimale energie).

Program

- Optimaliseren
- Lineaire programmering
- Voorbeelden
- Polytopen
- Intermezzo: rang
- Intermezzo: notatie
- Hoekpunten
- Intermezzo: vegen
- Standaard vorm
- Simplex methode
- Positiviteitsristricties
- Het eerste hoekpunt

dagelijks kunnen verwerkt worden:

480 hammen (H), 400 pork bellies (B), 230 picnic hammen (P)
420 kunnen gerookt worden, en met overwerk nog eens 250

Winst per item (in dollars)

	vers	gerookt (regulier)	gerookt (overwerk)
H	8	14	11
B	4	12	7
P	4	13	9

Hoe kan in het totaal het meeste winst gemaakt worden?

dagelijks kunnen verwerkt worden:

480 hammen (H), 400 pork bellies (B), 230 picnic hammen (P)
420 kunnen gerookt worden, en met overwerk nog eens 250

Winst per item (in dollars)

	vers	gerookt (regulier)	gerookt (overwerk)
H	8	14	11
B	4	12	7
P	4	13	9

Dagelijkse aantallen (nog te bepalen onbekenden $x_1, \ldots, x_9$)

	vers	gerookt (regulier)	gerookt (overwerk)
H	x_1	x_2	x_3
B	x_4	x_5	x_6
P	x_7	x_8	x_9

Maximaliseer $\quad 8x_1 + 14x_2 + 11x_3 + 4x_4 + \ldots + 9x_9$
onder de beperkingen $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_9 \geq 0,$
$x_1 + x_2 + x_3 = 480,\ x_4 + x_5 + x_6 = 400,\ x_7 + x_8 + x_9 = 230$

$$x_2 + x_5 + x_8 \leq 420,\ x_3 + x_6 + x_9 \leq 250$$

Voorbeeld.

$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{c}^\top\mathbf{x}$ met $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ (**Lineaire vorm** op $\mathbb{R}^n$)

en $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}_i^\top\mathbf{x} \leq \beta_i$ voor $i = 1, \ldots, m\}$,

waarbij $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ en $\beta_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots .m)$.

Voorbeeld.

$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ met $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ (**Lineaire vorm** op $\mathbb{R}^n$)

en $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \le \beta_i$ voor $i = 1, \dots, m\}$,

waarbij $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ en $\beta_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots .m)$.

Getallenvoorbeeld. Met $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 8 \\ 14 \\ 11 \\ 4 \\ 12 \\ 7 \\ 4 \\ 13 \\ 9 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_9 \end{bmatrix}$

is $\mathbf{c}^\top \mathbf{x} = 8x_1 + 14x_2 + 11x_3 + 4x_4 + \dots + 9x_9$

Voorbeeld.

$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ met $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ (**Lineaire vorm** op $\mathbb{R}^n$)

en $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \leq \beta_i$ voor $i = 1, \ldots, m\}$,

waarbij $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ en $\beta_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots .m)$.

Getallenvoorbeeld.

Met $\mathbf{a}_1 = -\mathbf{e}_1 \equiv \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ en $\beta_1 = 0$,

is $\mathbf{a}_1^\top \mathbf{x} \leq \beta_1$ de ongelijkheid $x_1 \geq 0$.

Voorbeeld.

$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ met $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ (**Lineaire vorm** op $\mathbb{R}^n$)

en $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \leq \beta_i$ voor $i = 1, \ldots, m\}$,

waarbij $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ en $\beta_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots . m)$.

Getallenvoorbeeld.

Met $\mathbf{a}_{10} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $\beta_{10} = 480$, is $\begin{cases} \mathbf{a}_{10}^\top \mathbf{x} \leq \beta_{10} \\ -\mathbf{a}_{10}^\top \mathbf{x} \leq -\beta_{10} \end{cases}$

de gelijkheid $x_1 + x_2 + x_3 = 480$

Voorbeeld.

$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{c}^\top\mathbf{x}$ met $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ (**Lineaire vorm** op $\mathbb{R}^n$)

en $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}_i^\top\mathbf{x} \leq \beta_i$ voor $i = 1, \ldots, m\}$,

waarbij $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ en $\beta_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots . m)$.

Gewoonlijk maar een punt waarin $\mathbf{f}$ *maximaal is,* :-)
maar dat ligt op de rand van $\mathcal{V}$. :-(

Barrière invoeren? Inwendigpunt methode.

Voorbeeld.

$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{c}^\top\mathbf{x}$ met $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ (**Lineaire vorm** op $\mathbb{R}^n$)

en $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}_i^\top\mathbf{x} \leq \beta_i$ voor $i = 1, \ldots, m\}$,

waarbij $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ en $\beta_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots . m)$.

Lineair programmering. Los op

max $\mathbf{c}^\top\mathbf{x}$

zodat $\mathbf{a}_i^\top\mathbf{x} \leq \beta_i$ voor alle $i = 1, \ldots, m$.

Opmerking. Een aantal ongelijkheden mogen ook gelijkheden zijn (dus voor een aantal $i \in \{1, \ldots, m\}$ mag ook gelden $\mathbf{a}_i^\top\mathbf{x} = \beta_i$). Voor het schrijfgemak gebruiken we alleen $\leq$. Maar onze beweringen zijn ook correct voor deze algemenere situatie.

Voorbeeld.

$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ met $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ (**Lineaire vorm** op $\mathbb{R}^n$)

en $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \leq \beta_i$ voor $i = 1, \ldots, m\}$,

waarbij $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ en $\beta_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots .m)$.

Lineair programmering. Los op

max $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ **doel, doelfunctie**

zodat $\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \leq \beta_i$ voor alle $i = 1, \ldots, m$. **beperkingen**

Voorbeeld.

$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{c}^\top\mathbf{x}$ met $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ (**Lineaire vorm** op $\mathbb{R}^n$)

en $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}_i^\top\mathbf{x} \leq \beta_i$ voor $i = 1, \ldots, m\}$,

waarbij $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ en $\beta_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots .m)$.

Lineair programmering. Los op

max $\mathbf{c}^\top\mathbf{x}$ **objective**

zodat $\mathbf{a}_i^\top\mathbf{x} \leq \beta_i$ voor alle $i = 1, \ldots, m$. **restrictions**

Voorbeeld.

$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ met $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ (**Lineaire vorm** op $\mathbb{R}^n$)

en $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \leq \beta_i$ voor $i = 1, \ldots, m\}$,

waarbij $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ en $\beta_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots .m)$.

Lineair programmering. Los op

max $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ **doel, doelfunctie**

zodat $\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \leq \beta_i$ voor alle $i = 1, \ldots, m$. **beperkingen**

Stelling. Als 1) $\mathcal{V}$ een hoekpunt heeft en
2) het maximum wordt aangenomen op $\mathcal{V}$
dan wordt het maximum aangenomen in een hoekpunt.

Voorbeeld.

$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ met $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ (**Lineaire vorm** op $\mathbb{R}^n$)

en $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \leq \beta_i$ voor $i = 1, \ldots, m\}$,

waarbij $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ en $\beta_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots .m)$.

Lineair programmering. Los op

max $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ **doel, doelfunctie**

zodat $\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \leq \beta_i$ voor alle $i = 1, \ldots, m$. **beperkingen**

Stelling. Als 1) $\mathcal{V}$ een hoekpunt heeft en
2) het maximum wordt aangenomen op $\mathcal{V}$
dan wordt het maximum aangenomen in een hoekpunt.

Discussie. $\mathcal{V}$ hoeft geen hoekpunt te hebben (v.b.
$\mathcal{V} = \{(x_1, x_2, x_3)^\top \mid x_1 + x_2 + x_3 \leq 1,\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 0\}$:
$\mathcal{V}$ ligt tussen twee paralelle vlakken)

Voorbeeld.

$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ met $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ (**Lineaire vorm** op $\mathbb{R}^n$)

en $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \leq \beta_i$ voor $i = 1, \ldots, m\}$,

waarbij $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ en $\beta_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots .m)$.

Lineair programmering. Los op

max $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ **doel, doelfunctie**

zodat $\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \leq \beta_i$ voor alle $i = 1, \ldots, m$. **beperkingen**

Stelling. Als 1) $\mathcal{V}$ een hoekpunt heeft en
2) het maximum wordt aangenomen op $\mathcal{V}$
dan wordt het maximum aangenomen in een hoekpunt.

Discussie. Als $\mathcal{V}$ (half) onbegrensd is kan het maximum in ∞ liggen (het max. wordt dan niet aangenomen op $\mathcal{V}$).
(v.b. maximaliseer $x_1 + x_2$ op
$\mathcal{V} = \{(x_1, x_2)^\top \mid x_1 - x_2 \leq 0,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}$)

Voorbeeld.

$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ met $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ (**Lineaire vorm** op $\mathbb{R}^n$)

en $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \leq \beta_i$ voor $i = 1, \ldots, m\}$,

waarbij $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ en $\beta_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots .m)$.

Lineair programmering. Los op

max $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ **doel, doelfunctie**

zodat $\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \leq \beta_i$ voor alle $i = 1, \ldots, m$. **beperkingen**

Stelling. Als 1) $\mathcal{V}$ een hoekpunt heeft en
2) het maximum wordt aangenomen op $\mathcal{V}$
dan wordt het maximum aangenomen in een hoekpunt.

Discussie. Het maximum kan in meerdere punten in $\mathcal{V}$ aangenomen worden (de ande andere punten hoeven geen hoekpunt te zijn). (v.b maximaliseer x_2 op $\{(x_1, x_2)^\top \mid 0 \leq x_1 \leq 1,\ 0 \leq x_2 \leq 1\}$.)

Program

- Optimaliseren
- Lineaire programmering
- Voorbeelden
- Polytopen
- Intermezzo: rang
- Intermezzo: notatie
- Hoekpunten
- Intermezzo: vegen
- Standaard vorm
- Simplex methode
- Positiviteitsristricties
- Het eerste hoekpunt

Dieet

m Voedingsstoffen $V_1, \ldots, V_m$ (vitaminen, mineralen, koolhydraten, . . .). Keuze uit n ingrediënten $I_1, \ldots, I_n$.

Aanname:

- Het dagelijkse dieet moet minstens β_i microgram V_i bevatten.
- Een gram van ingrediënt I_j bevat a_{ij} microgram V_i.
- Een gram van ingrediënt I_j kost c_j euro.

Opdracht. Bepaal het goedkoopste dieet waarmee je gezond blijft.

Aanbevolen Dagelijkse Hoeveelheid (ADH)
volwassene van 30 jaar

	ADH	maximum	etiket	eenheid
Vitamine A	800-1000	3000	800	g
Vitamine B1	1.1	geen max	1,4	mg
Vitamine B2	1.5	geen max	1,6	mg
Vitamine B3 (Niacine)	17	35	18	mg
Vitamine B5 (Pantotheenzuur)	5	geen max	6	mg
Vitamine B6	1.5	25	2,0	mg
Vitamine B8 (Biotine)	150	geen max	150	g
Vitamine B11 (Foliumzuur)	300	1000	200	g
Vitamine B12	2.8	geen max	1,0	g
Vitamine C	70	open	60	mg
Vitamine D	2,5	50	5,0	g
Vitamine E	9,3-11,8	300	10	mg
Vitamine K	80	geen max	-	g
Calcium	1000	2500	800	mg
Fosfor	800	open	800	mg
Magnesium	300	-	300	mg
Koper	-	5	-	mg
Fluor	-	open	-	mg
Chroom	125	geen max	-	g
Jodium	150	600	150	g
IJzer	14	open	14	mg
Mangaan	5	geen max	-	mg
Molybdeen	160	600	-	g
Borium	-	open	-	mg
Seleen	-	300		g
Zink	15	25	15	mg
Kalium	3100	open	-	mg
Natrium	2000		-	mg
Chloride	2000		-	mg

6. GRAANPRODUCTEN

	Energie	Energie	Eiwitten	Vetten	Verzadigde vetten	Enkelv. onv. vetten	Meerv. onv. vetten	Linolzuur	Cholesterol	Verteerb. Koolhydraten	Suikers	Zetmeel	Vezels	Water	Natrium	Kalium	Calcium	Fosfor	Magnesium	IJzer	Koper	Zink	Vit. A-activiteit	Vit. B1	Vit. B2	Vit. C
Hoeveelheid per 100 g	kcal	kJ	g	g	g	g	g	g	mg	g	g	g	g	g	mg	mg	mg	mg	mg	mg	mg	mg	µg	mg	mg	mg
BROOD/BESCHUIT																										
7 Granenbrood	253	1059	9,7	3,4	1,2	1,2	0,9	0,9	34	46,0	2,3	43,8	5,3	35	457	201	22	148	48	1,8	0,2	1,2	0	0,14	0,10	0
Beschuit	383	1601	12,3	5,5	2,6	1,7	1,2	1,1	32	70,8	9,1	60,5	3,5	7	400	259	24	155	38	1,7	0,2	1,1	0	0,18	0,08	0
Beschuit, volkoren	367	1536	16,0	6,6	2,3	2,0	1,5	1,4	60	62,0	4,0	58,0	7,5	0	147	302	33	230	62	2,1	0,2	1,3	0	0,34	0,10	0
Beschuit, voltarwe	409	1710	11,5	9,5	5,0	5,3	2,6	-	0	69,4	12,0	58,0	6,0	2	663	-	25	325	73	2,5	-	-	-	0,45	0,38	-
Beschuit, voltarwe met sesam	444	1858	11,0	16,0	5,2	6,6	4,2	-	0	64,0	11,0	53,0	7,9	1	600	-	100	345	932	3,1	-	-	-	0,99	0,70	-
Boerenbrood	298	1247	11,3	3,1	1,2	1,0	0,7	0,7	23	56,3	0,7	55,6	3,0	33	458	245	24	-	15	1,0	0,1	0,6	-	-	-	-
Brood, bruin	243	1017	7,0	3,7	1,3	1,4	0,9	0,9	30	45,6	2,9	42,7	5,7	35	520	186	26	200	41	1,7	0,2	0,9	0	0,20	0,06	0
Brood, wit	268	1120	8,7	2,6	1,2	1,2	0,8	0,8	24	52,5	0,0	52,5	1,0	33	624	140	18	92	19	1,0	0,2	0,7	0	0,16	0,06	0
Croissant	475	1985	9,2	26,3	18,0	6,3	0,8	0,8	73	50,3	2,7	47,6	2,3	18	692	125	35	127	19	1,0	0,1	0,7	21	0,11	0,11	4
Koffiekoek	393	1642	7,9	23,7	15,9	6,2	0,9	0,8	72	37,0	10,0	27,0	-	25	442	112	45	-	12	0,7	0,1	0,9	0	0,13	0,09	0
Koffiekoek met abrikozen	268	1121	5,2	11,8	8,3	2,8	0,4	0,4	24	35,3	10,3	25,0	-	29	307	108	18	-	11	0,7	0,1	0,8	0	0,10	0,09	2
Koffiekoek met chocolade	382	1596	7,1	25,9	12,4	10,4	2,6	2,4	67	30,1	8,1	22,0	-	20	454	147	50	-	27	1,8	0,2	1,0	0	0,13	0,10	0
Koffiekoek met rozijnen	267	1114	5,8	11,0	6,2	3,7	1,1	1,0	36	36,1	14,1	22,0	-	28	375	207	50	-	17	0,8	0,1	1,2	0	0,15	0,10	0
Koffiekoek suisse	277	1157	6,6	10,4	7,7	2,4	0,3	0,2	28	39,2	20,2	19,0	-	28	388	173	43	-	388	1,2	0,1	0,8	0	0,10	0,07	1
Melkbrood	242	1013	9,0	3,3	1,7	0,9	0,6	0,6	27	44,0	5,0	39,0	2,7	32	500	148	56	150	21	1,2	0,1	0,7	0	0,10	0,11	0
Piccolo	303	1266	12,5	2,0	0,7	0,6	0,7	0,7	28	58,7	0,9	57,8	3,0	24	580	333	43	-	22	1,4	0,1	0,8	-	-	-	-
Pistolet	292	1223	9,5	3,8	1,5	1,2	0,9	0,9	35	55,0	0,0	55,0	3,7	26	520	149	23	100	27	1,2	0,1	0,9	0	0,06	0,06	0
Roggebrood	229	959	6,2	3,0	1,0	0,8	1,1	1,1	38	44,5	2,2	42,3	5,5	36	552	278	40	119	61	2,9	0,2	1,6	0	0,18	0,11	0
Rozijnenbrood	280	1173	6,3	8,0	4,3	2,2	0,7	0,7	56	46,0	9,3	37,2	3,7	27	300	383	44	100	25	1,6	0,2	0,6	0	0,12	0,13	0
Sandwich, gesuikerd	330	1383	11,0	10,8	6,0	2,9	0,9	0,9	68	47,4	3,3	44,1	4,0	27	520	124	26	100	21	1,3	0,1	0,8	0	0,21	0,10	0
Stokbrood	283	1184	8,4	1,9	0,6	0,4	0,9	0,9	32	58,0	2,0	56,0	3,5	24	650	145	27	100	23	1,1	0,1	0,8	0	0,09	0,05	0
Suikerbrood	310	1298	7,0	7,2	4,0	1,9	0,5	0,5	41	54,4	17,3	37,2	2,4	25	115	110	32	85	18	0,9	0,1	0,7	0	0,11	0,14	0
Toost	385	1611	12,6	4,6	1,8	2,1	0,7	0,7	54	73,3	5,8	67,5	4,2	0	702	546	31	150	20	1,6	0,2	2,2	0	0,15	0,06	0
Volkorenbrood	241	1007	11,1	2,3	0,9	0,9	1,1	1,1	35	44,0	1,4	42,6	6,4	33	575	286	30	225	61	2,6	0,3	1,6	0	0,34	0,09	0
Voltarwebrood	255	1067	8,2	3,0	1,2	0,9	0,9	0,8	33	48,8	2,4	46,4	4,7	37	513	240	25	175	69	2,4	0,2	2,0	0	0,13	0,11	0

Dieet

m Voedingsstoffen $V_1, \ldots, V_m$ (vitaminen, mineralen, koolhydraten, . . .). Keuze uit n ingrediënten $I_1, \ldots, I_n$.

Aanname:
- Het dagelijkse dieet moet minstens β_i microgram V_i bevatten.
- Een gram van ingrediënt I_j bevat a_{ij} microgram V_i.
- Een gram van ingrediënt I_j kost c_j euro.

Opdracht. Bepaal het goedkoopste dieet waarmee je gezond blijft.

Model. x_j is de dagelijkse hoeveelheid van ingrediënt I_j.

Schrijf $\mathbf{x} \equiv (x_1, \ldots, x_n)^{\mathsf{T}}$, $\mathbf{c} \equiv (c_1, \ldots, c_n)^{\mathsf{T}}$, $\mathbf{a}_i \equiv (a_{i,1}, \ldots, a_{i,n})^{\mathsf{T}}$.

Minimalizeer $\mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}$ met $\mathbf{x}$ zo dat $\mathbf{a}_i^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \geq \beta_i \quad (i = 1, \ldots, m)$.

Dieet

m Voedingsstoffen $V_1, \ldots, V_m$ (vitaminen, mineralen, koolhydraten, ...). Keuze uit n ingrediënten $I_1, \ldots, I_n$.

Aanname:
- Het dagelijkse dieet moet minstens β_i microgram V_i bevatten.
- Een gram van ingrediënt I_j bevat a_{ij} microgram V_i.
- Een gram van ingrediënt I_j kost c_j euro.

Opdracht. Bepaal het goedkoopste dieet waarmee je gezond blijft.

Model. x_j is de dagelijkse hoeveelheid van ingrediënt I_j.

Schrijf $\mathbf{x} \equiv (x_1, \ldots, x_n)^\mathsf{T}$, $\mathbf{c} \equiv (c_1, \ldots, c_n)^\mathsf{T}$, $\mathbf{a}_i \equiv (a_{i,1}, \ldots, a_{i,n})^\mathsf{T}$.

Minimalizeer $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ met $\mathbf{x}$ zo dat $\mathbf{a}_i^\mathsf{T}\mathbf{x} \geq \beta_i \quad (i = 1, \ldots, m)$.

Maximalizeer $-\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ met $\mathbf{x}$ zo dat $-\mathbf{a}_i^\mathsf{T}\mathbf{x} \leq -\beta_i \quad (i = 1, \ldots, m)$.

Spoorboekje

Voorbeeld.

$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}$ met $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ (**Lineaire vorm** op $\mathbb{R}^n$)

en $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}_i^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \leq \beta_i$ voor $i = 1, \ldots, m\}$,

waarbij $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ en $\beta_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots .m)$.

Lineair programmering. Los op

max $\mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}$ **doel, doelfunctie**

zodat $\mathbf{a}_i^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \leq \beta_i$ voor alle $i = 1, \ldots, m$. **beperkingen**

Stelling. Als 1) $\mathcal{V}$ een hoekpunt heeft en
2) het maximum wordt aangenomen op $\mathcal{V}$
dan wordt het maximum aangenomen in een hoekpunt.

Vaak is het al moeilijk om een punt in $\mathcal{V}$ te vinden
(te berekenen).

Voorbeeld.

$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{c}^\top\mathbf{x}$ met $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ (**Lineaire vorm** op $\mathbb{R}^n$)

en $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}_i^\top\mathbf{x} \leq \beta_i$ voor $i = 1, \ldots, m\}$,

waarbij $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ en $\beta_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots .m)$.

Lineair programmering. Los op

max $\mathbf{c}^\top\mathbf{x}$	**doel, doelfunctie**
zodat $\mathbf{a}_i^\top\mathbf{x} \leq \beta_i$ voor alle $i = 1, \ldots, m$.	**beperkingen**

Stelling. Als 1) $\mathcal{V}$ een hoekpunt heeft en
2) het maximum wordt aangenomen op $\mathcal{V}$
dan wordt het maximum aangenomen in een hoekpunt.

Opmerking. Als $\mathcal{V}$ begrensd is, dan wordt het maximum op $\mathcal{V}$ aangenomen.

Voorbeeld.

$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ met $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ (**Lineaire vorm** op $\mathbb{R}^n$)

en $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \leq \beta_i$ voor $i = 1, \ldots, m\}$,

waarbij $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ en $\beta_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots .m)$.

Lineair programmering. Los op

max $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ **doel, doelfunctie**

zodat $\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \leq \beta_i$ voor alle $i = 1, \ldots, m$. **beperkingen**

Stelling. Als 1) $\mathcal{V}$ een hoekpunt heeft en
2) het maximum wordt aangenomen op $\mathcal{V}$
dan wordt het maximum aangenomen in een hoekpunt.

Terminologie. Punten in $\mathcal{V}$ zijn **acceptabele** punten.

Voorbeeld.

$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ met $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ (**Lineaire vorm** op $\mathbb{R}^n$)

en $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \leq \beta_i$ voor $i = 1, \ldots, m\}$,

waarbij $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ en $\beta_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots .m)$.

Lineair programmering. Los op

max $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ **doel, doelfunctie**

zodat $\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \leq \beta_i$ voor alle $i = 1, \ldots, m$. **beperkingen**

Stelling. Als 1) $\mathcal{V}$ een hoekpunt heeft en
2) het maximum wordt aangenomen op $\mathcal{V}$
dan wordt het maximum aangenomen in een hoekpunt.

Terminologie. Punten in $\mathcal{V}$ zijn **feasible**.

Program

- Optimaliseren
- Lineaire programmering
- Voorbeelden
- Polytopen
- Intermezzo: rang
- Intermezzo: notatie
- Hoekpunten
- Intermezzo: vegen
- Standaard vorm
- Simplex methode
- Positiviteitsristricties
- Het eerste hoekpunt

Terminologie. Beschouw een $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ en een $\beta \in \mathbb{R}$.

$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq \beta\}$ is een **halfruimte**,

$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = \beta\}$ is een **hypervlak**.

Terminologie. Beschouw een $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ en een $\beta \in \mathbb{R}$.

$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} \leq \beta\}$ is een **halfruimte**,

$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} = \beta\}$ is een **hypervlak**.

$$\mathbf{x}_0 \equiv \frac{\beta}{\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a}}\mathbf{a} \in \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} = \beta\}.$$

Als $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ zo dat $\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{y} = 0$ dan $\mathbf{x}_0 + \mathbf{y} \in \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} = \beta\}$.

Terminologie. Beschouw een $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ en een $\beta \in \mathbb{R}$.

$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} \leq \beta\}$ is een **halfruimte**,

$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} = \beta\}$ is een **hypervlak**.

Als $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ en $\beta_i \in \mathbb{R}$ dan heet

$$\mathcal{V} \equiv \{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}_i^\mathsf{T}\mathbf{x} \leq \beta_i \ (i = 1, \ldots, m)\} = \bigcap_{i=1}^{m} \{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}_i^\mathsf{T}\mathbf{x} \leq \beta_i\}$$

een **polytoop**.

Een **polyeder** of **veelvlak** is een *begrensd* polytoop.

Terminologie. Beschouw een $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ en een $\beta \in \mathbb{R}$.

$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq \beta\}$ is een **halfruimte**,

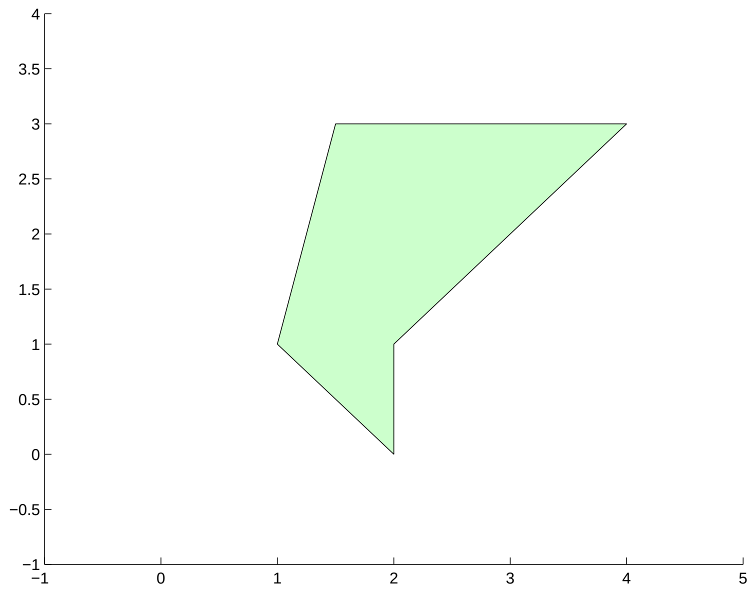
$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = \beta\}$ is een **hypervlak**.

Als $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ en $\beta_i \in \mathbb{R}$ dan heet

$$\mathcal{V} \equiv \{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \leq \beta_i \ (i = 1, \ldots, m)\} = \bigcap_{i=1}^{m} \{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \leq \beta_i\}$$

een **polytoop**.

Een **polyeder** of **veelvlak** is een *begrensd* polytoop.



Terminologie. Beschouw een $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ en een $\beta \in \mathbb{R}$.

$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} \leq \beta\}$ is een **halfruimte**,

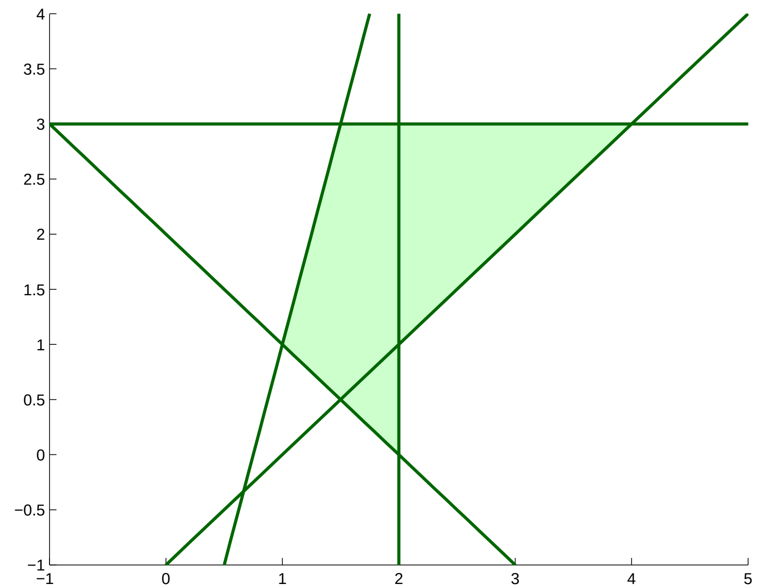
$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} = \beta\}$ is een **hypervlak**.

Als $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ en $\beta_i \in \mathbb{R}$ dan heet

$$\mathcal{V} \equiv \{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}_i^\mathsf{T}\mathbf{x} \leq \beta_i \ (i = 1, \ldots, m)\} = \bigcap_{i=1}^{m} \{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}_i^\mathsf{T}\mathbf{x} \leq \beta_i\}$$

een **polytoop**.

Een **polyeder** of **veelvlak** is een *begrensd* polytoop.



Terminologie. Beschouw een $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ en een $\beta \in \mathbb{R}$.

$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} \leq \beta\}$ is een **halfruimte**,

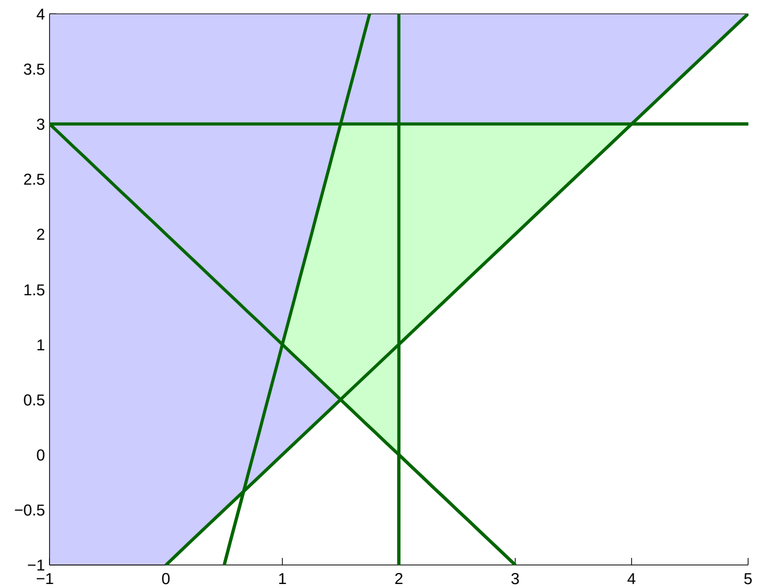
$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} = \beta\}$ is een **hypervlak**.

Als $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ en $\beta_i \in \mathbb{R}$ dan heet

$$\mathcal{V} \equiv \{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}_i^\mathsf{T}\mathbf{x} \leq \beta_i \ (i = 1, \ldots, m)\} = \bigcap_{i=1}^{m} \{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}_i^\mathsf{T}\mathbf{x} \leq \beta_i\}$$

een **polytoop**.

Een **polyeder** of **veelvlak** is een *begrensd* polytoop.



Terminologie. Beschouw een $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ en een $\beta \in \mathbb{R}$.

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} \leq \beta\} \text{ is een } \textbf{halfruimte},$$

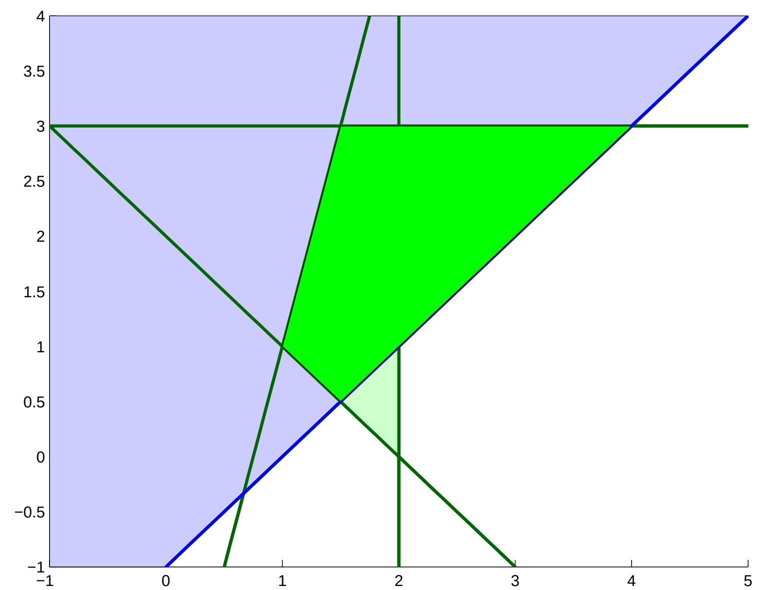
$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} = \beta\} \text{ is een } \textbf{hypervlak}.$$

Als $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ en $\beta_i \in \mathbb{R}$ dan heet

$$\mathcal{V} \equiv \{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}_i^\mathsf{T}\mathbf{x} \leq \beta_i \ (i = 1, \ldots, m)\} = \bigcap_{i=1}^{m} \{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}_i^\mathsf{T}\mathbf{x} \leq \beta_i\}$$

een **polytoop**.

Een **polyeder** of **veelvlak** is een *begrensd* polytoop.



Terminologie. Beschouw een $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ en een $\beta \in \mathbb{R}$.

$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq \beta\}$ is een **halfruimte**,

$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = \beta\}$ is een **hypervlak**.

Als $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ en $\beta_i \in \mathbb{R}$ dan heet

$$\mathcal{V} \equiv \{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \leq \beta_i \ (i = 1, \ldots, m)\} = \bigcap_{i=1}^{m} \{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \leq \beta_i\}$$

een **polytoop**.

Een **polyeder** of **veelvlak** is een *begrensd* polytoop.

Notatie.

Met $\quad \mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^\top \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^\top \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} \equiv \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}$ en $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ als $x_j \leq y_j$ alle j

is
$$\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$$

Terminologie. Beschouw een $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ en een $\beta \in \mathbb{R}$.

$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq \beta\}$ is een **halfruimte**,

$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = \beta\}$ is een **hypervlak**.

Als $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ en $\beta_i \in \mathbb{R}$ dan heet

$$\mathcal{V} \equiv \{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \leq \beta_i \ (i = 1, \ldots, m)\} = \bigcap_{i=1}^{m} \{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \leq \beta_i\}$$

een **polytoop**.

Een **polyeder** of **veelvlak** is een *begrensd* polytoop.

Lineair programmering. Los op

$$\begin{aligned} &\max\ \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ &\text{zodat } \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Met $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$ in $\mathbb{R}^n$ is

$$\begin{aligned} [\mathbf{p}, \mathbf{q}] &\equiv \{\alpha\mathbf{p} + (1-\alpha)\mathbf{q} \mid \alpha \in [0,1]\} \\ &= \mathbf{q} + \{\alpha(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \mid \alpha \in [0,1]\} \end{aligned}$$

het **lijnstuk** tussen $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$.

Met $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$ in $\mathbb{R}^n$ is

$$[\mathbf{p}, \mathbf{q}] \;\; \equiv \;\; \{\alpha \mathbf{p} + (1-\alpha)\mathbf{q} \mid \alpha \in [0,1]\}$$

het **lijnstuk** tussen $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$.

Als $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$, dan bekijken we ook

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \;\; \equiv \;\; \{\alpha \mathbf{p} + (1-\alpha)\mathbf{q} \mid \alpha \in (0,1)\} \; .$$

Met $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$ in $\mathbb{R}^n$ is

$$[\mathbf{p}, \mathbf{q}] \quad \equiv \quad \{\alpha \mathbf{p} + (1 - \alpha)\mathbf{q} \mid \alpha \in [0, 1]\}$$

het **lijnstuk** tussen $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$.

Als $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$, dan bekijken we ook

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \quad \equiv \quad \{\alpha \mathbf{p} + (1 - \alpha)\mathbf{q} \mid \alpha \in (0, 1)\} \ .$$

Met $\mathbf{p}_j$ in $\mathbb{R}^n$ $\quad (j = 0, 1, \ldots, k) \quad$ is

$$\mathcal{S} \equiv \{ \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \, \mathbf{p}_j \mid \alpha_j \geq 0, \sum_{j=0}^{k} \alpha_j = 1\}$$

een polytoop,

Als $\quad \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \ \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0, \ \ldots, \ \mathbf{p}_k - \mathbf{p}_0 \quad$ lineair onafhankelijk zijn dan heet $\mathcal{S}$ een ***k*-simplex**.

Met $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$ in $\mathbb{R}^n$ is

$$[\mathbf{p},\mathbf{q}] \quad\equiv\quad \{\alpha\mathbf{p}+(1-\alpha)\mathbf{q} \mid \alpha\in[0,1]\}$$

het **lijnstuk** tussen $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$.

Als $\mathbf{p}\neq\mathbf{q}$, dan bekijken we ook

$$(\mathbf{p},\mathbf{q}) \quad\equiv\quad \{\alpha\mathbf{p}+(1-\alpha)\mathbf{q} \mid \alpha\in(0,1)\}\ .$$

Met $\mathbf{p}_j$ in $\mathbb{R}^n$ $\quad (j=0,1,\ldots,k)\quad$ is

$$\mathcal{S}\equiv\{\sum_{j=0}^{k}\alpha_j\,\mathbf{p}_j \mid \alpha_j\geq 0,\ \sum_{j=0}^{k}\alpha_j=1\}$$

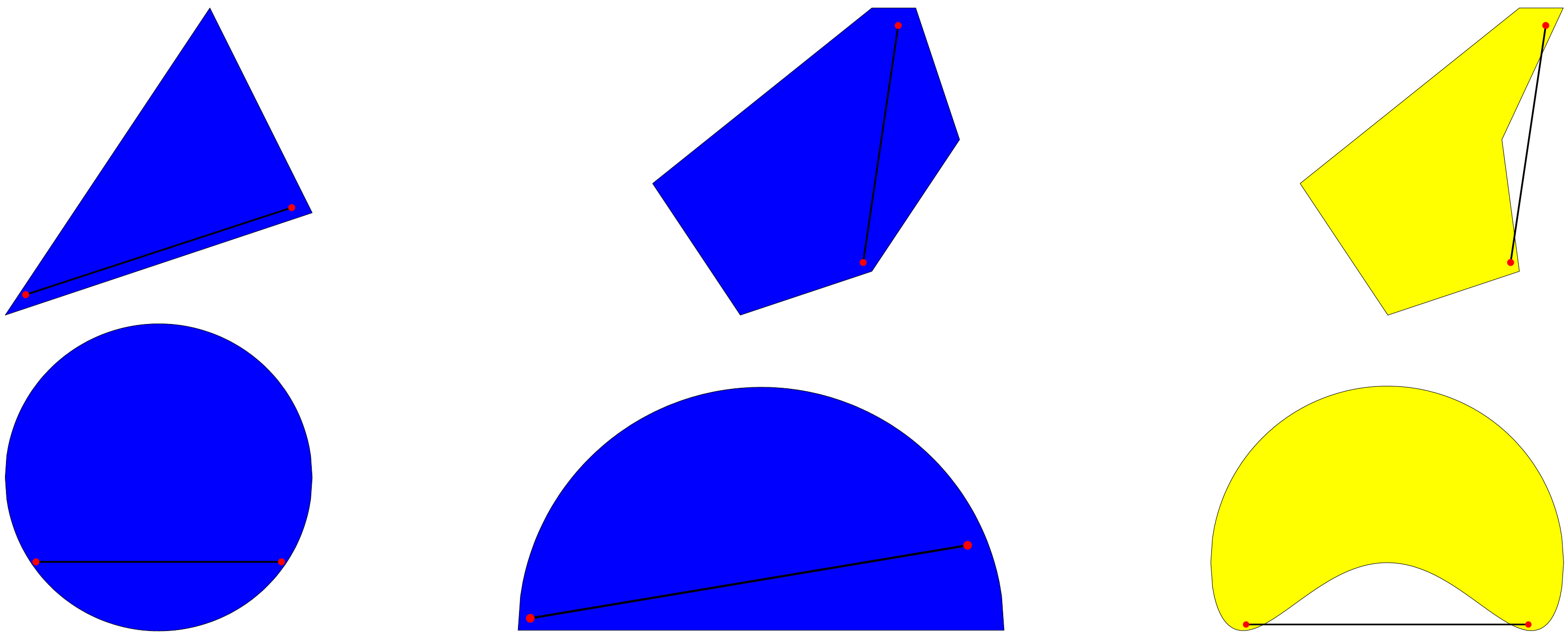
een polytoop,

Als $\quad \mathbf{p}_1-\mathbf{p}_0,\ \mathbf{p}_2-\mathbf{p}_0,\ \ldots,\ \mathbf{p}_k-\mathbf{p}_0 \quad$ lineair onafhankelijk zijn dan heet $\mathcal{S}$ een **k-simplex**.

$\mathbf{p}_0=\mathbf{0}$ en $\mathbf{p}_j=\mathbf{e}_j$ de j-de standaard basis vector $(k=n)$ geeft het **eenheidssimplex** in $\mathbb{R}^n$

Definitie. Een verzameling $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ is **convex** als

$$\text{voor alle } \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad [\mathbf{p}, \mathbf{q}] \subset \mathcal{U}.$$



Definitie. Een verzameling $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ is **convex** als

$$\text{voor alle } \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad [\mathbf{p}, \mathbf{q}] \subset \mathcal{U}.$$

Stelling. $\mathcal{U}$ en $\mathcal{W}$ convex $\quad \Rightarrow \quad \mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ convex.

Definitie. Een verzameling $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ is **convex** als

$$\text{voor alle } \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad [\mathbf{p}, \mathbf{q}] \subset \mathcal{U}.$$

Stelling. $\mathcal{U}$ en $\mathcal{W}$ convex $\quad \Rightarrow \quad \mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ convex.

Stelling. Halfruimtes en hypervlakken zijn convex.

Stelling. Polytopen zijn convex.

Definitie. Een verzameling $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ is **convex** als

$$\text{voor alle } \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad [\mathbf{p}, \mathbf{q}] \subset \mathcal{U}.$$

Stelling. $\mathcal{U}$ en $\mathcal{W}$ convex $\quad \Rightarrow \quad \mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ convex.

Stelling. Halfruimtes en hypervlakken zijn convex.

Stelling. Polytopen zijn convex.

Definitie. Zij $\mathcal{U}$ een convexe verzameling.
Een $\mathbf{p}$ in $\mathcal{U}$ is een **hoekpunt** van $\mathcal{U}$ als

$$\mathbf{p} \notin (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \text{voor alle } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{U}\ ,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}.$$

Definitie. Een verzameling $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ is **convex** als

$$\text{voor alle } \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad [\mathbf{p}, \mathbf{q}] \subset \mathcal{U}.$$

Stelling. $\mathcal{U}$ en $\mathcal{W}$ convex $\quad \Rightarrow \quad \mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ convex.

Stelling. Halfruimtes en hypervlakken zijn convex.

Stelling. Polytopen zijn convex.

Definitie. Zij $\mathcal{U}$ een convexe verzameling.
Een $\mathbf{p}$ in $\mathcal{U}$ is een **hoekpunt** van $\mathcal{U}$ als

$$\mathbf{p} \notin (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \text{voor alle } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{U}\ ,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}.$$

Hoe zie je in hogere dimensies of $\mathbf{p}$ *een hoekpunt is?*

Lineair programmering. Los op

$$\max\ \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$$
$$\text{zodat } \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}.$$

Hier is $\mathbf{A}$ een $m \times k$ matrix
$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^k$
en wordt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ gezocht.

Schrijf $\mathcal{V} \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}\}$.

Stelling. Als 1) $\mathcal{V}$ een hoekpunt heeft en
2) het maximum wordt aangenomen op $\mathcal{V}$
dan wordt het maximum aangenomen in een hoekpunt.

Hoe vind je een hoekpunt in $\mathcal{V}$?

Program

- Optimaliseren
- Lineaire programmering
- Voorbeelden
- Polytopen
- Intermezzo: rang
- Intermezzo: notatie
- Hoekpunten
- Intermezzo: vegen
- Standaard vorm
- Simplex methode
- Positiviteitsristricties
- Het eerste hoekpunt

Intermezzo I: rang

Beschouw een m bij n matrix **A**.

Definitie/Stelling. De **rang** van **A**

$=$ het aantal lineair onafhankelijke kolommen van **A**

$=$ het aantal lineair onafhankelijke rijen van **A**

de rang, rang(**A**), van **A** is $\leq$ min(m, n).

Intermezzo I: rang

Beschouw een m bij n matrix **A**.

Definitie/Stelling. De **rang** van **A**

$$= \text{het aantal lineair onafhankelijke kolommen van } \mathbf{A}$$
$$= \text{het aantal lineair onafhankelijke rijen van } \mathbf{A}$$

de rang, rang(**A**), van **A** is $\leq$ min(m, n).

Stelling.

- rang(**A**) $< n \;\; \Leftrightarrow$ er is een $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ zo dat $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}$:
- $m = n$ & **A** volle rang $\;\Leftrightarrow$ **A** inverteerbaar.

Program

- Optimaliseren
- Lineaire programmering
- Voorbeelden
- Polytopen
- Intermezzo: rang
- Intermezzo: notatie
- Hoekpunten
- Intermezzo: vegen
- Standaard vorm
- Simplex methode
- Positiviteitsristricties
- Het eerste hoekpunt

Intermezzo II: Notatie

Matlab conventies.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

Intermezzo II: Notatie

Matlab conventies.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}(3,2) = 10$$

$$\mathbf{A}(3,:) = \begin{bmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}(:,2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Intermezzo II: Notatie

Matlab conventies.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}(3,2) = 10$$

$$\mathbf{A}(3,:) = \begin{bmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}(:,2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}([1,3],:) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}(:,[2,4]) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

Intermezzo II: Notatie

Matlab conventies.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}(3,2) = 10$$

$$\mathbf{A}(3,:) = \begin{bmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}(:,2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}([1,3],:) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}(:,[2,4]) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}([1,3],[2,4]) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

Intermezzo II: Notatie

Matlab conventies.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}(3,2) = 10$$

$$\mathbf{A}(3,:) = \begin{bmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}(:,2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}([1,3],:) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}(:,[2,4]) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}([1,3],[2,4]) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \;\Rightarrow \mathbf{b}([1,3]) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Intermezzo II: Notatie

Matlab conventies.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

Als I de rij $[1,3]$ is en J is de rij $[2,4]$ dan is

$$\mathbf{A}(I,:) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}(:,J) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}.$$

Met $i \notin I$ bedoelen we dat het getal $i \in \{1,2,3\}$ niet voorkomt in de rij I, bv, $2 \notin [1,3]$.

We gebruiken (zo veel mogelijk)
- i en I voor rijen van **A** en coördinaten van **b** en
- j en J voor kolommen van **A** en coördinaten van **x**.

Intermezzo II: Notatie

Matlab conventies.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

Als I de rij $[3, 1]$ is en J is de rij $[4, 2]$ dan is

$$\mathbf{A}(I, :) = \begin{bmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}(:, J) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 6 \\ 12 & 10 \end{bmatrix}.$$

Intermezzo II: Notatie

Matlab conventies.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 13 & 14 \\ 15 & 16 \\ 17 & 18 \end{bmatrix}.$$

Dan

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 13 & 14 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 15 & 16 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 17 & 18 \end{bmatrix}$$

Intermezzo II: Notatie

Matlab conventies.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld. Met $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^\top \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^\top \end{bmatrix}$ en $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}$

noteren we de ongelijkheid

$$\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \leq \beta_i$$

ook als

$$\mathbf{A}(i, :)\mathbf{x} \leq \mathbf{b}(i).$$

Program

- Optimaliseren
- Lineaire programmering
- Voorbeelden
- Polytopen
- Intermezzo: rang
- Intermezzo: notatie
- Hoekpunten
- Intermezzo: vegen
- Standaard vorm
- Simplex methode
- Positiviteitsristricties
- Het eerste hoekpunt

Lineair programmering. Los op

$$\max\ \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$$
$$\text{zodat } \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}.$$

Hier is $\mathbf{A}$ een m bij k matrix
$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^k$
en wordt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ gezocht.

Schrijf $\mathcal{V} \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$.

Stelling. Als 1) $\mathcal{V}$ een hoekpunt heeft en
2) het maximum wordt aangenomen op $\mathcal{V}$
dan wordt het maximum aangenomen in een hoekpunt.

Hoe vind je een hoekpunt in $\mathcal{V}$?

$\mathbf{A}$ is $m \times k$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $k \leq m$, $\mathcal{V} \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$.

Terminologie. $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^k$ is een **basispunt** voor $\mathcal{V}$ als er een rij I is van k verschillende getallen uit $\{1, 2, \ldots, m\}$ waarvoor $\mathbf{A}(I, :)$ inverteerbaar is en $\mathbf{A}(I, :)\mathbf{p} = \mathbf{b}(I)$.

Stelling. $\mathbf{p} \in \mathcal{V}$.
$\mathbf{p}$ is een hoekpunt van $\mathcal{V}$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{p}$ is een basispunt voor $\mathcal{V}$.

Interpretatie. In de k-dim. ruimte: hoekpunten zijn snijpunten van k hypervlakken $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k \mid \mathbf{A}(i, :)\mathbf{x} = \mathbf{b}(i)\}$ (i uit een rij I van k verschillende getallen uit $\{1, \ldots, m\}$).

In 2-d ($k = 2$), snijpunten van 2 lijnen.
In 3-d ($k = 3$), snijpunten van 3 vlakken.

Opmerking. Als $I = [I', i]$ een rij is van verschillende getallen uit $\{1, \ldots, m\}$ en $\mathbf{A}(I, :)$ heeft niet volle rang, dan is, met $\mathcal{H}(I) \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k \mid \mathbf{A}(I, :)\mathbf{x} = \mathbf{b}(I)\}$,

$$\mathcal{H}(I') \text{ parallel aan (een deel van) } \mathcal{H}(i).$$

$\mathbf{A}$ is $m \times k$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $k \leq m$, $\mathcal{V} \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$.

Terminologie. $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^k$ is een **basispunt** voor $\mathcal{V}$ als er een rij I is van k verschillende getallen uit $\{1, 2, \ldots, m\}$ waarvoor $\mathbf{A}(I,:)$ inverteerbaar is en $\mathbf{A}(I,:)\mathbf{p} = \mathbf{b}(I)$.

Stelling. $\mathbf{p} \in \mathcal{V}$.
$\mathbf{p}$ is een hoekpunt van $\mathcal{V}$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{p}$ is een basispunt voor $\mathcal{V}$.

Interpretatie. In de k-dim. ruimte: hoekpunten zijn snijpunten van k hypervlakken $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k \mid \mathbf{A}(i,:)\mathbf{x} = \mathbf{b}(i)\}$.

Ribben (lijnstukken tussen buurhoekpunten) liggen op de doorsnede van $k-1$ hypervlakken.

$\mathbf{A}$ is $m \times k$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $k \leq m$, $\mathcal{V} \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$.

Terminologie. $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^k$ is een **basispunt** voor $\mathcal{V}$ als er een rij I is van k verschillende getallen uit $\{1, 2, \ldots, m\}$ waarvoor $\mathbf{A}(I,:)$ inverteerbaar is en $\mathbf{A}(I,:)\mathbf{p} = \mathbf{b}(I)$.

Stelling. $\mathbf{p} \in \mathcal{V}$.
$\mathbf{p}$ is een hoekpunt van $\mathcal{V}$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{p}$ is een basispunt voor $\mathcal{V}$.

Voorbeeld. Stel $\mathcal{V}$ bestaat uit die $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^3$ waarvoor

$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 + 4x_3 \leq 6 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 \leq 9 \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 \leq 16 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Dan is $k = 3$, $m = 6$.

Met $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 4 & -6 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ en $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ is $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$.

$\mathbf{A}$ is $m \times k$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $k \leq m$, $\mathcal{V} \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$.

Terminologie. $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^k$ is een **basispunt** voor $\mathcal{V}$ als er een rij I is van k verschillende getallen uit $\{1, 2, \ldots, m\}$ waarvoor $\mathbf{A}(I,:)$ inverteerbaar is en $\mathbf{A}(I,:)\mathbf{p} = \mathbf{b}(I)$.

Stelling. $\mathbf{p} \in \mathcal{V}$.

$\mathbf{p}$ is een hoekpunt van $\mathcal{V}$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{p}$ is een basispunt voor $\mathcal{V}$.

Voorbeeld.

Met $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 4 & -6 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ en $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ is $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$.

$(0, 0, 0)^{\mathsf{T}}$ is een hoekpunt:

— het is acceptabel (immers $1 \cdot 0 - 7 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0 \leq 6, \ \ldots$) en

— $\mathbf{A}([4, 5, 6], :) = -\mathbf{I}_3$ is inverteerbaar.

$\mathbf{A}$ is $m \times k$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $k \leq m$, $\mathcal{V} \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$.

Terminologie. $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^k$ is een **basispunt** voor $\mathcal{V}$ als er een rij I is van k verschillende getallen uit $\{1, 2, \ldots, m\}$ waarvoor $\mathbf{A}(I, :)$ inverteerbaar is en $\mathbf{A}(I, :)\mathbf{p} = \mathbf{b}(I)$.

Stelling. $\mathbf{p} \in \mathcal{V}$.
$\mathbf{p}$ is een hoekpunt van $\mathcal{V}$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{p}$ is een basispunt voor $\mathcal{V}$.

Voorbeeld.

Met $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 4 & -6 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ en $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ is $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$.

$\mathbf{A}([2,3,4], :) = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -6 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ is inverteerbaar. De oplossing van

$$\mathbf{A}([2,3,4], :)\mathbf{p} = \mathbf{b}([2,3,4]) = \begin{bmatrix} 9 \\ 16 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ is } \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 43/9 \\ 134/9 \end{bmatrix}$$

Echter $\mathbf{A}(1, :)\mathbf{p} = 9 > 6$ en dat is niet acceptabel.
Dus dit basispunt is geen hoekpunt.

$\mathbf{A}$ is $m \times k$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $k \leq m$, $\mathcal{V} \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$.

Terminologie. $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^k$ is een **basispunt** voor $\mathcal{V}$ als er een rij I is van k verschillende getallen uit $\{1, 2, \ldots, m\}$ waarvoor $\mathbf{A}(I,:)$ inverteerbaar is en $\mathbf{A}(I,:)\mathbf{p} = \mathbf{b}(I)$.

Stelling. $\mathbf{p} \in \mathcal{V}$.
$\mathbf{p}$ is een hoekpunt van $\mathcal{V}$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{p}$ is een basispunt voor $\mathcal{V}$.

Heeft een polytoop altijd hoekpunten?

A is $m \times k$, **b** $\in \mathbb{R}^m$, $k \leq m$, $\mathcal{V} \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$.

Terminologie. **p** $\in \mathbb{R}^k$ is een **basispunt** voor $\mathcal{V}$ als er een rij I is van k verschillende getallen uit $\{1, 2, \ldots, m\}$ waarvoor $\mathbf{A}(I,:)$ inverteerbaar is en $\mathbf{A}(I,:)\mathbf{p} = \mathbf{b}(I)$.

Stelling. **p** $\in \mathcal{V}$.
p is een hoekpunt van $\mathcal{V}$ $\Leftrightarrow$ **p** is een basispunt voor $\mathcal{V}$.

Stelling. Stel $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\} \neq \emptyset$.
$\mathcal{V}$ heeft een hoekpunt $\Leftrightarrow$ **A** heeft volle rang ($= k$).

$\mathbf{A}$ is $m \times k$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $k \leq m$, $\mathcal{V} \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$.

Terminologie. $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^k$ is een **basispunt** voor $\mathcal{V}$ als er een rij I is van k verschillende getallen uit $\{1, 2, \ldots, m\}$ waarvoor $\mathbf{A}(I, :)$ inverteerbaar is en $\mathbf{A}(I, :)\mathbf{p} = \mathbf{b}(I)$.

Stelling. $\mathbf{p} \in \mathcal{V}$.
$\mathbf{p}$ is een hoekpunt van $\mathcal{V}$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{p}$ is een basispunt voor $\mathcal{V}$.

Stelling. Stel $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\} \neq \emptyset$.
$\mathcal{V}$ heeft een hoekpunt $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}$ heeft volle rang $(= k)$.

Hoe vind je hoekpunten?

$\mathbf{A}$ is $m \times k$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $k \leq m$, $\mathcal{V} \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$.

Terminologie. $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^k$ is een **basispunt** voor $\mathcal{V}$ als er een rij I is van k verschillende getallen uit $\{1, 2, \ldots, m\}$ waarvoor $\mathbf{A}(I,:)$ inverteerbaar is en $\mathbf{A}(I,:)\mathbf{p} = \mathbf{b}(I)$.

Stelling. $\mathbf{p} \in \mathcal{V}$.
$\mathbf{p}$ is een hoekpunt van $\mathcal{V}$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{p}$ is een basispunt voor $\mathcal{V}$.

Stelling. Stel $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\} \neq \emptyset$.
$\mathcal{V}$ heeft een hoekpunt $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}$ heeft volle rang $(= k)$.

Hoe vind je hoekpunten?
Bereken de basispunten en check of ze in $\mathcal{V}$ zitten (kan veel werk zijn).

Lineair programmering. Los op

$$\max\ \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$$
$$\text{zodat } \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}.$$

Stelling. Als 1) $\mathcal{V}$ een hoekpunt heeft en
2) het maximum wordt aangenomen op $\mathcal{V}$
dan wordt het maximum aangenomen in een hoekpunt.

Moet je alle hoekpunten checken om het maximum te vinden?

Lineair programmering. Los op

$$\max \ \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$$
$$\text{zodat } \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}.$$

Stelling. Als 1) $\mathcal{V}$ een hoekpunt heeft en
2) het maximum wordt aangenomen op $\mathcal{V}$
dan wordt het maximum aangenomen in een hoekpunt.

Als $\mathbf{A}$ *een* $m \times k$ *matrix is, dan zijn er*

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{(m-k)!\,k!}$$

verschillende manieren een $k \times k$ *matrix* $\mathbf{A}(I,:)$ *te maken.*

Dus voor bv $k = 70$ *en* $m = 100$ *zijn er*

$\binom{100}{70} \approx 3\,10^{25}$ *potentiële basispunten/hoekpunten.*

Met $m = 350$ *en* $k = 200$ *zijn er*

$\binom{350}{200} \approx 2.7\,10^{102}$ *combinaties: meer dan 1 Google*

Lineair programmering. Los op

$$\begin{aligned} &\max\ \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \\ &\text{zodat } \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Stelling. Als 1) $\mathcal{V}$ een hoekpunt heeft en
2) het maximum wordt aangenomen op $\mathcal{V}$
dan wordt het maximum aangenomen in een hoekpunt.

Alternatief. *Onderzoek alleen hoekpunten die potentiëel interessant zijn.*

Lineair programmering. Los op

$$\begin{aligned} &\max\ \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \\ &\text{zodat } \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Stelling. Als 1) $\mathcal{V}$ een hoekpunt heeft en
2) het maximum wordt aangenomen op $\mathcal{V}$
dan wordt het maximum aangenomen in een hoekpunt.

Oplosmethode.

- Vind een hoekpunt van $\mathcal{V}$
- Herhaal
  - Vind vanuit dat hoekpunt een richting langs de rand van $\mathcal{V}$ waar langs de doelfunctie groter wordt. **Stop** als er niet zo'n richting is.
  - Loop vanuit dat hoekpunt in die richting tot een volgend hoekpunt van $\mathcal{V}$

Lineair programmering. Los op

$$\max \ \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}$$
$$\text{zodat } \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}.$$

Stelling. Als 1) $\mathcal{V}$ een hoekpunt heeft en
2) het maximum wordt aangenomen op $\mathcal{V}$
dan wordt het maximum aangenomen in een hoekpunt.

Oplosmethode.

- Vind een hoekpunt van $\mathcal{V}$
- Herhaal
  - Vind vanuit dat hoekpunt een richting langs de rand van $\mathcal{V}$ waar langs de doelfunctie groter wordt. **Stop** als er niet zo'n richting is.
  - Loop vanuit dat hoekpunt in die richting tot een volgend hoekpunt van $\mathcal{V}$

Stelling. Het hoekpunt waarin gestopt wordt is 'n maximalizerende $\mathbf{x}$ ('n $\mathbf{x}$ die het lp-probleem oplost).

Lineair programmering. Los op

$$\max \ \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$$
$$\text{zodat } \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}.$$

Stelling. Als 1) $\mathcal{V}$ een hoekpunt heeft en
2) het maximum wordt aangenomen op $\mathcal{V}$
dan wordt het maximum aangenomen in een hoekpunt.

Oplosmethode.

- Vind een hoekpunt van $\mathcal{V}$

Opmerking. *Het vinden van het eerste hoekpunt is vaak gemakkelijk: in veel toepassingen is* $\mathbf{0}$ *een hoekpunt. Dit is het geval als* $\mathbf{A0} = \mathbf{0} \le \mathbf{b}$ *en als in de matrix* $\mathbf{A}$ *de restricties* $\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$ *opgenomen zijn.*

Lineair programmering. Los op

$$\begin{aligned} &\max\ \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \\ &\text{zodat } \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Stelling. Als 1) $\mathcal{V}$ een hoekpunt heeft en
2) het maximum wordt aangenomen op $\mathcal{V}$
dan wordt het maximum aangenomen in een hoekpunt.

Oplosmethode.

Voor het vinden van

"hoekpunten van $\mathcal{V}$ en
richtingen langs de rand van $\mathcal{V}$"

moeten stelsels met $\mathbf{A}(I,:)$ *opgelost worden.*

Dit gaat middels vegen.

Program

- Optimaliseren
- Lineaire programmering
- Voorbeelden
- Polytopen
- Intermezzo: rang
- Intermezzo: notatie
- Hoekpunten
- Intermezzo: vegen
- Standaard vorm
- Simplex methode
- Positiviteitsristricties
- Het eerste hoekpunt

Intermezzo III: Vegen

Los op

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 0 \\ 7 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 17 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Intermezzo III: Vegen

Los op

$$\begin{array}{rrr|r} 2 & 2 & 1 & 7 \\ 6 & 5 & 0 & 17 \\ 7 & 2 & -1 & 15 \end{array}$$

Intermezzo III: Vegen

Los op door vegen

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 7 \\ 6 & 5 & 0 & 17 \\ 7 & 2 & -1 & 15 \end{array}$$

Intermezzo III: Vegen

Los op door vegen

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 7 \\ 6 & 5 & 0 & 17 \\ 7 & 2 & -1 & 15 \end{array}\right.$$

Veeg de 1ste kolom vanaf de 2de rij

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & -5 & -4.5 & -9.5 \end{array}\right.$$

Intermezzo III: Vegen

Los op door vegen

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 7 \\ 6 & 5 & 0 & 17 \\ 7 & 2 & -1 & 15 \end{array}\right.$$

Veeg de 1ste kolom vanaf de 2de rij

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & -5 & -4.5 & -9.5 \end{array}\right.$$

Opmerking. We hebben de eerste rij gebruikt om de eerste kolom te vegen.
In het resulterend stelsel dat gevormd wordt door de overige rijen speelt x_1 geen rol: uit dit resulterend stelsel is x_1 **geëlimineerd**.

Intermezzo III: Vegen

Los op door vegen

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 7 \\ 6 & 5 & 0 & 17 \\ 7 & 2 & -1 & 15 \end{array}\right.$$

Veeg de 1ste kolom vanaf de 2de rij

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & -5 & -4.5 & -9.5 \end{array}\right.$$

Veeg de 2de kolom vanaf de 3de rij

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 10.5 & 10.5 \end{array}\right.$$

Intermezzo III: Vegen

Los op door vegen

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 7 \\ 6 & 5 & 0 & 17 \\ 7 & 2 & -1 & 15 \end{array}$$

Veeg de 1ste kolom vanaf de 2de rij

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & -5 & -4.5 & -9.5 \end{array}$$

Veeg de 2de kolom vanaf de 3de rij

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 10.5 & 10.5 \end{array}$$

x_2 is geëlimineerd uit het resulterend stelsel.

Intermezzo III: Vegen

Los op door vegen

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 7 \\ 6 & 5 & 0 & 17 \\ 7 & 2 & -1 & 15 \end{array}$$

Veeg de 1ste kolom vanaf de 2de rij

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & -5 & -4.5 & -9.5 \end{array}$$

Veeg de 2de kolom vanaf de 3de rij

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 10.5 & 10.5 \end{array}$$

Los **x** op door **terug substitutie**:

$$\begin{aligned} &10.5\, x_3 = 10.5 \quad \Rightarrow x_3 = 1. \\ &-x_2 - 3\, x_3 = -4 \quad \Rightarrow x_2 = 4 - 3\, x_3 = 1. \\ &2\, x_1 + 2\, x_2 + x_3 = 7 \quad \Rightarrow x_1 = (7 - 2\, x_2 - x_3)/2 = 2 \end{aligned}$$

Intermezzo III: Vegen

Los op door **partieel** vegen

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 7 \\ 6 & 5 & 0 & 17 \\ 7 & 2 & -1 & 15 \end{array}$$

Veeg de 1ste kolom vanaf de 2de rij

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & -5 & -4.5 & -9.5 \end{array}$$

Veeg de 2de kolom vanaf de 3de rij

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 10.5 & 10.5 \end{array}$$

Los **x** op door **terug substitutie**:

$$\begin{aligned} &10.5\,x_3 = 10.5 \quad \Rightarrow x_3 = 1. \\ &-x_2 - 3\,x_3 = -4 \quad \Rightarrow x_2 = 4 - 3\,x_3 = 1. \\ &2\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 = 7 \quad \Rightarrow x_1 = (7 - 2\,x_2 - x_3)/2 = 2 \end{aligned}$$

Intermezzo III: Vegen

Los op door volledig vegen

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 7 \\ 6 & 5 & 0 & 17 \\ 7 & 2 & -1 & 15 \end{array}$$

Intermezzo III: Vegen

Los op door volledig vegen

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 7 \\ 6 & 5 & 0 & 17 \\ 7 & 2 & -1 & 15 \end{array}$$

Veeg de 1ste kolom

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & -5 & -4.5 & -9.5 \end{array}$$

Intermezzo III: Vegen

Los op door volledig vegen

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 7 \\ 6 & 5 & 0 & 17 \\ 7 & 2 & -1 & 15 \end{array}$$

Veeg de 1ste kolom en schaal 1ste rij

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0.5 & 3.5 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & -5 & -4.5 & -9.5 \end{array}$$

Intermezzo III: Vegen

Los op door volledig vegen

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 7 \\ 6 & 5 & 0 & 17 \\ 7 & 2 & -1 & 15 \end{array}\right.$$

Schaal 1ste rij en veeg de 1ste kolom

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0.5 & 3.5 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & -5 & -4.5 & -9.5 \end{array}\right.$$

Intermezzo III: Vegen

Los op door volledig vegen

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 7 \\ 6 & 5 & 0 & 17 \\ 7 & 2 & -1 & 15 \end{array}\right.$$

Schaal 1ste rij en veeg de 1ste kolom

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0.5 & 3.5 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & -5 & -4.5 & -9.5 \end{array}\right.$$

Schaal 2de rij en veeg de 2de kolom

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2.5 & -0.5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 10.5 & 10.5 \end{array}\right.$$

Intermezzo III: Vegen

Los op door volledig vegen

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 7 \\ 6 & 5 & 0 & 17 \\ 7 & 2 & -1 & 15 \end{array}\right.$$

Schaal 1ste rij en veeg de 1ste kolom

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0.5 & 3.5 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & -5 & -4.5 & -9.5 \end{array}\right.$$

Schaal 2de rij en veeg de 2de kolom

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2.5 & -0.5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 10.5 & 10.5 \end{array}\right.$$

Schaal 3de rij en veeg de 3de kolom

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right.$$

Intermezzo III: Vegen

Los op door volledig vegen

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 7 \\ 6 & 5 & 0 & 17 \\ 7 & 2 & -1 & 15 \end{array}\right.$$

Schaal 1ste rij en veeg de 1ste kolom

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0.5 & 3.5 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & -5 & -4.5 & -9.5 \end{array}\right.$$

Schaal 2de rij en veeg de 2de kolom

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2.5 & -0.5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 10.5 & 10.5 \end{array}\right.$$

Schaal 3de rij en veeg de 3de kolom

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right.$$

Rest een triviaal stelsel: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Intermezzo III: Vegen

Los op door volledig vegen

$$\begin{array}{rrr|r} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 5 & 0 & 17 \\ 7 & 2 & -1 & 15 \end{array}$$

Intermezzo III: Vegen

Los op door volledig vegen

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 5 & 0 & 17 \\ 7 & 2 & -1 & 15 \end{array}$$

Vind **pivot** in de 1ste kolom schaal en veeg de 1ste kolom (op de pivot na)

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & \frac{5}{6} & 0 & \frac{17}{6} \\ 0 & -\frac{23}{6} & -1 & -\frac{39}{6} \end{array}$$

Pivot in kolom 1 is getal $a_{i_0\,1} \neq 0$.

Voor numerieke stabiliteit, $i_0 = \text{argmax}_i\, |a_{i\,1}|$.

Intermezzo III: Vegen

Los op door volledig vegen

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 5 & 0 & 17 \\ 7 & 2 & -1 & 15 \end{array}$$

Vind **pivot** in de 1ste kolom
schaal en veeg de 1ste kolom
(op de pivot na)

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & \frac{5}{6} & 0 & \frac{17}{6} \\ 0 & -\frac{23}{6} & -1 & -\frac{39}{6} \end{array}$$

Vind pivot in de 2de kolom
schaal en veeg de 2de kolom
(op de pivot na)

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0.5 & 1.5 \\ 1 & 0 & -\frac{5}{12} & \frac{19}{12} \\ 0 & 0 & \frac{11}{12} & \frac{11}{12} \end{array}$$

Pivot in kolom 2 is getal $a_{i_0\,2} \neq 0$ met $a_{i_0\,1} = 0$.
Voor numerieke stabiliteit, $i_0 = \text{argmax}_i \{|a_{i\,2}| \mid a_{i\,1} = 0\}$.

Intermezzo III: Vegen

Los op door volledig vegen

$$\begin{array}{ccr|r} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 5 & 0 & 17 \\ 7 & 2 & -1 & 15 \end{array}$$

Vind **pivot** in de 1ste kolom
schaal en veeg de 1ste kolom
(op de pivot na)

$$\begin{array}{ccr|r} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & \frac{5}{6} & 0 & \frac{17}{6} \\ 0 & -\frac{23}{6} & -1 & -\frac{39}{6} \end{array}$$

Vind pivot in de 2de kolom
schaal en veeg de 2de kolom
(op de pivot na)

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0.5 & 1.5 \\ 1 & 0 & -\frac{5}{12} & \frac{19}{12} \\ 0 & 0 & \frac{11}{12} & \frac{11}{12} \end{array}$$

Vind pivot in de 3de kolom
schaal en veeg de 3de kolom
(op de pivot na)

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Intermezzo III: Vegen

Los op door volledig vegen

$$\begin{array}{ccr|r} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 5 & 0 & 17 \\ 7 & 2 & -1 & 15 \end{array}$$

Vind **pivot** in de 1ste kolom
schaal en veeg de 1ste kolom
(op de pivot na)

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & \frac{5}{6} & 0 & \frac{17}{6} \\ 0 & -\frac{23}{6} & -1 & -\frac{39}{6} \end{array}$$

Vind pivot in de 2de kolom
schaal en veeg de 2de kolom
(op de pivot na)

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0.5 & 1.5 \\ 1 & 0 & -\frac{5}{12} & \frac{19}{12} \\ 0 & 0 & \frac{11}{12} & \frac{11}{12} \end{array}$$

Vind pivot in de 3de kolom
schaal en veeg de 3de kolom
(op de pivot na)

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Rest een triviaal stelsel: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Intermezzo III: Vegen

Opmerking.
Vegen verandert de matrix maar **niet** de oplossing.

Opmerking. Vegen verandert **niet** de rang van de matrix: als we beginnen met de matrix $\mathbf{A}$ en we eindigen met $\widetilde{\mathbf{A}}$ (bijvoorbeeld $\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{I}$) dan is $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\widetilde{\mathbf{A}})$.

Een vierkante matrix $\mathbf{A}$ is inverteerbaar dan en slechts dan als volledig vegen (met pivots) een **permutatie matrix** oplevert (een matrix met in iedere rij en in iedere kolom precies een 1 en de rest 0, een matrix als $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.)

Intermezzo III: Vegen

Partieel vegen.

$+$ Goedkoper (voor $n \times n$ matrix $\approx \frac{2}{3}n^3$ flop)

Volledig vegen.

$-$ Duurder ($\approx \frac{4}{3}n^3$ flop)

$+$ Overzichtelijker.

Voor de overzichtelijkheid lossen we hier lineair programmeringsproblemen hier op middels volledig vegen

Intermezzo III: Vegen

Vegen. Gegeven $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^n$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.

Voor $\alpha \in \mathbb{R}$ geldt:

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ voldoet aan $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_1^\top \mathbf{x} = \beta_1 \\ \mathbf{a}_2^\top \mathbf{x} = \beta_2 \end{array} \right.$ dan en slechts dan

als $\mathbf{x}$ voldoet aan $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_1^\top \mathbf{x} = \beta_1 \\ (\mathbf{a}_2 - \alpha \mathbf{a}_1)^\top \mathbf{x} = \beta_2 - \alpha \beta_1 \end{array} \right.$

Intermezzo III: Vegen

Vegen. Gegeven $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^n$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.

Voor $\alpha \in \mathbb{R}$ geldt:

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ voldoet aan $\begin{cases} \mathbf{a}_1^\top \mathbf{x} = \beta_1 \\ \mathbf{a}_2^\top \mathbf{x} = \beta_2 \end{cases}$ dan en slechts dan

als $\mathbf{x}$ voldoet aan $\begin{cases} \mathbf{a}_1^\top \mathbf{x} = \beta_1 \\ (\mathbf{a}_2 - \alpha \mathbf{a}_1)^\top \mathbf{x} = \beta_2 - \alpha\beta_1 \end{cases}$

Doel. Kies α zodat de nieuwe vector $\mathbf{a}_2 - \alpha\mathbf{a}_1$ een 0 heeft op een 'gewenste plek'.

Intermezzo III: Vegen

Vegen. Gegeven $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^n$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.

Voor $\alpha \in \mathbb{R}$ geldt:

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ voldoet aan $\begin{cases} \mathbf{a}_1^\top \mathbf{x} = \beta_1 \\ \mathbf{a}_2^\top \mathbf{x} = \beta_2 \end{cases}$ dan en slechts dan

als $\mathbf{x}$ voldoet aan $\begin{cases} \mathbf{a}_1^\top \mathbf{x} = \beta_1 \\ (\mathbf{a}_2 - \alpha \mathbf{a}_1)^\top \mathbf{x} = \beta_2 - \alpha\beta_1 \end{cases}$

Vegen kan ook gebruikt worden om de doelfunctie te vereenvoudigen:

Bewering. Stel $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ impliceert $\mathbf{a}_1^\top \mathbf{x} = \beta_1$.

Dan geldt voor iedere $\alpha \in \mathbb{R}$: $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ en $(\mathbf{c} - \alpha \mathbf{a}_1)^\top \mathbf{x}$ nemen op $\mathcal{V}$ het maximum aan in dezelfde $\mathbf{x}$.

Intermezzo III: Vegen

Vegen. Gegeven $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^n$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.

Voor $\alpha \in \mathbb{R}$ geldt:

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ voldoet aan $\begin{cases} \mathbf{a}_1^\mathsf{T}\mathbf{x} = \beta_1 \\ \mathbf{a}_2^\mathsf{T}\mathbf{x} = \beta_2 \end{cases}$ dan en slechts dan

als $\mathbf{x}$ voldoet aan $\begin{cases} \mathbf{a}_1^\mathsf{T}\mathbf{x} = \beta_1 \\ (\mathbf{a}_2 - \alpha\mathbf{a}_1)^\mathsf{T}\mathbf{x} = \beta_2 - \alpha\beta_1 \end{cases}$

Vegen kan ook gebruikt worden om de doelfunctie te vereenvoudigen:

Bewering. Stel $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ impliceert $\mathbf{a}_1^\mathsf{T}\mathbf{x} = \beta_1$.

Dan geldt voor iedere $\alpha \in \mathbb{R}$: $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ en $(\mathbf{c} - \alpha\mathbf{a}_1)^\mathsf{T}\mathbf{x}$ nemen op $\mathcal{V}$ het maximum aan in dezelfde $\mathbf{x}$.

Bewijs. $(\mathbf{c} - \alpha\mathbf{a}_1)^\mathsf{T}\mathbf{x} = \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} - \beta_1$

Intermezzo III: Vegen

Vegen. Gegeven $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^n$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.

Voor $\alpha \in \mathbb{R}$ geldt:

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ voldoet aan $\begin{cases} \mathbf{a}_1^\top \mathbf{x} = \beta_1 \\ \mathbf{a}_2^\top \mathbf{x} = \beta_2 \end{cases}$ dan en slechts dan

als $\mathbf{x}$ voldoet aan $\begin{cases} \mathbf{a}_1^\top \mathbf{x} = \beta_1 \\ (\mathbf{a}_2 - \alpha \mathbf{a}_1)^\top \mathbf{x} = \beta_2 - \alpha\beta_1 \end{cases}$

Werkt dit ook voor ongelijkheden?

Intermezzo III: Vegen

Vegen. Gegeven $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^n$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.

Voor $\alpha \in \mathbb{R}$ geldt dan?

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ voldoet aan $\begin{cases} \mathbf{a}_1^\top \mathbf{x} \leq \beta_1 \\ \mathbf{a}_2^\top \mathbf{x} \leq \beta_2 \end{cases}$ dan en slechts dan

als $\mathbf{x}$ voldoet aan $\begin{cases} \mathbf{a}_1^\top \mathbf{x} \leq \beta_1 \\ (\mathbf{a}_2 - \alpha \mathbf{a}_1)^\top \mathbf{x} \leq \beta_2 - \alpha\beta_1 \end{cases}$

Intermezzo III: Vegen

Vegen. Gegeven $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^n$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.

Voor $\alpha \leq$ geldt:

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ voldoet aan $\begin{cases} \mathbf{a}_1^\top \mathbf{x} \leq \beta_1 \\ \mathbf{a}_2^\top \mathbf{x} \leq \beta_2 \end{cases}$ dan

voldoet $\mathbf{x}$ aan $\begin{cases} \mathbf{a}_1^\top \mathbf{x} \leq \beta_1 \\ (\mathbf{a}_2 - \alpha \mathbf{a}_1)^\top \mathbf{x} \leq \beta_2 - \alpha \beta_1 \end{cases}$

Intermezzo III: Vegen

Vegen. Gegeven $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^n$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.

Voor $\alpha \leq$ geldt:

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ voldoet aan $\begin{cases} \mathbf{a}_1^\top \mathbf{x} \leq \beta_1 \\ \mathbf{a}_2^\top \mathbf{x} \leq \beta_2 \end{cases}$ dan

voldoet $\mathbf{x}$ aan $\begin{cases} \mathbf{a}_1^\top \mathbf{x} \leq \beta_1 \\ (\mathbf{a}_2 - \alpha \mathbf{a}_1)^\top \mathbf{x} \leq \beta_2 - \alpha\beta_1 \end{cases}$

Strategie. Vervang

iedere 'gecompliceerde' **ongelijkheid**

door een 'gecompliceerde' **gelijkheid**

plus een eenvoudige ongelijkheid

middels een nieuwe zgn **slack** variabele.

Intermezzo III: Vegen

Vegen. Gegeven $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^n$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.

Voor $\alpha \leq$ geldt:

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ voldoet aan $\begin{cases} \mathbf{a}_1^T\mathbf{x} \leq \beta_1 \\ \mathbf{a}_2^T\mathbf{x} \leq \beta_2 \end{cases}$ dan

voldoet $\mathbf{x}$ aan $\begin{cases} \mathbf{a}_1^T\mathbf{x} \leq \beta_1 \\ (\mathbf{a}_2 - \alpha\mathbf{a}_1)^T\mathbf{x} \leq \beta_2 - \alpha\beta_1 \end{cases}$

Strategie. Vervang

iedere 'gecompliceerde' **ongelijkheid**

door een 'gecompliceerde' **gelijkheid**

plus een eenvoudige ongelijkheid

middels een nieuwe zgn **slack** variabele.

Voorbeeld.

$$\begin{cases} 3\,x_1 - 7\,x_2 + 4x_3 = 6 \\ 2\,x_1 + 5\,x_2 - x_3 \leq 9 \\ 4x_1 - 6\,x_2 + 3x_3 \leq 16 \\ \ldots \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3\,x_1 - 7\,x_2 + 4x_3 = 6 \\ 2\,x_1 + 5\,x_2 - x_3 + x_4 = 9 \\ 4x_1 - 6\,x_2 + 3x_3 \leq 16 \\ \ldots, \quad x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Intermezzo III: Vegen

Vegen. Gegeven $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^n$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.

Voor $\alpha \leq$ geldt:

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ voldoet aan $\begin{cases} \mathbf{a}_1^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \leq \beta_1 \\ \mathbf{a}_2^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \leq \beta_2 \end{cases}$ dan

voldoet $\mathbf{x}$ aan $\begin{cases} \mathbf{a}_1^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \leq \beta_1 \\ (\mathbf{a}_2 - \alpha\mathbf{a}_1)^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \leq \beta_2 - \alpha\beta_1 \end{cases}$

Strategie. Vervang

iedere 'gecompliceerde' **ongelijkheid**

door een 'gecompliceerde' **gelijkheid**

plus een eenvoudige ongelijkheid

middels een nieuwe zgn **slack** variabele.

Voorbeeld.

$$\begin{cases} 3\,x_1 - 7\,x_2 + 4x_3 = 6 \\ 2\,x_1 + 5\,x_2 - x_3 \leq 9 \\ 4x_1 - 6\,x_2 + 3x_3 \leq 16 \\ \ldots \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3\,x_1 - 7\,x_2 + 4x_3 = 6 \\ 2\,x_1 + 5\,x_2 - x_3 + x_4 = 9 \\ 4x_1 - 6\,x_2 + 3x_3 + x_5 = 16 \\ \ldots, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Intermezzo III: Vegen

Vegen. Gegeven $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^n$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.

Voor $\alpha \leq$ geldt:

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ voldoet aan $\begin{cases} \mathbf{a}_1^\top \mathbf{x} \leq \beta_1 \\ \mathbf{a}_2^\top \mathbf{x} \leq \beta_2 \end{cases}$ dan

voldoet $\mathbf{x}$ aan $\begin{cases} \mathbf{a}_1^\top \mathbf{x} \leq \beta_1 \\ (\mathbf{a}_2 - \alpha \mathbf{a}_1)^\top \mathbf{x} \leq \beta_2 - \alpha\beta_1 \end{cases}$

Strategie. Vervang

iedere 'gecompliceerde' **ongelijkheid**

door een 'gecompliceerde' **gelijkheid**

plus een eenvoudige ongelijkheid

middels een nieuwe zgn **slack** variabele.

MOTTO: *Slacks voor zorgeloos vegen*

A) $\mathcal{V}_A$ is de collectie $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ waarvoor

$$\left\{\begin{array}{l} 3\,x_1 - 7\,x_2 + 4x_3 = 6 \\ 2\,x_1 + 5\,x_2 - x_3 \leq 9 \\ 4x_1 - 6\,x_2 + 3x_3 \leq 16 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 4 & -6 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{array}{c} = \\ \leq \\ \leq \\ \leq \\ \leq \\ \leq \end{array} \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

B) Voer **slack** variabelen in: $\mathcal{V}_B$ is de collectie $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5$ waarvoor

$$\left\{\begin{array}{l} 3\,x_1 - 7\,x_2 + 4x_3 = 6 \\ 2\,x_1 + 5\,x_2 - x_3 + x_4 = 9 \\ 4x_1 - 6\,x_2 + 3x_3 + x_5 = 16 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \\ x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -6 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \begin{array}{c} = \\ = \\ = \\ \leq \\ \leq \\ \leq \\ \leq \\ \leq \end{array} \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

C) $\mathcal{V}_C = \mathcal{V}_B$ is de collectie $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5$ waarvoor $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$ en

$$\left\{\begin{array}{l} 3\,x_1 - 7\,x_2 + 4x_3 = 6 \\ 2\,x_1 + 5\,x_2 - x_3 + x_4 = 9 \\ 4x_1 - 6\,x_2 + 3x_3 + x_5 = 16 \end{array}\right.$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -6 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix}$$

A) $\mathcal{V}_A$ is de collectie $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ waarvoor

$$\begin{cases} 3\,x_1 - 7\,x_2 + 4x_3 = 6 \\ 2\,x_1 + 5\,x_2 - x_3 \leq 9 \\ 4x_1 - 6\,x_2 + 3x_3 \leq 16 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 4 & -6 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} = \\ \leq \\ \leq \\ \leq \\ \leq \\ \leq \end{matrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

C) $\mathcal{V}_C = \mathcal{V}_B$ is de collectie $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5$ waarvoor $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$ en

$$\begin{cases} 3\,x_1 - 7\,x_2 + 4x_3 = 6 \\ 2\,x_1 + 5\,x_2 - x_3 + x_4 = 9 \\ 4x_1 - 6\,x_2 + 3x_3 + x_5 = 16 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -6 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Ieder punt $(x_1, x_2, x_3)^\top$ in $\mathcal{V}_A$ correspondeert met precies een punt $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^\top$ in $\mathcal{V}_C$
(gegeven x_1, x_2, x_3, liggen x_4 en x_5 vast).

In het bijzonder:

Stelling. Ieder hoekpunt van $\mathcal{V}_A$ correspondeert met precies een hoekpunt van $\mathcal{V}_C$.

A) $\mathcal{V}_A$ is de collectie $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ waarvoor

$$\begin{cases} 3\,x_1 - 7\,x_2 + 4x_3 = 6 \\ 2\,x_1 + 5\,x_2 - x_3 \le 9 \\ 4x_1 - 6\,x_2 + 3x_3 \le 16 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 4 & -6 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} = \\ \le \\ \le \\ \le \\ \le \\ \le \end{matrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

C) $\mathcal{V}_C = \mathcal{V}_B$ is de collectie $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5$ waarvoor $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$ en

$$\begin{cases} 3\,x_1 - 7\,x_2 + 4x_3 = 6 \\ 2\,x_1 + 5\,x_2 - x_3 + x_4 = 9 \\ 4x_1 - 6\,x_2 + 3x_3 + x_5 = 16 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -6 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{V}_A$ is de projectie van $\mathcal{V}_C$ op de (x_1, x_2, x_3)-coördinaten:

$$\mathcal{V}_A = \{(x_1, x_2, x_3)^\mathsf{T} \mid (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^\mathsf{T} \in \mathcal{V}_C\}$$

A) $\mathcal{V}_A$ is de collectie $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ waarvoor

$$\begin{cases} 3\,x_1 - 7\,x_2 + 4x_3 = 6 \\ 2\,x_1 + 5\,x_2 - x_3 \leq 9 \\ 4x_1 - 6\,x_2 + 3x_3 \leq 16 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 4 & -6 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} = \\ \leq \\ \leq \\ \leq \\ \leq \\ \leq \end{matrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

C) $\mathcal{V}_C = \mathcal{V}_B$ is de collectie $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5$ waarvoor $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$ en

$$\begin{cases} 3\,x_1 - 7\,x_2 + 4x_3 = 6 \\ 2\,x_1 + 5\,x_2 - x_3 + x_4 = 9 \\ 4x_1 - 6\,x_2 + 3x_3 + x_5 = 16 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -6 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{V}_A$ is de projectie van $\mathcal{V}_C$ op de (x_1, x_2, x_3)-coördinaten:

$$\mathcal{V}_A = \{(x_1, x_2, x_3)^\mathsf{T} \mid (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^\mathsf{T} \in \mathcal{V}_C\}$$

Voor bijvoorbeeld $\mathbf{c} = (-1, 4, 1)^\mathsf{T}$ is

$$\text{maximalizeer } \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \text{ voor } \mathbf{x} \in \mathcal{V}_A$$

equivalent met

$$\text{maximalizeer } \mathbf{c}_C^\mathsf{T}\mathbf{x} \text{ voor } \mathbf{x} \text{ in } \mathcal{V}_C \text{ en } \mathbf{c}_C \equiv (-1, 4, 1, 0, 0)^\mathsf{T}.$$

Wat als er geen positiviteitsrestrictie zit op bv x_1?

Wat als er geen positiviteitsrestrictie zit op bv x_1?

Elimineer x_1: komen we op terug

Program

- Optimaliseren
- Lineaire programmering
- Voorbeelden
- Polytopen
- Intermezzo: rang
- Intermezzo: notatie
- Hoekpunten
- Intermezzo: vegen
- Standaard vorm
- Simplex methode
- Positiviteitsristricties
- Het eerste hoekpunt

Lineair programmering. Los op

$$\max\ \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$$
$$\text{zodat } \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}.$$

Lineair programmering in standaardvorm. Los op

$$\max\ \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$$
$$\text{zodat } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ en } \mathbf{x} \ge \mathbf{0}.$$

Breng op standaard vorm door

1) **slack** variabelen in te voeren:

Beperking wordt: $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ met $x_j \ge 0$ alle $j \in J$,

waarbij $J \subset \{1, \ldots, n\}$ en $x_j \in \mathbb{R}$ voor $j \notin J$

2) en de x_j te elimineren waarvoor $j \notin J$

Opmerking. Voor een algemeen LP mogen ongelijkheden in $\mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}$ ook gelijkheden zijn. In de standaardvorm betreft $\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$ **alle** coördinaten van $\mathbf{x}$.

Lineair programmering. Los op

$$\max \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$$
$$\text{zodat } \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}.$$

Lineair programmering in standaardvorm. Los op

$$\max \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$$
$$\text{zodat } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \text{ en } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Breng op standaard vorm door

1) **slack** variabelen in te voeren:

Beperking wordt: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ met $x_j \geq 0$ alle $j \in J$,

waarbij $J \subset \{1, \ldots, n\}$ en $x_j \in \mathbb{R}$ voor $j \notin J$

2) en de x_j te elimineren waarvoor $j \notin J$

Opmerking. De matrix $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\text{stand}}$ in standaardvorm is geconstrueerd uit de matrix $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\text{lp}}$ voor het algemene LP-probleem. De matrices zijn echter **niet** hetzelfde:

$\mathbf{A}_{\text{lp}}$ is smal en hoog ($m \times k$ met, gewoonlijk, $m > k$),
$\mathbf{A}_{\text{stand}}$ is breed en laag ($\ell \times n$ met, gewoonlijk, $\ell < n$, $m = n = k + \ell$).

Lineair programmering. Los op

$$\max \ \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}$$
$$\text{zodat } \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}.$$

Lineair programmering in standaardvorm. Los op

$$\max \ \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}$$
$$\text{zodat } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \text{ en } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Breng op standaard vorm door

1) **slack** variabelen in te voeren:

Beperking wordt: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ met $x_j \geq 0$ alle $j \in J$,

waarbij $J \subset \{1, \ldots, n\}$ en $x_j \in \mathbb{R}$ voor $j \notin J$

2) en de x_j te elimineren waarvoor $j \notin J$

Naar standaardvorm:

- *Slacks voor zorgeloos vegen*
- *Elimineer mogelijk niet positieve elementen*

Lineair programmering. Los op

$$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$$

$$\text{zodat } \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}.$$

Stelling. Als 1) $\mathcal{V}$ een hoekpunt heeft en
2) het maximum wordt aangenomen op $\mathcal{V}$
dan wordt het maximum aangenomen in een hoekpunt.

Oplosmethode.

- Vind een hoekpunt van $\mathcal{V}$
- Herhaal
  - Vind vanuit dat hoekpunt een richting langs de rand van $\mathcal{V}$ waar langs de doelfunctie groter wordt. **Stop** als er niet zo'n richting is.
  - Loop vanuit dat hoekpunt in die richting tot een volgend hoekpunt van $\mathcal{V}$

Stelling. Het hoekpunt waarin gestopt wordt is 'n maximalizerende $\mathbf{x}$ ('n $\mathbf{x}$ die het lp-probleem oplost).

Lineair programmering. Los op

$$\max\ \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}$$

$$\text{zodat } \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}.$$

Stelling. Als 1) $\mathcal{V}$ een hoekpunt heeft en
2) het maximum wordt aangenomen op $\mathcal{V}$
dan wordt het maximum aangenomen in een hoekpunt.

Oplosmethode.

Voor het vinden van

"hoekpunten van $\mathcal{V}$ en
richtingen langs de rand van $\mathcal{V}$"

moeten stelsels (met $\mathbf{A}_{\mathrm{lp}}(I,:)$ of met $\mathbf{A}_{\mathrm{stand}}(:,J)$) opgelost worden. Dit gaat middels vegen. Daarom is het handig om het lineair programmeringsprobleem eerst op standaardvorm te brengen.

Lineair programmering in standaardvorm. Los op

$$\max\ \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$$
$$\text{zodat } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ en } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Hier is $\quad$ $\mathbf{A}$ een $\ell \times n$ matrix van rang ℓ, $\ell < n$

$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^\ell$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$

en wordt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ gezocht.

Schrijf $\mathcal{V} \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ en } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$.

Stelling. Als 1) $\mathcal{V} \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ en } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \neq \emptyset$ en
2) maximum $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ wordt aangenomen op $\mathcal{V}$

dan wordt het max. aangenomen in een hoekpunt van $\mathcal{V}$.

Lineair programmering in standaardvorm. Los op

$$\max\ \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$$
$$\text{zodat } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ en } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Stelling. Als 1) $\mathcal{V} \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ en } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \neq \emptyset$ en
2) maximum $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ wordt aangenomen op $\mathcal{V}$

dan wordt het max. aangenomen in een hoekpunt van $\mathcal{V}$.

Simplex methode.

- Breng het lp-probleem op standaardvorm.
- Vind een hoekpunt van $\mathcal{V}$.
- Herhaal
  - Vind vanuit dat hoekpunt een richting langs de rand van $\mathcal{V}$ waarin de doelfunctie groter wordt. **Stop** als er niet zo'n richting is.
  - Loop vanuit dat hoekpunt in die richting tot een volgend hoekpunt van $\mathcal{V}$

Stelling. Het hoekpunt waarin gestopt wordt is 'n maximalizerende $\mathbf{x}$ ($\mathbf{x}$ lost het lp-probleem in standaardvorm op).

Lineair programmering in standaardvorm. Los op

$$\max\ \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$$

$$\text{zodat } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ en } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Stelling. Als 1) $\mathcal{V} \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ en } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \neq \emptyset$ en
2) maximum $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ wordt aangenomen op $\mathcal{V}$

dan wordt het max. aangenomen in een hoekpunt van $\mathcal{V}$.

Hoe vind je een hoekpunt in $\mathcal{V}$?

$\mathbf{A}$ is $\ell \times n$, $\ell < n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^\ell$, $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$.

Terminologie. $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ is een **basispunt** voor $\mathcal{V}$ als er een rij J is van ℓ verschillende getallen uit $\{1, 2, \ldots, n\}$ waarvoor

- $\mathbf{A}(:, J)$ inverteerbaar is,
- $\mathbf{A}(:, J)\mathbf{p}(J) = \mathbf{b}$,
- $\mathbf{p}(j) = 0$ voor iedere $j \notin J$.

J wordt een **basis** genoemd.

Stelling. $\mathbf{p}$ is een hoekpunt van $\mathcal{V}$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{p} \geq \mathbf{0} \ \ \& \ \ \mathbf{p} \text{ is een basispunt voor } \mathcal{V}.$$

$\mathbf{A}$ is $\ell \times n$, $\ell < n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^\ell$, $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$.

Terminologie. $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ is een **basispunt** voor $\mathcal{V}$ als er een rij J is van ℓ verschillende getallen uit $\{1, 2, \ldots, n\}$ waarvoor

- $\mathbf{A}(:, J)$ inverteerbaar is,
- $\mathbf{A}(:, J)\mathbf{p}(J) = \mathbf{b}$,
- $\mathbf{p}(j) = 0$ voor iedere $j \notin J$.

J wordt een **basis** genoemd.

Stelling. $\mathbf{p}$ is een hoekpunt van $\mathcal{V}$

$\Leftrightarrow \quad \mathbf{p} \geq \mathbf{0}$ & $\mathbf{p}$ is een basispunt voor $\mathcal{V}$.

Als het 'veeg' proces voor de vergelijking

$$\mathbf{A}(:, J)\mathbf{p}(J) = \mathbf{b}$$

uitvoerbaar is dan is $\mathbf{A}(:, J)$ inverteerbaar.
Dit is efficiënt en levert gelijk een basispunt $\mathbf{p}$.

Met volledig vegen en J geschikt nummeren is

$\mathbf{A}(:, J) = \mathbf{I}_\ell$ en is $\mathbf{p}(J) = \mathbf{b}$ en $\mathbf{p}(j) = 0$ als $j \notin J$

$\mathbf{A}$ is $\ell \times n$, $\ell < n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{\ell}$, $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$.

Terminologie. $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ is een **basispunt** voor $\mathcal{V}$ als
er een rij J is van ℓ verschillende getallen uit $\{1, 2, \ldots, n\}$
waarvoor
- $\mathbf{A}(:, J)$ inverteerbaar is,
- $\mathbf{A}(:, J)\mathbf{p}(J) = \mathbf{b}$,
- $\mathbf{p}(j) = 0$ voor iedere $j \notin J$.

Stelling. $\mathbf{p}$ is een hoekpunt van $\mathcal{V}$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{p} \geq \mathbf{0} \;\;\&\;\; \mathbf{p} \text{ is een basispunt voor } \mathcal{V}.$$

Voorbeeld. $\mathcal{V}$ bestaat uit $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^6$ waarvoor

$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 + x_5 = 9 \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_6 = 16 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

Dan is $\ell = 3$, $n = 6$, $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$,

waarbij $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -6 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ en $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix}$.

$\mathbf{A}$ is $\ell \times n$, $\ell < n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^\ell$, $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ en $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$.

Terminologie. $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ is een **basispunt** voor $\mathcal{V}$ als er een rij J is van ℓ verschillende getallen uit $\{1, 2, \ldots, n\}$ waarvoor

- $\mathbf{A}(:, J)$ inverteerbaar is,
- $\mathbf{A}(:, J)\mathbf{p}(J) = \mathbf{b}$,
- $\mathbf{p}(j) = 0$ voor iedere $j \notin J$.

Stelling. $\mathbf{p}$ is een hoekpunt van $\mathcal{V}$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{p} \geq \mathbf{0} \;\; \& \;\; \mathbf{p} \text{ is een basispunt voor } \mathcal{V}.$$

Voorbeeld. $\ell = 3$, $n = 6$, $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$,

waarbij $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -6 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ en } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{A}$ is $\ell \times n$, $\ell < n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^\ell$, $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$.

Terminologie. $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ is een **basispunt** voor $\mathcal{V}$ als er een rij J is van ℓ verschillende getallen uit $\{1, 2, \ldots, n\}$ waarvoor

- $\mathbf{A}(:, J)$ inverteerbaar is,
- $\mathbf{A}(:, J)\mathbf{p}(J) = \mathbf{b}$,
- $\mathbf{p}(j) = 0$ voor iedere $j \notin J$.

Stelling. $\mathbf{p}$ is een hoekpunt van $\mathcal{V}$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{p} \geq \mathbf{0} \ \ \& \ \ \mathbf{p} \text{ is een basispunt voor } \mathcal{V}.$$

Voorbeeld. $\ell = 3$, $n = 6$, $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$,

waarbij $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -6 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ en } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{A}(:, [4, 5, 6]) = \mathbf{I}_3$ is inverteerbaar,

$\mathbf{p} = (0, 0, 0, 6, 9, 16)^\mathsf{T}$ is een hoekpunt.

$\mathbf{A}$ is $\ell \times n$, $\ell < n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^\ell$, $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$.

Terminologie. $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ is een **basispunt** voor $\mathcal{V}$ als er een rij J is van ℓ verschillende getallen uit $\{1, 2, \ldots, n\}$ waarvoor

- $\mathbf{A}(:, J)$ inverteerbaar is,
- $\mathbf{A}(:, J)\mathbf{p}(J) = \mathbf{b}$,
- $\mathbf{p}(j) = 0$ voor iedere $j \notin J$.

Stelling. $\mathbf{p}$ is een hoekpunt van $\mathcal{V}$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{p} \geq \mathbf{0} \ \ \& \ \ \mathbf{p} \text{ is een basispunt voor } \mathcal{V}.$$

Voorbeeld. $\ell = 3$, $n = 6$, $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$,

waarbij $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -6 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ en } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{A}(:, [2, 3, 4])$ is inverteerbaar,

$\mathbf{p} = (0, 43/9, 134/9, -181/9, 0, 0)^{\mathsf{T}}$ is een basispunt, geen hoekpunt.

$\mathbf{A}$ is $\ell \times n$, $\ell < n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^\ell$, $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ en } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$.

Terminologie. $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ is een **basispunt** voor $\mathcal{V}$ als
er een rij J is van ℓ verschillende getallen uit $\{1, 2, \ldots, n\}$
waarvoor
- $\mathbf{A}(:, J)$ inverteerbaar is,
- $\mathbf{A}(:, J)\mathbf{p}(J) = \mathbf{b}$,
- $\mathbf{p}(j) = 0$ voor iedere $j \notin J$.

Stelling. $\mathbf{p}$ is een hoekpunt van $\mathcal{V}$

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$ & $\mathbf{p}$ is een basispunt voor $\mathcal{V}$.

Opmerking. Als $\mathbf{p}$ een basispunt is voor $\mathcal{V}$ dan is
$\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{A}(:, J)\mathbf{p}(J) = \mathbf{b}$ en dus is $\mathbf{p} \in \mathcal{V}$ als ook nog $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$.

Opmerking. Als J uit minder dan ℓ verschillende getallen
bestaat en
- $\mathbf{A}(:, J)$ heeft volle rang,
- $\mathbf{A}(:, J)\mathbf{p}(J) = \mathbf{b}$,
- $\mathbf{p}(j) = 0$ voor iedere $j \notin J$,

en $\mathbf{A}$ heeft rang ℓ (volle rang), dan kan J worden aangevuld tot een basis.

$\mathbf{A}$ is $\ell \times n$, $\ell < n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^\ell$, $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ en $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$.

Terminologie. $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ is een **basispunt** voor $\mathcal{V}$ als er een rij J is van ℓ verschillende getallen uit $\{1, 2, \ldots, n\}$ waarvoor

- $\mathbf{A}(:, J)$ inverteerbaar is,
- $\mathbf{A}(:, J)\mathbf{p}(J) = \mathbf{b}$,
- $\mathbf{p}(j) = 0$ voor iedere $j \notin J$.

Stelling. $\mathbf{p}$ is een hoekpunt van $\mathcal{V}$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{p} \geq \mathbf{0} \;\;\&\;\; \mathbf{p} \text{ is een basispunt voor } \mathcal{V}.$$

Bewijs. $\mathbf{p} \in \mathcal{V}$. Zij J_p een nummering van $\{j \mid \mathbf{p}(j) > 0\}$.

Stel $\exists \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ zodat $\mathbf{A}(:, J_p)\mathbf{r}(J_p) = \mathbf{0}$ en $\mathbf{r}(j) = 0$ $(j \notin J_p)$.

Omdat $\mathbf{p}(j) > 0$ voor alle $j \in J_p$ is er een $\varepsilon > 0$
zodat $\quad \mathbf{p}(j) \pm \varepsilon \mathbf{r}(j) > 0 \quad$ voor alle $j \in J_p$.
Omdat $\mathbf{A}(\mathbf{p} \pm \varepsilon \mathbf{r}) = \mathbf{A}(:, J_p)(\mathbf{p}(J_p) \pm \varepsilon \mathbf{r}(J_p)) = \mathbf{b}$ is $\mathbf{p} \pm \varepsilon \mathbf{r} \in \mathcal{V}$.

Verder is $\mathbf{p} = \frac{1}{2}((\mathbf{p} + \varepsilon \mathbf{r}) + (\mathbf{p} - \varepsilon \mathbf{r}))$. Dus,

$\mathbf{p}$ geen hoekpunt $\;\Leftrightarrow \exists \mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ met $\mathbf{A}(:, J_p)\mathbf{r}(J_p) = \mathbf{0}$

$$\Leftrightarrow \mathbf{A}(:, J_p) \text{ heeft geen volle rang.}$$

$\mathbf{A}$ is $\ell \times n$, $\ell < n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^\ell$, $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$.

Terminologie. $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ is een **basispunt** voor $\mathcal{V}$ als er een rij J is van ℓ verschillende getallen uit $\{1, 2, \ldots, n\}$ waarvoor

- $\mathbf{A}(:, J)$ inverteerbaar is,
- $\mathbf{A}(:, J)\mathbf{p}(J) = \mathbf{b}$,
- $\mathbf{p}(j) = 0$ voor iedere $j \notin J$.

Stelling. $\mathbf{p}$ is een hoekpunt van $\mathcal{V}$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{p} \geq \mathbf{0} \;\; \& \;\; \mathbf{p} \text{ is een basispunt voor } \mathcal{V}.$$

Stelling. $\mathcal{V} \neq \emptyset \;\Rightarrow \mathcal{V}$ heeft minstens een hoekpunt.

Opmerking. Het algoritme dat we zullen geven om een maximaliserende vector uit te rekenen bewijst tevens deze stelling en de volgende. Een korter (maar niet constructief bewijs) staat op de volgende twee transparanten.

$\mathbf{A}$ is $\ell \times n$, $\ell < n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^\ell$, $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$.

Terminologie. $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ is een **basispunt** voor $\mathcal{V}$ als er een rij J is van ℓ verschillende getallen uit $\{1, 2, \ldots, n\}$ waarvoor

- $\mathbf{A}(:, J)$ inverteerbaar is,
- $\mathbf{A}(:, J)\mathbf{p}(J) = \mathbf{b}$,
- $\mathbf{p}(j) = 0$ voor iedere $j \notin J$.

Stelling. $\mathbf{p}$ is een hoekpunt van $\mathcal{V}$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{p} \geq \mathbf{0} \ \ \& \ \ \mathbf{p} \text{ is een basispunt voor } \mathcal{V}.$$

Stelling. $\mathcal{V} \neq \emptyset \ \Rightarrow \mathcal{V}$ heeft minstens een hoekpunt.

Bewijs. Zij $\mathbf{p} \in \mathcal{V}$ met $J_p \equiv \{j \mid \mathbf{p}(j) \neq 0\}$ minimaal.
Stel $\mathbf{p}$ is geen hoekpunt.
Dan is er er een $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ met $\mathbf{A}(\mathbf{p} + \varepsilon\mathbf{r}) = \mathbf{b}$ voor alle ε klein

en $\mathbf{r}(j) = 0$ als $\mathbf{p}(j) = 0$.

Met $\varepsilon_0 = -\max\{\mathbf{p}(j)/|\mathbf{r}(j)| \mid j \notin J_p\}$ zijn beide vectoren $\mathbf{p} + \varepsilon_0\mathbf{r}$ en $\mathbf{p} - \varepsilon_0\mathbf{r}$ in $\mathcal{V}$, maar een van de vectoren heeft een coördinaat $j \in J_p$ gelijk aan 0. Blijkbaar was J_p niet minimaal. Dus $\mathbf{p}$ is een hoekpunt.

$\mathbf{A}$ is $\ell \times n$, $\ell < n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^\ell$, $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$.

Terminologie. $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ is een **basispunt** voor $\mathcal{V}$ als
er een rij J is van ℓ verschillende getallen uit $\{1, 2, \ldots, n\}$
waarvoor
- $\mathbf{A}(:, J)$ inverteerbaar is,
- $\mathbf{A}(:, J)\mathbf{p}(J) = \mathbf{b}$,
- $\mathbf{p}(j) = 0$ voor iedere $j \notin J$.

Stelling. $\mathcal{V} \neq \emptyset \;\Rightarrow \mathcal{V}$ heeft minstens een hoekpunt.

Stelling. Als 1) $\mathcal{V} \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \neq \emptyset$ en
2) maximum $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ wordt aangenomen op $\mathcal{V}$
dan wordt het max. aangenomen in een hoekpunt van $\mathcal{V}$.

Bewijs. Stel $\mathbf{x}_{\max} \in \mathcal{V}$ en $M \equiv \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}_{\max} \geq \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ alle $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$.

Beschouw $\mathcal{V}_{\max} \equiv \{\mathbf{x} \mid \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} = M, \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$.

Omdat $\mathbf{x}_{\max} \in \mathcal{V}_{\max}$ is $\mathcal{V}_{\max} \neq \emptyset$.

Dus $\mathcal{V}_{\max}$ heeft een hoek. Dit is ook een hoek van $\mathcal{V}$.

$\mathbf{A}$ is $\ell \times n$, $\ell < n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^\ell$, $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$.

Met $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ en $M \equiv \max\{\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathcal{V}\}$, zij

$$\mathcal{V}_{\max} \equiv \{\mathbf{x} \in \mathcal{V} \mid \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} = M\} = \left\{\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \mid \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{c}^\mathsf{T} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ M \end{bmatrix}\right\}.$$

$\mathcal{V}_{\max}$ is de verzameling van de maximaliserende vectoren, dat wil zeggen de oplossingen van het lineair programmeringsprobleem (in standaard vorm). Het algoritme van de simplex methode dat we zullen bespreken berekent in feite een hoekpunt van $\mathcal{V}_{\max}$ als $M < \infty$. De methode detecteerd ook $M = \infty$.

Voor het schrijfgemak noteren we in onze voorbeelden het

probleem $\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{c}^\mathsf{T} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ M \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ als volgt.

Notatie aan de hand van een voorbeeld.

Voorbeeld. Maximaliseer $5x_1 + 4x_2 + 26x_3$

met $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$ zodat

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 10x + 3 &\leq 5 \\ 4x_1 + x_2 + 2x + 3 &\leq 11 \\ 3x_1 + 4x_2 + 16x + 3 &\leq 8 \end{aligned}$$

Of, na invoeren van slack variabelen, equivalent hiermee,

$$\text{maximaliseer } \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$$

met $\mathbf{x}$ zodat $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_6)^\mathsf{T} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Hierbij is

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 16 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ 8 \end{bmatrix}, \ \mathbf{c}^\mathsf{T} = (5, 4, 26, 0, 0, 0)$$

Notatie.

$$\begin{array}{cccccc|c} 2 & 3 & 10 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 11 \\ 3 & 4 & 16 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ \hline 5 & 4 & 26 & 0 & 0 & 0 & M \end{array} \qquad \mathbf{x} \geq 0,$$

Voor het schrijfgemak noteren we in onze voorbeelden het

probleem $\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{c}^\top \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ M \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ als volgt.

Notatie aan de hand van een voorbeeld.

Voorbeeld. Maximaliseer $5x_1 + 4x_2 + 26x_3$

met $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$ zodat

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 10x + 3 &\leq 5 \\ 4x_1 + x_2 + 2x + 3 &\leq 11 \\ 3x_1 + 4x_2 + 16x + 3 &\leq 8 \end{aligned}$$

Notatie.

$$\begin{array}{cccccc|c} 2 & 3 & 10 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 11 \\ 3 & 4 & 16 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ \hline 5 & 4 & 26 & 0 & 0 & 0 & M \end{array} \qquad \mathbf{x} \geq 0,$$

Opmerking. $\mathbf{c}^\top$ staat onder de streep, $(\mathbf{b}^\top, M)^\top$ staat rechts. We behandelen in het veegproces het (onbekende) getal M als een concreet getal. $\mathbf{x}$ komt niet expliciet voor in deze beschrijving behalve om aan te geven welke coördinaten van $\mathbf{x}$ positief moeten zijn (in ons voorbeeld zijn ze dat allemaal). In het veegproces kiezen we onze pivots uitsluitend in het linker bovenblok, maar $(\mathbf{b}^\top, M)^\top$ en $\mathbf{c}^\top$ doen wel mee in het veegproces.

$\mathbf{A}$ is $\ell \times n$, $\ell < n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^\ell$, $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ en } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$.

Met $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ en $M \equiv \max\{\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathcal{V}\}$, zij

$$\mathcal{V}_{\max} \equiv \{\mathbf{x} \in \mathcal{V} \mid \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} = M\} = \left\{\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \mid \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{c}^\mathsf{T} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ M \end{bmatrix}\right\}.$$

Door te vegen veranderen $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ en M maar

Stelling. Door te vegen veranderen $\mathcal{V}$ en $\mathcal{V}_{\max}$ niet.

Bewijs. $\mathcal{V}$: merk op dat met $\nu, \alpha \in \mathbb{R}$, $\nu \neq 0$ geldt

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{a}_1^\mathsf{T}\mathbf{x} = \beta_1 \\ \mathbf{a}_2^\mathsf{T}\mathbf{x} = \beta_2 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{\nu}\mathbf{a}_1^\mathsf{T}\mathbf{x} = \frac{1}{\nu}\beta_1 \\ (\mathbf{a}_2 - \alpha\mathbf{a}_1)^\mathsf{T}\mathbf{x} = \beta_2 - \alpha\beta_1 \end{array}\right. \qquad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n).$$

Als (i_0, j_0) de pivot is in een veegstap dan is bovenstaande van toepassing met $\mathbf{a}_1^\mathsf{T} = \mathbf{A}(i_0, :)$ en $\mathbf{a}_2^\mathsf{T}$ 'n andere rij van $\mathbf{A}$.

$\mathcal{V}_{\max}$: behandel (de onbekende) M als een getal en pas het resultaat toe met $\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{c}^\mathsf{T} \end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ M \end{bmatrix}$ in plaats van $\mathbf{A}$, resp. $\mathbf{b}$.

$\mathbf{A}$ is $\ell \times n$, $\ell < n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^\ell$, $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ en } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$.

Met $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ en $M \equiv \max\{\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathcal{V}\}$, zij

$$\mathcal{V}_{\max} \equiv \{\mathbf{x} \in \mathcal{V} \mid \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} = M\} = \left\{\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \mid \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{c}^\mathsf{T} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ M \end{bmatrix}\right\}.$$

Door te vegen veranderen $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ en M maar

Stelling. Door te vegen veranderen $\mathcal{V}$ en $\mathcal{V}_{\max}$ niet.

Discussie. We interpreteren de betekenis van vegen voor de doelfunctie $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$.
Stel $\mathbf{x}$ is zo dat $\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} = \beta$. Dan geldt voor $\alpha \in \mathbb{R}$ dat

$$(\mathbf{c} - \alpha\mathbf{a})^\mathsf{T}\mathbf{x} = \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} - \alpha\beta.$$

Herhaalt toepassen leidt tot de volgende conclusie:

$\mathbf{A}$ is $\ell \times n$, $\ell < n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^\ell$, $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$.

Met $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ en $M \equiv \max\{\mathbf{c}^\top\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathcal{V}\}$, zij

$$\mathcal{V}_{\max} \equiv \{\mathbf{x} \in \mathcal{V} \mid \mathbf{c}^\top\mathbf{x} = M\} = \left\{\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \mid \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{c}^\top \end{bmatrix}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ M \end{bmatrix}\right\}.$$

Door te vegen veranderen $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ en M maar

Stelling. Door te vegen veranderen $\mathcal{V}$ en $\mathcal{V}_{\max}$ niet.

Discussie. Als $\mathbf{c}_+$ verkregen is uit $\mathbf{c}$ door te vegen met rijen van $\mathbf{A}$ (en 'geveegde' versies van $\mathbf{A}$) en $M - \mu$ is verkregen uit M door corresponderend te vegen met $\mathbf{b}$ (en corresponderende 'geveegde' versies van $\mathbf{b}$), dan geldt

$$\mathbf{c}_+^\top\mathbf{x} = \mathbf{c}^\top\mathbf{x} - \mu \quad \text{voor alle } \mathbf{x} \in \mathcal{V}.$$

$\mu \in \mathbb{R}$ hangt niet af van $\mathbf{x}$ (zolang we kijken naar $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$). Dit toont ook aan dat de vector waarin het maximum wordt aangenomen (dus $\mathcal{V}_{\max}$) niet verandert. Het maximum zakt met de factor μ.

$\mathbf{A}$ is $\ell \times n$, $\ell < n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^\ell$, $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$.

Met $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ en $M \equiv \max\{\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathcal{V}\}$, zij

$$\mathcal{V}_{\max} \equiv \{\mathbf{x} \in \mathcal{V} \mid \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} = M\} = \left\{\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \mid \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{c}^\mathsf{T} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ M \end{bmatrix}\right\}.$$

Door te vegen veranderen $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ en M maar

Stelling. Door te vegen veranderen $\mathcal{V}$ en $\mathcal{V}_{\max}$ niet.

Discussie. Als $\mathbf{c}_+$ verkregen is uit $\mathbf{c}$ door te vegen dan

$$\mathbf{c}_+^\mathsf{T}\mathbf{x} = \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} - \mu \quad \text{voor alle } \mathbf{x} \in \mathcal{V}.$$

De simplex methode werkt toe naar een $\mathbf{c}_+$ waarvan alle coordinaten ≤ 0 zijn en een $\mathbf{h} \in \mathcal{V}$ zodat $\mathbf{c}_+^\mathsf{T}\mathbf{h} = 0$. Omdat $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ voor iedere $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ volgt hier uit dat $\mathbf{c}_+^\mathsf{T}\mathbf{x} \leq 0$ en dus

$$\mathbf{h} = \operatorname{argmax}\{\mathbf{c}_+^\mathsf{T}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathcal{V}\} \quad \text{en} \quad M = \mu.$$

De methode verkleint telkens $M - \mu$ tot $M - \mu = 0$.

Program

- Optimaliseren
- Lineaire programmering
- Voorbeelden
- Polytopen
- Intermezzo: rang
- Intermezzo: notatie
- Hoekpunten
- Intermezzo: vegen
- Standaard vorm
- Simplex methode
- Positiviteitsristricties
- Het eerste hoekpunt

Lineair programmering in standaardvorm. Los op

$$\max\ \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$$

$$\text{zodat } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ en } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Stelling. Als 1) $\mathcal{V} \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ en } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \neq \emptyset$ en
2) maximum $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ wordt aangenomen op $\mathcal{V}$

dan wordt het max. aangenomen in een hoekpunt van $\mathcal{V}$.

Simplex methode.

- Breng het lp-probleem op standaardvorm.
- Vind een hoekpunt van $\mathcal{V}$.
- Herhaal
  - Vind vanuit dat hoekpunt een richting langs de rand van $\mathcal{V}$ waarin de doelfunctie groter wordt. **Stop** als er niet zo'n richting is.
  - Loop vanuit dat hoekpunt in die richting tot een volgend hoekpunt van $\mathcal{V}$

Stelling. Het hoekpunt waarin gestopt wordt is 'n maximalizerende $\mathbf{x}$ ($\mathbf{x}$ lost het lp-probleem in standaardvorm op).

Zij $\mathbf{A}$ een $\ell \times n$ matrix van volle rang, $\ell < n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^\ell$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

Stel we hebben een basis J met bijbehorend basispunt $\mathbf{p}$:

- $\mathbf{A}(:, J)$ inverteerbaar
- $\mathbf{A}(:, J)\mathbf{p}(J) = \mathbf{b}$
- $\mathbf{p}(j) = 0$ als $j \notin J$

We vegen ($\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ en $\mathbf{c}$) zodat na vegen $\mathbf{A}(:, J) = \mathbf{I}_\ell$.
Dan is $\mathbf{p}(J) = \mathbf{b}$. Dus

$$\mathbf{p} \text{ is een hoekpunt van } \mathcal{V} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{b} \geq \mathbf{0}.$$

We veronderstellen dat $\mathbf{p}$ *een hoekpunt* $\mathbf{h}$ *is en we beschrijven op de volgende transparanten hoe we een geschikte ribbe kunnen vinden waarlangs de doelfunctie groeit.*
Later zullen we zien dat vanuit ieder basispunt een hoekpunt gevonden kan worden als $\mathcal{V} \neq \emptyset$

Zij $\mathbf{A}$ een $\ell \times n$ matrix van volle rang, $\ell < n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^\ell$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

$$\text{(B)} \begin{cases} J \text{ rij van } \ell \text{ verschillende getallen uit } \{1, 2, \ldots, n\} \\ \text{zodat } \mathbf{A}(:, J) = \mathbf{I}_\ell,\ \mathbf{c}(J) = \mathbf{0},\ \mathbf{b} \geq 0 \end{cases}$$

Vb.

$$\begin{array}{cccccccc|c} \bullet & & & \bullet & & & \bullet & & \\ 0 & * & * & 0 & \gamma_1 & * & 1 & * & \beta_1 \\ 1 & * & * & 0 & \gamma_2 & * & 0 & * & \beta_2 \\ 0 & * & * & 1 & \gamma_3 & * & 0 & * & \beta_3 \\ \hline 0 & - & + & 0 & + & + & 0 & + & M - \mu \end{array}$$

$J = [7, 1, 4]$
$n = 8$, $\ell = 3$

$\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ zodat $\mathbf{h}(j) = 0$ als $j \notin J$ en $\mathbf{A}\mathbf{h} = \mathbf{b}$.

Bewering. $\mathbf{h}$ is een hoekpunt van $\mathcal{V}$, $\mathbf{c}^\top \mathbf{h} = 0$.

Bewijs. $\mathbf{A}\mathbf{h} = \mathbf{A}(:, J)\mathbf{h}(J) = \mathbf{I}_\ell \mathbf{h}(J) = \mathbf{b} \geq \mathbf{0}$.

In het voorbeeld: $\mathbf{h} = (\beta_2, 0, 0, \beta_3, 0, 0, \beta_1, 0)^\top$.

$\mathbf{h}$ *aflezen uit de tabel die het probleem weergeeft is gemakkelijk:*
Zet $\mathbf{h}^\top$ (denkbeeldig) onder $\mathbf{c}^\top$.
Zit j niet in J dan $\mathbf{h}(j) = 0$
anders loop in kolom j naar boven tot de rij met de 1,
als dat rij i is, dan is $\mathbf{h}(j) = \beta_i$ (de β rechts in deze rij).

In het voorbeeld staat de 1 in kolom 4 in de 3-de rij en is $\mathbf{h}(4) = \beta_3$.

Zij **A** een $\ell \times n$ matrix van volle rang, $\ell < n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^\ell$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

$$\text{(B)} \left\{ \begin{array}{l} J \text{ rij van } \ell \text{ verschillende getallen uit } \{1, 2, \ldots, n\} \\ \text{zodat } \mathbf{A}(:, J) = \mathbf{I}_\ell,\ \mathbf{c}(J) = \mathbf{0},\ \mathbf{b} \geq 0 \end{array} \right.$$

Vb.

$$\begin{array}{cccccccc|c} \bullet & & & \bullet & & & \bullet & & \\ 0 & * & * & 0 & \gamma_1 & * & 1 & * & \beta_1 \\ 1 & * & * & 0 & \gamma_2 & * & 0 & * & \beta_2 \\ 0 & * & * & 1 & \gamma_3 & * & 0 & * & \beta_3 \\ \hline 0 & - & + & 0 & + & + & 0 & + & M - \mu \end{array}$$

$J = [7, 1, 4]$
$n = 8$, $\ell = 3$

$\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ zodat $\mathbf{h}(j) = 0$ als $j \notin J$ en $\mathbf{Ah} = \mathbf{b}$: $\mathbf{h}(J) = \mathbf{b}$.

Bewering. $\mathbf{c} \leq \mathbf{0} \ \Rightarrow \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \leq \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{h}$ alle $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ en $M = \mu$.

Zij **A** een $\ell \times n$ matrix van volle rang, $\ell < n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^\ell$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

$$\text{(B)} \begin{cases} J \text{ rij van } \ell \text{ verschillende getallen uit } \{1, 2, \ldots, n\} \\ \text{zodat } \mathbf{A}(:, J) = \mathbf{I}_\ell,\ \mathbf{c}(J) = \mathbf{0},\ \mathbf{b} \geq 0 \end{cases}$$

Vb.

$$\begin{array}{cccccccc|c} \bullet & & & \bullet & & & \bullet & & \\ 0 & * & * & 0 & \gamma_1 & * & 1 & * & \beta_1 \\ 1 & * & * & 0 & \gamma_2 & * & 0 & * & \beta_2 \\ 0 & * & * & 1 & \gamma_3 & * & 0 & * & \beta_3 \\ \hline 0 & - & + & 0 & + & + & 0 & + & M - \mu \end{array}$$

$J = [7, 1, 4]$
$n = 8,\ \ell = 3$

$\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ zodat $\mathbf{h}(j) = 0$ als $j \notin J$ en $\mathbf{A}\mathbf{h} = \mathbf{b}$: $\mathbf{h}(J) = \mathbf{b}$.

Bewering. $\mathbf{c} \leq \mathbf{0} \ \Rightarrow \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \leq \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{h}$ alle $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ en $M = \mu$.

Bewijs. Als $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ dan $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. I.h.b. $\mathbf{x}(j) \geq 0$ als $j \notin J$.
Hieruit volgt $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \leq 0 = \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{h}$.

Zij $\mathbf{A}$ een $\ell \times n$ matrix van volle rang, $\ell < n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^\ell$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

$$\text{(B)} \begin{cases} J \text{ rij van } \ell \text{ verschillende getallen uit } \{1, 2, \ldots, n\} \\ \text{zodat } \mathbf{A}(:, J) = \mathbf{I}_\ell,\ \mathbf{c}(J) = \mathbf{0},\ \mathbf{b} \geq 0 \end{cases}$$

Vb.

$$\begin{array}{cccccccc|c} \bullet & & & \bullet & & & \bullet & & \\ 0 & * & * & 0 & \gamma_1 & * & 1 & * & \beta_1 \\ 1 & * & * & 0 & \gamma_2 & * & 0 & * & \beta_2 \\ 0 & * & * & 1 & \gamma_3 & * & 0 & * & \beta_3 \\ \hline 0 & - & + & 0 & + & + & 0 & + & M - \mu \end{array}$$

$J = [7, 1, 4]$
$n = 8$, $\ell = 3$

$\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ zodat $\mathbf{h}(j) = 0$ als $j \notin J$ en $\mathbf{A}\mathbf{h} = \mathbf{b}$: $\mathbf{h}(J) = \mathbf{b}$.

Bewering. $\mathbf{c} \leq \mathbf{0} \ \Rightarrow \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \leq \mathbf{c}^\top \mathbf{h}$ alle $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ en $M = \mu$.

Bewijs. Als $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ dan $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. I.h.b. $\mathbf{x}(j) \geq 0$ als $j \notin J$.
Hieruit volgt $\mathbf{c}^\top \mathbf{x} \leq 0 = \mathbf{c}^\top \mathbf{h}$.

Conclusie. $\mathbf{c} \leq 0 \ \Rightarrow$

het maximum wordt aangenomen in het hoekpunt $\mathbf{h}$.

Zij $\mathbf{A}$ een $\ell \times n$ matrix van volle rang, $\ell < n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^\ell$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

$$\text{(B)} \left\{ \begin{array}{l} J \text{ rij van } \ell \text{ verschillende getallen uit } \{1, 2, \ldots, n\} \\ \text{zodat } \mathbf{A}(:, J) = \mathbf{I}_\ell,\ \mathbf{c}(J) = \mathbf{0},\ \mathbf{b} \geq 0 \end{array} \right.$$

Vb.

$$\begin{array}{cccccccc|c} \bullet & & & \bullet & & & \bullet & & \\ 0 & * & * & 0 & \gamma_1 & * & 1 & * & \beta_1 \\ 1 & * & * & 0 & \gamma_2 & * & 0 & * & \beta_2 \\ 0 & * & * & 1 & \gamma_3 & * & 0 & * & \beta_3 \\ \hline 0 & - & + & 0 & + & + & 0 & + & M - \mu \end{array}$$

$J = [7, 1, 4]$
$n = 8,\ \ell = 3$

$\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ zodat $\mathbf{h}(j) = 0$ als $j \not\in J$ en $\mathbf{Ah} = \mathbf{b}$: $\mathbf{h}(J) = \mathbf{b}$.

Zij $j_0 \not\in J$ en

$\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ zo dat $\mathbf{r}(j_0) = 1$, $\mathbf{r}(j) = 0$ als $j \not\in J \cup \{j_0\}$.

Bewering. $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.

$$\mathbf{h} + \alpha\mathbf{r} \in \mathcal{V} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha > 0 \text{ en } \mathbf{r}(J) = -\mathbf{A}(:, j_0).$$

Bewijs. Stel $\mathbf{h} + \alpha\mathbf{r} \in \mathcal{V}$. Dan $\mathbf{h} + \alpha\mathbf{r} \geq \mathbf{0}$.
I.h.b. $(\mathbf{h} + \alpha\mathbf{r})(j_0) = \mathbf{h}(j_0) + \alpha\mathbf{r}(j_0) = \alpha \geq 0$.
Verder $\mathbf{A}(\mathbf{h} + \alpha\mathbf{r}) = \mathbf{Ah} + \alpha\mathbf{Ar} = \mathbf{b}$.
Dus $\mathbf{0} = \mathbf{Ar} = \mathbf{A}(:, J)\mathbf{r}(J) + \mathbf{A}(:, j_0) = \mathbf{r}(J) + \mathbf{A}(:, j_0)$.

Zij $\mathbf{A}$ een $\ell \times n$ matrix van volle rang, $\ell < n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^\ell$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

$$\text{(B)} \begin{cases} J \text{ rij van } \ell \text{ verschillende getallen uit } \{1, 2, \ldots, n\} \\ \text{zodat } \mathbf{A}(:, J) = \mathbf{I}_\ell,\ \mathbf{c}(J) = \mathbf{0},\ \mathbf{b} \geq 0 \end{cases}$$

Vb.

$$\begin{array}{cccccccc|c} \bullet & & & \bullet & & & \bullet & & \\ 0 & * & * & 0 & \gamma_1 & * & 1 & * & \beta_1 \\ 1 & * & * & 0 & \gamma_2 & * & 0 & * & \beta_2 \\ 0 & * & * & 1 & \gamma_3 & * & 0 & * & \beta_3 \\ \hline 0 & - & + & 0 & + & + & 0 & + & M - \mu \end{array}$$

$J = [7, 1, 4]$
$n = 8,\ \ell = 3$

$\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ zodat $\mathbf{h}(j) = 0$ als $j \not\in J$ en $\mathbf{A}\mathbf{h} = \mathbf{b}$: $\mathbf{h}(J) = \mathbf{b}$.

Zij $j_0 \not\in J$ en

$\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ zo dat $\mathbf{r}(j_0) = 1$, $\mathbf{r}(j) = 0$ als $j \not\in J \cup \{j_0\}$.

Bewering. $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.

$$\mathbf{h} + \alpha\mathbf{r} \in \mathcal{V} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 0 \text{ en } \mathbf{b} - \alpha\mathbf{A}(:, j_0) \geq \mathbf{0}.$$

Bewering. Zij $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ zodat $\mathbf{h} + \alpha\mathbf{r} \in \mathcal{V}$.

$$\mathbf{c}^\mathsf{T}(\mathbf{h} + \alpha\mathbf{r}) > \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{h} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{c}(j_0) > 0.$$

Bewijs. $\mathbf{c}^\mathsf{T}(\mathbf{h} + \alpha\mathbf{r}) = \mathbf{c}(j_0)\alpha > 0 = \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{h} \ \Leftrightarrow \mathbf{c}(j_0) > 0.$

Zij **A** een $\ell \times n$ matrix van volle rang, $\ell < n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^\ell$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

$$\text{(B)} \begin{cases} J \text{ rij van } \ell \text{ verschillende getallen uit } \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{zodat } \mathbf{A}(:,J) = \mathbf{I}_\ell,\ \mathbf{c}(J) = \mathbf{0},\ \mathbf{b} \geq 0 \end{cases}$$

Vb.

$$\begin{array}{cccccccc|c} \bullet & & & \bullet & & & \bullet & & \\ 0 & * & * & 0 & \gamma_1 & * & 1 & * & \beta_1 \\ 1 & * & * & 0 & \gamma_2 & * & 0 & * & \beta_2 \\ 0 & * & * & 1 & \gamma_3 & * & 0 & * & \beta_3 \\ \hline 0 & - & + & 0 & + & + & 0 & + & M - \mu \end{array}$$

$J = [7, 1, 4]$
$n = 8,\ \ell = 3$

$\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ zodat $\mathbf{h}(j) = 0$ als $j \notin J$ en $\mathbf{Ah} = \mathbf{b}$: $\mathbf{h}(J) = \mathbf{b}$.

$\boxed{\text{Kies } j_0 \notin J \text{ zo dat } \mathbf{c}(j_0) > 0}$ als $\mathbf{c} \not\leq \mathbf{0}$.

Zij $\mathbf{A}$ een $\ell \times n$ matrix van volle rang, $\ell < n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^\ell$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

$$\text{(B)} \left\{ \begin{array}{l} J \text{ rij van } \ell \text{ verschillende getallen uit } \{1, 2, \ldots, n\} \\ \text{zodat } \mathbf{A}(:, J) = \mathbf{I}_\ell,\ \mathbf{c}(J) = \mathbf{0},\ \mathbf{b} \geq 0 \end{array} \right.$$

Vb.

$$\begin{array}{cccccccc|c} \bullet & & & \bullet & & & \bullet & & \\ 0 & * & * & 0 & \gamma_1 & * & 1 & * & \beta_1 \\ 1 & * & * & 0 & \gamma_2 & * & 0 & * & \beta_2 \\ 0 & * & * & 1 & \gamma_3 & * & 0 & * & \beta_3 \\ \hline 0 & - & + & 0 & + & + & 0 & + & M - \mu \end{array}$$

$J = [7, 1, 4]$
$n = 8$, $\ell = 3$
$j_0 = 5$,

$\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ zodat $\mathbf{h}(j) = 0$ als $j \notin J$ en $\mathbf{A}\mathbf{h} = \mathbf{b}$: $\mathbf{h}(J) = \mathbf{b}$.

$\boxed{\text{Kies } j_0 \notin J \text{ zo dat } \mathbf{c}(j_0) > 0}$ als $\mathbf{c} \not\leq \mathbf{0}$.

Stel $j_0 = 5$ in voorbeeld.

Zij $\mathbf{A}$ een $\ell \times n$ matrix van volle rang, $\ell < n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^\ell$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

$$(\mathrm{B}) \begin{cases} J \text{ rij van } \ell \text{ verschillende getallen uit } \{1, 2, \ldots, n\} \\ \text{zodat } \mathbf{A}(:, J) = \mathbf{I}_\ell,\ \mathbf{c}(J) = \mathbf{0},\ \mathbf{b} \geq 0 \end{cases}$$

Vb.

$$\begin{array}{cccccccc|c} \bullet & & & \bullet & & & \bullet & & \\ 0 & * & * & 0 & \gamma_1 & * & 1 & * & \beta_1 \\ 1 & * & * & 0 & \gamma_2 & * & 0 & * & \beta_2 \\ 0 & * & * & 1 & \gamma_3 & * & 0 & * & \beta_3 \\ \hline 0 & - & + & 0 & + & + & 0 & + & M - \mu \end{array}$$

$J = [7, 1, 4]$
$n = 8$, $\ell = 3$
$j_0 = 5$,

$\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ zodat $\mathbf{h}(j) = 0$ als $j \notin J$ en $\mathbf{A}\mathbf{h} = \mathbf{b}$: $\mathbf{h}(J) = \mathbf{b}$.

$\boxed{\text{Kies } j_0 \notin J \text{ zo dat } \mathbf{c}(j_0) > 0}$ als $\mathbf{c} \not\leq \mathbf{0}$.

$\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ zo dat $\mathbf{r}(j_0) = 1$, $\mathbf{r}(j) = 0$ als $j \notin J \cup \{j_0\}$
en $\mathbf{h} + \alpha\mathbf{r} \in \mathcal{V}$ voor zekere $\alpha > 0$: $\mathbf{r}(J) = -\mathbf{A}(:, j_0)$.

Opmerking. $\mathbf{h}$ en $\mathbf{r}$ hoeven niet expliciet berekend te worden (ze zijn al impliciet bekend via $\mathbf{b}$, J, $\mathbf{A}$ en j_0).

Zij $\mathbf{A}$ een $\ell \times n$ matrix van volle rang, $\ell < n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^\ell$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

$$\text{(B)} \left\{ \begin{array}{l} J \text{ rij van } \ell \text{ verschillende getallen uit } \{1, 2, \ldots, n\} \\ \text{zodat } \mathbf{A}(:, J) = \mathbf{I}_\ell, \ \mathbf{c}(J) = \mathbf{0}, \ \mathbf{b} \geq 0 \end{array} \right.$$

Vb.

$$\begin{array}{cccccccc|c} \bullet & & & \bullet & & & \bullet & & \\ 0 & * & * & 0 & \gamma_1 & * & 1 & * & \beta_1 \\ 1 & * & * & 0 & \gamma_2 & * & 0 & * & \beta_2 \\ 0 & * & * & 1 & \gamma_3 & * & 0 & * & \beta_3 \\ \hline 0 & - & + & 0 & + & + & 0 & + & M - \mu \end{array}$$

$J = [7, 1, 4]$
$n = 8, \ \ell = 3$
$j_0 = 5,$

$\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ zodat $\mathbf{h}(j) = 0$ als $j \notin J$ en $\mathbf{A}\mathbf{h} = \mathbf{b}$: $\mathbf{h}(J) = \mathbf{b}$.

$\boxed{\text{Kies } j_0 \notin J \text{ zo dat } \mathbf{c}(j_0) > 0}$ als $\mathbf{c} \not\leq \mathbf{0}$.

$\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ zo dat $\mathbf{r}(j_0) = 1$, $\mathbf{r}(j) = 0$ als $j \notin J \cup \{j_0\}$

en $\mathbf{h} + \alpha \mathbf{r} \in \mathcal{V}$ voor zekere $\alpha > 0$: $\mathbf{r}(J) = -\mathbf{A}(:, j_0)$.

In vb.
$$\begin{array}{rcl} \mathbf{h} & = & (\beta_2, \quad 0, 0, \beta_3, \quad 0, 0, \beta_1, \quad 0)^T \\ \mathbf{r} & = & (-\gamma_2, \quad 0, 0, -\gamma_3, \quad 1, 0, -\gamma_1, \quad 0)^T \\ \mathbf{h} + \alpha \mathbf{r} & = & (\beta_2 - \alpha\gamma_2, 0, 0, \beta_3 - \alpha\gamma_3, \alpha, 0, \beta_1 - \alpha\gamma_1, 0)^T \end{array}$$

Kies $\alpha_0 = \alpha > 0$ maximaal zo dat $\mathbf{h} + \alpha \mathbf{r} \geq 0$.
Voldoende als $\mathbf{h}(J) + \alpha \mathbf{r}(J) = \mathbf{b} - \alpha \mathbf{A}(:, j_0) \geq \mathbf{0}$.

Zij $\mathbf{A}$ een $\ell \times n$ matrix van volle rang, $\ell < n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^\ell$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

$$\text{(B)} \begin{cases} J \text{ rij van } \ell \text{ verschillende getallen uit } \{1, 2, \ldots, n\} \\ \text{zodat } \mathbf{A}(:, J) = \mathbf{I}_\ell, \ \mathbf{c}(J) = \mathbf{0}, \ \mathbf{b} \geq 0 \end{cases}$$

Vb.

$$\begin{array}{cccccccc|c}
\bullet & & & \bullet & & & \bullet & & \\
0 & * & * & 0 & \gamma_1 & * & 1 & * & \beta_1 \\
1 & * & * & 0 & \gamma_2 & * & 0 & * & \beta_2 \\
0 & * & * & 1 & \gamma_3 & * & 0 & * & \beta_3 \\
\hline
0 & - & + & 0 & + & + & 0 & + & M - \mu
\end{array}$$

$J = [7, 1, 4]$
$n = 8$, $\ell = 3$
$j_0 = 5$,

$\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ zodat $\mathbf{h}(j) = 0$ als $j \notin J$ en $\mathbf{A}\mathbf{h} = \mathbf{b}$: $\mathbf{h}(J) = \mathbf{b}$.

$\boxed{\text{Kies } j_0 \notin J \text{ zo dat } \mathbf{c}(j_0) > 0}$ als $\mathbf{c} \not\leq \mathbf{0}$.

$\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ zo dat $\mathbf{r}(j_0) = 1$, $\mathbf{r}(j) = 0$ als $j \notin J \cup \{j_0\}$
en $\mathbf{h} + \alpha\mathbf{r} \in \mathcal{V}$ voor zekere $\alpha > 0$: $\mathbf{r}(J) = -\mathbf{A}(:, j_0)$.

Bewering. $\mathbf{A}(:, j_0) \leq \mathbf{0} \ \Rightarrow M = \infty$.

Bewijs. Als $\mathbf{A}(i, j_0) \leq 0$ dan $\mathbf{b}(i) - \alpha\mathbf{A}(i, j_0) \geq 0$ alle $\alpha \geq 0$.
Dus $\mathbf{h} + \alpha\mathbf{r} \in \mathcal{V}$ alle $\alpha \geq 0$ als $\mathbf{A}(i, j_0) \leq 0$ voor iedere i.
Omdat $\mathbf{c}^\mathsf{T}(\mathbf{h} + \alpha\mathbf{r}) = \alpha\mathbf{c}(j_0)$ is $M = \infty$.

Zij $\mathbf{A}$ een $\ell \times n$ matrix van volle rang, $\ell < n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^\ell$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

$$\text{(B)} \begin{cases} J \text{ rij van } \ell \text{ verschillende getallen uit } \{1, 2, \ldots, n\} \\ \text{zodat } \mathbf{A}(:, J) = \mathbf{I}_\ell,\ \mathbf{c}(J) = \mathbf{0},\ \mathbf{b} \geq 0 \end{cases}$$

Vb.

$$\begin{array}{cccccccc|c}
\bullet & & & \bullet & & & \bullet & & \\
0 & * & * & 0 & \gamma_1 & * & 1 & * & \beta_1 \\
1 & * & * & 0 & \gamma_2 & * & 0 & * & \beta_2 \\
0 & * & * & 1 & \gamma_3 & * & 0 & * & \beta_3 \\
\hline
0 & - & + & 0 & + & + & 0 & + & M - \mu
\end{array}$$

$J = [7, 1, 4]$
$n = 8$, $\ell = 3$
$j_0 = 5$,

$\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ zodat $\mathbf{h}(j) = 0$ als $j \notin J$ en $\mathbf{Ah} = \mathbf{b}$: $\mathbf{h}(J) = \mathbf{b}$.

$\boxed{\text{Kies } j_0 \notin J \text{ zo dat } \mathbf{c}(j_0) > 0}$ als $\mathbf{c} \not\leq \mathbf{0}$.

$\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ zo dat $\mathbf{r}(j_0) = 1$, $\mathbf{r}(j) = 0$ als $j \notin J \cup \{j_0\}$

en $\mathbf{h} + \alpha\mathbf{r} \in \mathcal{V}$ voor zekere $\alpha > 0$: $\mathbf{r}(J) = -\mathbf{A}(:, j_0)$.

$\boxed{\text{Zij } i_0 \equiv \text{argmin}_i\{\mathbf{b}(i)/\mathbf{A}(i, j_0) \mid \mathbf{A}(i, j_0) > 0\}}$ als $\mathbf{A}(:, j_0) \not\leq \mathbf{0}$

Zij $\mathbf{A}$ een $\ell \times n$ matrix van volle rang, $\ell < n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^\ell$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

$$\text{(B)} \begin{cases} J \text{ rij van } \ell \text{ verschillende getallen uit } \{1, 2, \ldots, n\} \\ \text{zodat } \mathbf{A}(:, J) = \mathbf{I}_\ell, \ \mathbf{c}(J) = \mathbf{0}, \ \mathbf{b} \geq 0 \end{cases}$$

Vb.

$$\begin{array}{cccccccc|c} \bullet & & & \bullet & & & \bullet & & \\ 0 & * & * & 0 & \gamma_1 & * & 1 & * & \beta_1 \\ 1 & * & * & 0 & \gamma_2 & * & 0 & * & \beta_2 \\ 0 & * & * & 1 & \gamma_3 & * & 0 & * & \beta_3 \\ \hline 0 & - & + & 0 & + & + & 0 & + & M - \mu \end{array}$$

$J = [7, 1, 4]$
$n = 8$, $\ell = 3$
$j_0 = 5$, $i_0 = 2$

$\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ zodat $\mathbf{h}(j) = 0$ als $j \notin J$ en $\mathbf{Ah} = \mathbf{b}$: $\mathbf{h}(J) = \mathbf{b}$.

$\boxed{\text{Kies } j_0 \notin J \text{ zo dat } \mathbf{c}(j_0) > 0}$ als $\mathbf{c} \not\leq \mathbf{0}$.

$\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ zo dat $\mathbf{r}(j_0) = 1$, $\mathbf{r}(j) = 0$ als $j \notin J \cup \{j_0\}$

en $\mathbf{h} + \alpha\mathbf{r} \in \mathcal{V}$ voor zekere $\alpha > 0$: $\mathbf{r}(J) = -\mathbf{A}(:, j_0)$.

$\boxed{\text{Zij } i_0 \equiv \text{argmin}_i\{\mathbf{b}(i)/\mathbf{A}(i, j_0) \mid \mathbf{A}(i, j_0) > 0\}}$ als $\mathbf{A}(:, j_0) \not\leq \mathbf{0}$

Stel in voorbeeld $i_0 = 2$. Dan $\alpha_0 \equiv \mathbf{b}(i_0)/\mathbf{A}(i_0, j_0) = \beta_2/\gamma_2$

Zij $\mathbf{A}$ een $\ell \times n$ matrix van volle rang, $\ell < n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^\ell$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

$$\text{(B)} \left\{ \begin{array}{l} J \text{ rij van } \ell \text{ verschillende getallen uit } \{1, 2, \ldots, n\} \\ \text{zodat } \mathbf{A}(:, J) = \mathbf{I}_\ell, \ \mathbf{c}(J) = \mathbf{0}, \ \mathbf{b} \geq 0 \end{array} \right.$$

Vb.

$$\begin{array}{cccccccc|c} \bullet & & & \bullet & & & \bullet & & \\ 0 & * & * & 0 & \gamma_1 & * & 1 & * & \beta_1 \\ 1 & * & * & 0 & \gamma_2 & * & 0 & * & \beta_2 \\ 0 & * & * & 1 & \gamma_3 & * & 0 & * & \beta_3 \\ \hline 0 & - & + & 0 & + & + & 0 & + & M - \mu \end{array}$$

$J = [7, 1, 4]$
$n = 8$, $\ell = 3$
$j_0 = 5$, $i_0 = 2$

$\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ zodat $\mathbf{h}(j) = 0$ als $j \notin J$ en $\mathbf{A}\mathbf{h} = \mathbf{b}$: $\mathbf{h}(J) = \mathbf{b}$.

$\boxed{\text{Kies } j_0 \notin J \text{ zo dat } \mathbf{c}(j_0) > 0}$ als $\mathbf{c} \not\leq \mathbf{0}$.

$\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ zo dat $\mathbf{r}(j_0) = 1$, $\mathbf{r}(j) = 0$ als $j \notin J \cup \{j_0\}$

en $\mathbf{h} + \alpha\mathbf{r} \in \mathcal{V}$ voor zekere $\alpha > 0$: $\mathbf{r}(J) = -\mathbf{A}(:, j_0)$.

$\boxed{\text{Zij } i_0 \equiv \text{argmin}_i\{\mathbf{b}(i)/\mathbf{A}(i, j_0) \mid \mathbf{A}(i, j_0) > 0\}}$ als $\mathbf{A}(:, j_0) \not\leq \mathbf{0}$

Bewering. Met $\alpha_0 \equiv \mathbf{b}(i_0)/\mathbf{A}(i_0, j_0)$ is

- $\mathcal{R} \equiv \{\mathbf{h} + \alpha\mathbf{r} \mid \alpha \in [0, \alpha_0]\} \subset \mathcal{V}$: $\mathcal{R}$ is een **ribbe** van $\mathcal{V}$.
- $\mathbf{h}_1 \equiv \mathbf{h} + \alpha_0\mathbf{r}$ is een hoekpunt van $\mathcal{V}$. • $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{h} < \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{h}_1$.

Zij $\mathbf{A}$ een $\ell \times n$ matrix van volle rang, $\ell < n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^\ell$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

$$\text{(B)} \left\{ \begin{array}{l} J \text{ rij van } \ell \text{ verschillende getallen uit } \{1, 2, \ldots, n\} \\ \text{zodat } \mathbf{A}(:, J) = \mathbf{I}_\ell,\ \mathbf{c}(J) = \mathbf{0},\ \mathbf{b} \geq 0 \end{array} \right.$$

Vb.

$$\begin{array}{cccccccc|c}
\bullet & & & \bullet & & & \bullet & & \\
0 & * & * & 0 & \gamma_1 & * & 1 & * & \beta_1 \\
1 & * & * & 0 & \gamma_2 & * & 0 & * & \beta_2 \\
0 & * & * & 1 & \gamma_3 & * & 0 & * & \beta_3 \\
\hline
0 & - & + & 0 & + & + & 0 & + & M - \mu
\end{array}$$

$J = [7, 1, 4]$
$n = 8,\ \ell = 3$
$j_0 = 5,\ i_0 = 2$

$\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ zodat $\mathbf{h}(j) = 0$ als $j \notin J$ en $\mathbf{A}\mathbf{h} = \mathbf{b}$: $\mathbf{h}(J) = \mathbf{b}$.

$\boxed{\text{Kies } j_0 \notin J \text{ zo dat } \mathbf{c}(j_0) > 0}$ als $\mathbf{c} \not\leq \mathbf{0}$.

$\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ zo dat $\mathbf{r}(j_0) = 1$, $\mathbf{r}(j) = 0$ als $j \notin J \cup \{j_0\}$

en $\mathbf{h} + \alpha\mathbf{r} \in \mathcal{V}$ voor zekere $\alpha > 0$: $\mathbf{r}(J) = -\mathbf{A}(:, j_0)$.

$\boxed{\text{Zij } i_0 \equiv \text{argmin}_i\{\mathbf{b}(i)/\mathbf{A}(i, j_0) \mid \mathbf{A}(i, j_0) > 0\}}$ als $\mathbf{A}(:, j_0) \not\leq \mathbf{0}$

Stel in voorbeeld $i_0 = 2$. Dan $\alpha_0 \equiv \mathbf{b}(i_0)/\mathbf{A}(i_0, j_0) = \beta_2/\gamma_2$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}_1 \equiv \mathbf{h} + \alpha_0\mathbf{r} &= (\beta_2 - \alpha_0\gamma_2, 0, 0, \beta_3 - \alpha_0\gamma_2, \alpha_0, 0, \beta_1 - \alpha_0\gamma_1, 0)^{\mathsf{T}} \\
&= (0, 0, 0, \beta_3 - \alpha_0\gamma_2, \alpha_0, 0, \beta_1 - \alpha_0\gamma_1, 0)^{\mathsf{T}} \\
&= (0, 0, 0, \widetilde{\beta}_3, \widetilde{\beta}_2, 0, \widetilde{\beta}_1, 0)^{\mathsf{T}}
\end{aligned}$$

Zij $\mathbf{A}$ een $\ell \times n$ matrix van volle rang, $\ell < n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^\ell$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

$$\text{(B)} \begin{cases} J \text{ rij van } \ell \text{ verschillende getallen uit } \{1, 2, \ldots, n\} \\ \text{zodat } \mathbf{A}(:, J) = \mathbf{I}_\ell,\ \mathbf{c}(J) = \mathbf{0},\ \mathbf{b} \geq 0 \end{cases}$$

Vb.

$$\begin{array}{cccccccc|c}
 & & & \bullet & \circ & & \bullet & & \\
0 & * & * & 0 & \gamma_1 & * & 1 & * & \beta_1 \\
1 & * & * & 0 & \gamma_2 & * & 0 & * & \beta_2 \\
0 & * & * & 1 & \gamma_3 & * & 0 & * & \beta_3 \\
\hline
0 & - & + & 0 & + & + & 0 & + & M - \mu
\end{array}$$

$J = [7, 1, 4]$
$n = 8,\ \ell = 3$
$j_0 = 5,\ i_0 = 2$
$J_1 = [7, 5, 4]$

$\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ zodat $\mathbf{h}(j) = 0$ als $j \notin J$ en $\mathbf{Ah} = \mathbf{b}$: $\mathbf{h}(J) = \mathbf{b}$.

$\boxed{\text{Kies } j_0 \notin J \text{ zo dat } \mathbf{c}(j_0) > 0}$ als $\mathbf{c} \not\leq \mathbf{0}$.

$\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ zo dat $\mathbf{r}(j_0) = 1$, $\mathbf{r}(j) = 0$ als $j \notin J \cup \{j_0\}$

en $\mathbf{h} + \alpha \mathbf{r} \in \mathcal{V}$ voor zekere $\alpha > 0$: $\mathbf{r}(J) = -\mathbf{A}(:, j_0)$.

$\boxed{\text{Zij } i_0 \equiv \text{argmin}_i \{\mathbf{b}(i)/\mathbf{A}(i, j_0) \mid \mathbf{A}(i, j_0) > 0\}}$ als $\mathbf{A}(:, j_0) \not\leq \mathbf{0}$

$\boxed{\text{Vervang het } i_0\text{-de getal van } J \text{ door } j_0.}$ Levert J_1

Bewering. $\mathbf{h}_1$ hoekpunt bij basis J_1.

In voorbeeld. Vervang 2-de getal J door 5: $J_1 = [7, 5, 4]$

Zij $\mathbf{A}$ een $\ell \times n$ matrix van volle rang, $\ell < n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^\ell$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

$$\text{(B)} \begin{cases} J \text{ rij van } \ell \text{ verschillende getallen uit } \{1, 2, \ldots, n\} \\ \text{zodat } \mathbf{A}(:, J) = \mathbf{I}_\ell,\ \mathbf{c}(J) = \mathbf{0},\ \mathbf{b} \geq 0 \end{cases}$$

Vb.

$$\begin{array}{cccccccc|c} & & & \bullet & \circ & & \bullet & & \\ 0 & * & * & 0 & \gamma_1 & * & 1 & * & \beta_1 \\ 1 & * & * & 0 & \boxed{\gamma_2} & * & 0 & * & \beta_2 \\ 0 & * & * & 1 & \gamma_3 & * & 0 & * & \beta_3 \\ \hline 0 & - & + & 0 & + & + & 0 & + & M - \mu \end{array}$$

$J = [7, 1, 4]$
$n = 8,\ \ell = 3$
$j_0 = 5,\ i_0 = 2$
$J_1 = [7, 5, 4]$

$\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ zodat $\mathbf{h}(j) = 0$ als $j \notin J$ en $\mathbf{Ah} = \mathbf{b}$: $\mathbf{h}(J) = \mathbf{b}$.

$\boxed{\text{Kies } j_0 \notin J \text{ zo dat } \mathbf{c}(j_0) > 0}$ als $\mathbf{c} \not\leq \mathbf{0}$.

$\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ zo dat $\mathbf{r}(j_0) = 1$, $\mathbf{r}(j) = 0$ als $j \notin J \cup \{j_0\}$

en $\mathbf{h} + \alpha\mathbf{r} \in \mathcal{V}$ voor zekere $\alpha > 0$: $\mathbf{r}(J) = -\mathbf{A}(:, j_0)$.

$\boxed{\text{Zij } i_0 \equiv \text{argmin}_i\{\mathbf{b}(i)/\mathbf{A}(i, j_0) \mid \mathbf{A}(i, j_0) > 0\}}$ als $\mathbf{A}(:, j_0) \not\leq \mathbf{0}$

$\boxed{\text{Vervang het } i_0\text{-de getal van } J \text{ door } j_0.}$

$\boxed{\text{Kies } (i_0, j_0) \text{ als pivot en veeg.}}$

Zij **A** een $\ell \times n$ matrix van volle rang, $\ell < n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^\ell$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

$$\text{(B)} \left\{ \begin{array}{l} J \text{ rij van } \ell \text{ verschillende getallen uit } \{1, 2, \ldots, n\} \\ \text{zodat } \mathbf{A}(:, J) = \mathbf{I}_\ell,\ \mathbf{c}(J) = \mathbf{0},\ \mathbf{b} \geq 0 \end{array} \right.$$

Vb.

$$\begin{array}{cccccccc|c} 0 & * & * & 0 & \gamma_1 & * & 1 & * & \beta_1 \\ 1 & * & * & 0 & \gamma_2 & * & 0 & * & \beta_2 \\ 0 & * & * & 1 & \gamma_3 & * & 0 & * & \beta_3 \\ \hline 0 & - & + & 0 & + & + & 0 & + & M - \mu \end{array}$$

$J = [7, 1, 4]$
$n = 8,\ \ell = 3$
$j_0 = 5,\ i_0 = 2$
$J_1 = [7, 5, 4]$

$\boxed{\text{Kies } j_0 \text{ zodat } \mathbf{c}(j_0) > 0}$

$\boxed{i_0 \equiv \text{argmin}_i\{\mathbf{b}(i)/\mathbf{A}(i, j_0) \mid \mathbf{A}(i, j_0) > 0\}}$

$\boxed{\text{Vervang het } i_0\text{-de getal van } J \text{ door } j_0}$

$\boxed{\text{Veeg met } (i_0, j_0) \text{ als pivot}}$ (veeg **b**, $M - \mu$ en **c** mee)

In vb.

pivot $(2, 5)$

$$\begin{array}{cccccccc|l} * & * & * & 0 & 0 & * & 1 & * & \beta_1 - \alpha_0\gamma_1 = \widetilde{\beta}_1 \\ 1/\gamma_2 & * & * & 0 & 1 & * & 0 & * & \beta_2/\gamma_2 = \alpha_0 = \widetilde{\beta}_2 \\ * & * & * & 1 & 0 & * & 0 & * & \beta_3 - \alpha_0\gamma_3 = \widetilde{\beta}_3 \\ \hline * & * & * & 0 & 0 & * & 0 & * & M - (\mu + \alpha_0\mathbf{c}(5)) \end{array}$$

Zij $\mathbf{A}$ een $\ell \times n$ matrix van volle rang, $\ell < n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^\ell$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

$$\text{(B)} \begin{cases} J \text{ rij van } \ell \text{ verschillende getallen uit } \{1, 2, \ldots, n\} \\ \text{zodat } \mathbf{A}(:, J) = \mathbf{I}_\ell,\ \mathbf{c}(J) = \mathbf{0},\ \mathbf{b} \geq 0 \end{cases}$$

Vb.

$$\begin{array}{cccccccc|c} 0 & * & * & 0 & \gamma_1 & * & 1 & * & \beta_1 \\ 1 & * & * & 0 & \gamma_2 & * & 0 & * & \beta_2 \\ 0 & * & * & 1 & \gamma_3 & * & 0 & * & \beta_3 \\ \hline 0 & - & + & 0 & + & + & 0 & + & M - \mu \end{array}$$

$J = [7, 1, 4]$
$n = 8$, $\ell = 3$
$j_0 = 5$, $i_0 = 2$
$J_1 = [7, 5, 4]$

$\boxed{\text{Kies } j_0 \text{ zodat } \mathbf{c}(j_0) > 0}$

$\boxed{i_0 \equiv \text{argmin}_i \{\mathbf{b}(i)/\mathbf{A}(i, j_0) \mid \mathbf{A}(i, j_0) > 0\}}$

$\boxed{\text{Vervang het } i_0\text{-de getal van } J \text{ door } j_0}$

$\boxed{\text{Veeg met } (i_0, j_0) \text{ als pivot}}$ (veeg $\mathbf{b}$, $M - \mu$ en $\mathbf{c}$ mee)

Bewering. Na vegen hebben we weer situatie (B) (voor een andere J, $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ en $\mathbf{c}$, maar M en de verzameling $\mathcal{V} \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ is ongewijzigd).

We kunnen het proces herhalen!

Zij $\mathbf{A}$ een $\ell \times n$ matrix van volle rang, $\ell < n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^\ell$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

$$\text{(B)} \begin{cases} J \text{ rij van } \ell \text{ verschillende getallen uit } \{1, 2, \ldots, n\} \\ \text{zodat } \mathbf{A}(:, J) = \mathbf{I}_\ell,\ \mathbf{c}(J) = \mathbf{0},\ \mathbf{b} \geq 0 \end{cases}$$

Herhaal

- Als $\mathbf{c} \leq \mathbf{0}$ dan, **succes=true**, **stop**
  anders, kies j_0 zodat $\mathbf{c}(j_0) > 0$
- Als $\mathbf{A}(:, j_0) \leq \mathbf{0}$ dan, **succes=false**, **stop**
  anders, $i_0 \equiv \text{argmin}_i\{\mathbf{b}(i)/\mathbf{A}(i, j_0) \mid \mathbf{A}(i, j_0) > 0\}$
- Vervang het i_0-de getal van J door j_0
- Veeg met (i_0, j_0) als pivot
  (veeg $\mathbf{b}$, $M - \mu$ en $\mathbf{c}$ mee)

einde herhaal

$\mathbf{h}(J) = \mathbf{b}$, $\mathbf{h}(j) = 0$ als $j \notin J$.

Als **succes** dan $\mathbf{x}_{\text{opl}} = \mathbf{h}$, $M = \mu$, anders $M = \infty$.

Zij $\mathbf{A}$ een $\ell \times n$ matrix van volle rang, $\ell < n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^\ell$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

$$\text{(B)} \begin{cases} J \text{ rij van } \ell \text{ verschillende getallen uit } \{1, 2, \ldots, n\} \\ \text{zodat } \mathbf{A}(:, J) = \mathbf{I}_\ell,\ \mathbf{c}(J) = \mathbf{0},\ \mathbf{b} \geq 0 \end{cases}$$

Herhaal

- Als $\mathbf{c} \leq \mathbf{0}$ dan, **succes=true**, **stop**
  anders, kies j_0 zodat $\mathbf{c}(j_0) > 0$
- Als $\mathbf{A}(:, j_0) \leq \mathbf{0}$ dan, **succes=false**, **stop**
  anders, $i_0 \equiv \text{argmin}_i \{\mathbf{b}(i)/\mathbf{A}(i, j_0) \mid \mathbf{A}(i, j_0) > 0\}$
- Vervang het i_0-de getal van J door j_0
- Veeg met (i_0, j_0) als pivot
  (veeg $\mathbf{b}$, $M - \mu$ en $\mathbf{c}$ mee)

einde herhaal

$\mathbf{h}(J) = \mathbf{b}$, $\mathbf{h}(j) = 0$ als $j \notin J$.

Als **succes** dan $\mathbf{x}_{\text{opl}} = \mathbf{h}$, $M = \mu$, anders $M = \infty$.

Bewering. Het proces stopt na eindig veel stappen.

Bewijs. We lopen van hoek naar hoek waarbij de doelfunctie strikt stijgt. Er zijn maar eindig veel hoeken.

Zij $\mathbf{A}$ een $\ell \times n$ matrix van volle rang, $\ell < n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^\ell$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

$$\text{(B)} \begin{cases} J \text{ rij van } \ell \text{ verschillende getallen uit } \{1, 2, \ldots, n\} \\ \text{zodat } \mathbf{A}(:, J) = \mathbf{I}_\ell,\ \mathbf{c}(J) = \mathbf{0},\ \mathbf{b} \geq 0 \end{cases}$$

Herhaal

- Als $\mathbf{c} \leq \mathbf{0}$ dan, **succes=true**, **stop**
  anders, kies j_0 zodat $\mathbf{c}(j_0) > 0$
- Als $\mathbf{A}(:, j_0) \leq \mathbf{0}$ dan, **succes=false**, **stop**
  anders, $i_0 \equiv \text{argmin}_i\{\mathbf{b}(i)/\mathbf{A}(i, j_0) \mid \mathbf{A}(i, j_0) > 0\}$
- Vervang het i_0-de getal van J door j_0
- Veeg met (i_0, j_0) als pivot
  (veeg $\mathbf{b}$, $M - \mu$ en $\mathbf{c}$ mee)

einde herhaal

$\mathbf{h}(J) = \mathbf{b}$, $\mathbf{h}(j) = 0$ als $j \notin J$.

Als **succes** dan $\mathbf{x}_{\text{opl}} = \mathbf{h}$, $M = \mu$, anders $M = \infty$.

Bewering.
$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}_{\text{oor}}\mathbf{x} = \mathbf{b}_{\text{oor}},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}\ , \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \end{aligned}$$

waarbij $\mathbf{A}_{\text{oor}}$ de oorspronkelijke matrix is in standaardvorm en $\mathbf{b}_{\text{oor}}$ de oorspronkelijke vector $\mathbf{b}$.

Zij $\mathbf{A}$ een $\ell \times n$ matrix van volle rang, $\ell < n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^\ell$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

$$(\text{B}) \begin{cases} J \text{ rij van } \ell \text{ verschillende getallen uit } \{1, 2, \ldots, n\} \\ \text{zodat } \mathbf{A}(:, J) = \mathbf{I}_\ell, \ \mathbf{c}(J) = \mathbf{0}, \ \mathbf{b} \geq 0 \end{cases}$$

Herhaal

- Als $\mathbf{c} \leq \mathbf{0}$ dan, **succes=true**, **stop**
  anders, kies j_0 zodat $\mathbf{c}(j_0) > 0$
- Als $\mathbf{A}(:, j_0) \leq \mathbf{0}$ dan, **succes=false**, **stop**
  anders, $i_0 \equiv \text{argmin}_i\{\mathbf{b}(i)/\mathbf{A}(i, j_0) \mid \mathbf{A}(i, j_0) > 0\}$
- Vervang het i_0-de getal van J door j_0
- Veeg met (i_0, j_0) als pivot
  (veeg $\mathbf{b}$, $M - \mu$ en $\mathbf{c}$ mee)

einde herhaal

$\mathbf{h}(J) = \mathbf{b}$, $\mathbf{h}(j) = 0$ als $j \notin J$.

Als **succes** dan $\mathbf{x}_{\text{opl}} = \mathbf{h}$, $M = \mu$, anders $M = \infty$.

Bewering. Als $M < \infty$ dan is de gevonden $\mathbf{x}_{\text{opl}}$ een hoekpunt dat het probleem oplost ($\mathbf{x}_{\text{opl}}$ is een maximaliserende vector in $\mathcal{V}$: $\mathbf{x}_{\text{opl}} = \text{argmax}\{\mathbf{c}_{\text{oor}}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathcal{V}\}$ waarbij $\mathbf{c}_{\text{oor}}$ de oorspronkelijke vector $\mathbf{c}$ is).

Zij $\mathbf{A}$ een $\ell \times n$ matrix van volle rang, $\ell < n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^\ell$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

$$\text{(B)}\left\{\begin{array}{l} J \text{ rij van } \ell \text{ verschillende getallen uit } \{1, 2, \dots, n\} \\ \text{zodat } \mathbf{A}(:, J) = \mathbf{I}_\ell,\ \mathbf{c}(J) = \mathbf{0},\ \mathbf{b} \geq 0 \end{array}\right.$$

Herhaal

- Als $\mathbf{c} \leq \mathbf{0}$ dan, **succes=true**, **stop**
  anders, kies j_0 zodat $\mathbf{c}(j_0) > 0$
- Als $\mathbf{A}(:, j_0) \leq \mathbf{0}$ dan, **succes=false**, **stop**
  anders, $i_0 \equiv \text{argmin}_i\{\mathbf{b}(i)/\mathbf{A}(i, j_0) \mid \mathbf{A}(i, j_0) > 0\}$
- Vervang het i_0-de getal van J door j_0
- Veeg met (i_0, j_0) als pivot
  (veeg $\mathbf{b}$, $M - \mu$ en $\mathbf{c}$ mee)

einde herhaal

$\mathbf{h}(J) = \mathbf{b}$, $\mathbf{h}(j) = 0$ als $j \notin J$.

Als **succes** dan $\mathbf{x}_{\text{opl}} = \mathbf{h}$, $M = \mu$, anders $M = \infty$.

Stelling. Als $\mathcal{V}$ een hoekpunt heeft en $M < \infty$ dan wordt het maximum aangenomen in een hoekpunt.

We zullen later zien dat $\mathcal{V}$ een hoekpunt heeft als $\mathcal{V} \neq \emptyset$

Voorbeeld.

$$
\begin{array}{rrrrrr|r}
2 & 3 & 10 & 1 & 0 & 0 & 5 \\
4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 11 \\
3 & 4 & 16 & 0 & 0 & 1 & 8 \\
\hline
5 & 4 & 26 & 0 & 0 & 0 & M
\end{array}
$$

Voorbeeld.

2	3	10	1	0	0	5
4	1	2	0	1	0	11
3	4	16	0	0	1	8
5	4	26	0	0	0	M

$\mathbf{b} \geq 0$,
$J = [4, 5, 6]$.

			•	•	•	
2	3	10	1	0	0	5
4	1	2	0	1	0	11
3	4	16	0	0	1	8
5	4	26	0	0	0	M

Voorbeeld.

$$
\begin{array}{cccccc|c}
2 & 3 & 10 & 1 & 0 & 0 & 5 \\
4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 11 \\
3 & 4 & 16 & 0 & 0 & 1 & 8 \\
\hline
5 & 4 & 26 & 0 & 0 & 0 & M
\end{array}
$$

$\mathbf{b} \geq 0$,
$J = [4, 5, 6]$.

$$
\begin{array}{c|ccccc|c}
 & & & \bullet & \bullet & \bullet & \\
2 & 3 & 10 & 1 & 0 & 0 & 5 \\
4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 11 \\
3 & 4 & 16 & 0 & 0 & 1 & 8 \\
\hline
5 & 4 & 26 & 0 & 0 & 0 & M
\end{array}
$$

Kies $j_0 = 1$ (of 2 of 3).

Voorbeeld.

$$\begin{array}{cccccc|c} 2 & 3 & 10 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 11 \\ 3 & 4 & 16 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ \hline 5 & 4 & 26 & 0 & 0 & 0 & M \end{array}$$

$\mathbf{b} \geq 0$,
$J = [4, 5, 6]$.

$$\begin{array}{cccccc|c} & & & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \boxed{2} & 3 & 10 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 11 \\ 3 & 4 & 16 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ \hline 5 & 4 & 26 & 0 & 0 & 0 & M \end{array}$$

Kies $j_0 = 1$ (of 2 of 3).
Minimum $[5/2, 11/4, 8/3]$ voor $i_0 = 1$.
Nieuwe $J = [1, 5, 6]$.
Veeg met pivot $(i_0, j_0) = (1, 1)$.

Voorbeeld.

$$
\begin{array}{cccccc|c}
2 & 3 & 10 & 1 & 0 & 0 & 5 \\
4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 11 \\
3 & 4 & 16 & 0 & 0 & 1 & 8 \\
\hline
5 & 4 & 26 & 0 & 0 & 0 & M
\end{array}
$$

$\mathbf{b} \geq 0$,
$J = [4, 5, 6]$.

$$
\begin{array}{cccccc|c}
 & & & \bullet & \bullet & \bullet & \\
2 & 3 & 10 & 1 & 0 & 0 & 5 \\
4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 11 \\
3 & 4 & 16 & 0 & 0 & 1 & 8 \\
\hline
5 & 4 & 26 & 0 & 0 & 0 & M
\end{array}
$$

Kies $j_0 = 1$ (of 2 of 3).
Minimum $[5/2, 11/4, 8/3]$ voor $i_0 = 1$.
Nieuwe $J = [1, 5, 6]$.
Veeg met pivot $(i_0, j_0) = (1, 1)$.

$$
\begin{array}{cccccc|c}
\bullet & & & & \bullet & \bullet & \\
1 & 1.5 & 5 & 0.5 & 0 & 0 & 2.5 \\
0 & -5 & -18 & -2 & 1 & 0 & 1 \\
0 & -0.5 & 1 & -1.5 & 0 & 1 & 0.5 \\
\hline
0 & -3.5 & 1 & -2.5 & 0 & 0 & M - 12.5
\end{array}
$$

Voorbeeld.

$$\begin{array}{cccccc|c} 2 & 3 & 10 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 11 \\ 3 & 4 & 16 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ \hline 5 & 4 & 26 & 0 & 0 & 0 & M \end{array}$$

$\mathbf{b} \geq 0$,
$J = [4, 5, 6]$.

$$\begin{array}{cccccc|c} & & & \bullet & \bullet & \bullet & \\ 2 & 3 & 10 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 11 \\ 3 & 4 & 16 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ \hline 5 & 4 & 26 & 0 & 0 & 0 & M \end{array}$$

Kies $j_0 = 1$ (of 2 of 3).
Minimum $[5/2, 11/4, 8/3]$ voor $i_0 = 1$.
Nieuwe $J = [1, 5, 6]$.
Veeg met pivot $(i_0, j_0) = (1, 1)$.

$$\begin{array}{cccccc|c} \bullet & & & & \bullet & \bullet & \\ 1 & 1.5 & 5 & 0.5 & 0 & 0 & 2.5 \\ 0 & -5 & -18 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -0.5 & 1 & -1.5 & 0 & 1 & 0.5 \\ \hline 0 & -3.5 & 1 & -2.5 & 0 & 0 & M - 12.5 \end{array}$$

Kies $j_0 = 3$.

Voorbeeld.

$$
\begin{array}{cccccc|c}
2 & 3 & 10 & 1 & 0 & 0 & 5 \\
4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 11 \\
3 & 4 & 16 & 0 & 0 & 1 & 8 \\
\hline
5 & 4 & 26 & 0 & 0 & 0 & M
\end{array}
$$

$\mathbf{b} \geq 0$,
$J = [4, 5, 6]$.

$$
\begin{array}{cccccc|c}
 & & & \bullet & \bullet & \bullet & \\
2 & 3 & 10 & 1 & 0 & 0 & 5 \\
4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 11 \\
3 & 4 & 16 & 0 & 0 & 1 & 8 \\
\hline
5 & 4 & 26 & 0 & 0 & 0 & M
\end{array}
$$

Kies $j_0 = 1$ (of 2 of 3).
Minimum $[5/2, 11/4, 8/3]$ voor $i_0 = 1$.
Nieuwe $J = [1, 5, 6]$.
Veeg met pivot $(i_0, j_0) = (1, 1)$.

$$
\begin{array}{cccccc|c}
\bullet & & & & \bullet & \bullet & \\
1 & 1.5 & 5 & 0.5 & 0 & 0 & 2.5 \\
0 & -5 & -18 & -2 & 1 & 0 & 1 \\
0 & -0.5 & 1 & -1.5 & 0 & 1 & 0.5 \\
\hline
0 & -3.5 & 1 & -2.5 & 0 & 0 & M - 12.5
\end{array}
$$

Kies $j_0 = 3$.
Min. $[5/2.5, *, 0.5]$ voor $i_0 = 3$ (of 1).
Nieuwe $J = [1, 5, 3]$.
Veeg met pivot $(i_0, j_0) = (3, 3)$.

Voorbeeld.

$$\begin{array}{cccccc|c} 2 & 3 & 10 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 11 \\ 3 & 4 & 16 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ \hline 5 & 4 & 26 & 0 & 0 & 0 & M \end{array}$$

$\mathbf{b} \geq 0$,
$J = [4,5,6]$.

$$\begin{array}{cccccc|c} & & & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \boxed{2} & 3 & 10 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 11 \\ 3 & 4 & 16 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ \hline 5 & 4 & 26 & 0 & 0 & 0 & M \end{array}$$

Kies $j_0 = 1$ (of 2 of 3).
Minimum $[5/2, 11/4, 8/3]$ voor $i_0 = 1$.
Nieuwe $J = [1,5,6]$.
Veeg met pivot $(i_0, j_0) = (1,1)$.

$$\begin{array}{cccccc|c} \bullet & & & & \bullet & \bullet & \\ 1 & 1.5 & 5 & 0.5 & 0 & 0 & 2.5 \\ 0 & -5 & -18 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -0.5 & \boxed{1} & -1.5 & 0 & 1 & 0.5 \\ \hline 0 & -3.5 & 1 & -2.5 & 0 & 0 & M - 12.5 \end{array}$$

Kies $j_0 = 3$.
Min. $[5/2.5, *, 0.5]$ voor $i_0 = 3$ (of 1).
Nieuwe $J = [1,5,3]$.
Veeg met pivot $(i_0, j_0) = (3,3)$.

$$\begin{array}{cccccc|c} \bullet & & \bullet & & \bullet & & \\ 1 & 4 & 0 & 8 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & -14 & 0 & -29 & 1 & 18 & 10 \\ 0 & -0.5 & 1 & -1.5 & 0 & 1 & 0.5 \\ \hline 0 & -3 & 0 & -1 & 0 & -1 & M - 13 \end{array}$$

Geen verbetering meer mogelijk.

Voorbeeld.

$$\begin{array}{cccccc|c}
2 & 3 & 10 & 1 & 0 & 0 & 5 \\
4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 11 \\
3 & 4 & 16 & 0 & 0 & 1 & 8 \\
\hline
5 & 4 & 26 & 0 & 0 & 0 & M
\end{array}$$

$\mathbf{b} \geq 0$,
$J = [4, 5, 6]$.

$$\begin{array}{cccccc|c}
 & & & \bullet & \bullet & \bullet & \\
2 & 3 & 10 & 1 & 0 & 0 & 5 \\
4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 11 \\
3 & 4 & 16 & 0 & 0 & 1 & 8 \\
\hline
5 & 4 & 26 & 0 & 0 & 0 & M
\end{array}$$

Kies $j_0 = 1$ (of 2 of 3).
Minimum $[5/2, 11/4, 8/3]$ voor $i_0 = 1$.
Nieuwe $J = [1, 5, 6]$.
Veeg met pivot $(i_0, j_0) = (1, 1)$.

$$\begin{array}{cccccc|c}
\bullet & & & & \bullet & \bullet & \\
1 & 1.5 & 5 & 0.5 & 0 & 0 & 2.5 \\
0 & -5 & -18 & -2 & 1 & 0 & 1 \\
0 & -0.5 & 1 & -1.5 & 0 & 1 & 0.5 \\
\hline
0 & -3.5 & 1 & -2.5 & 0 & 0 & M - 12.5
\end{array}$$

Kies $j_0 = 3$.
Min. $[5/2.5, *, 0.5]$ voor $i_0 = 3$ (of 1).
Nieuwe $J = [1, 5, 3]$.
Veeg met pivot $(i_0, j_0) = (3, 3)$.

$$\begin{array}{cccccc|c}
\bullet & & \bullet & & \bullet & & \\
1 & 4 & 0 & 8 & 0 & -5 & 0 \\
0 & -14 & 0 & -29 & 1 & 18 & 10 \\
0 & -0.5 & 1 & -1.5 & 0 & 1 & 0.5 \\
\hline
0 & -3 & 0 & -1 & 0 & -1 & M - 13
\end{array}$$

Geen verbetering meer mogelijk.

$J = [1, 5, 3]$, $M = 13$,

$\mathbf{x}_{\text{opl}}(J) = \mathbf{h}(J) = (0, 10, 0.5)^{\mathsf{T}}$, $\mathbf{x}_{\text{opl}} = (0, 0, 0.5, 0, 10, 0)^{\mathsf{T}}$.

$x_j \equiv \mathbf{x}_{\text{opl}}(j)$ *aflezen uit de "eindtabel" is gemakkelijk:*

als $j \notin J$ dan is $x_j = 0$, anders
loop in de $j$de-kolom naar de rij met de 1 en x_j is de $\mathbf{b}(i)$ in die rij.

Program

- Optimaliseren
- Lineaire programmering
- Voorbeelden
- Polytopen
- Intermezzo: rang
- Intermezzo: notatie
- Hoekpunten
- Intermezzo: vegen
- Standaard vorm
- Simplex methode
- Positiviteitsristricties
- Het eerste hoekpunt

Minder dan n positiviteitsrestricties

Wat doen we als er **geen** *positiviteitsrestrictie zit op k van de n coördinaten x_j van* $\mathbf{x}$*?*

- Hernummer de x_j zodat $x_j \geq 0$ voor alle $j = k+1, \ldots, n$.
- Elimineer $x_1, \ldots, x_k$.

Voorbeeld.

$$\begin{array}{cc|cccc|c}
* & * & * & * & \dots & * & * \\
* & * & * & * & \dots & * & * \\
* & * & * & * & \dots & * & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
* & * & * & * & \dots & * & * \\
\hline
* & * & * & * & \dots & * & M
\end{array}
\qquad x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ \dots,\ x_n \geq 0$$

Voorbeeld.

$$\begin{array}{cc|cccc|c} * & * & * & * & \dots & * & * \\ * & * & * & * & \dots & * & * \\ * & * & * & * & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & * & * & * & \dots & * & * \\ \hline * & * & * & * & \dots & * & M \end{array}$$

$x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ \dots,\ x_n \geq 0$

Vereenvoudig (veeg en schaal) kolom 1 en 2

Voorbeeld.

$$\left.\begin{array}{cc|cccc|c} * & * & * & * & \ldots & * & * \\ * & * & * & * & \ldots & * & * \\ * & * & * & * & \ldots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & * & * & * & \ldots & * & * \\ \hline * & * & * & * & \ldots & * & M \end{array}\right.$$

$x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, $\ldots$, $x_n \geq 0$

Vereenvoudig (veeg en schaal) kolom 1 en 2

$$\left.\begin{array}{cc|cccc|c} 1 & 0 & * & * & \ldots & * & * \\ 0 & 1 & * & * & \ldots & * & * \\ 0 & 0 & * & * & \ldots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & * & * & \ldots & * & * \\ \hline 0 & 0 & * & * & \ldots & * & M - * \end{array}\right.$$

Voorbeeld.

$$\begin{array}{cc|cccc|c} * & * & * & * & \ldots & * & * \\ * & * & * & * & \ldots & * & * \\ * & * & * & * & \ldots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & * & * & * & \ldots & * & * \\ \hline * & * & * & * & \ldots & * & M \end{array}$$

$x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, $\ldots$, $x_n \geq 0$

Vereenvoudig (veeg en schaal) kolom 1 en 2

$$\begin{array}{cc|cccc|c} 1 & 0 & * & * & \ldots & * & * \\ 0 & 1 & * & * & \ldots & * & * \\ 0 & 0 & * & * & \ldots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & * & * & \ldots & * & * \\ \hline 0 & 0 & * & * & \ldots & * & M - * \end{array}$$

Voorbeeld.

$$\begin{array}{cc|cccc|c}
* & * & * & * & \dots & * & * \\
* & * & * & * & \dots & * & * \\
* & * & * & * & \dots & * & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
* & * & * & * & \dots & * & * \\
\hline
* & * & * & * & \dots & * & M
\end{array}$$

$x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ \dots,\ x_n \geq 0$

Vereenvoudig (veeg en schaal) kolom 1 en 2

$$\begin{array}{cc|cccc|c}
1 & 0 & * & * & \dots & * & * \\
0 & 1 & * & * & \dots & * & * \\
0 & 0 & * & * & \dots & * & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & * & * & \dots & * & * \\
\hline
0 & 0 & * & * & \dots & * & M - *
\end{array}$$

Het zwarte deel is in standaard vorm
Los op met de simplexmethode.
Negeer het deel in magenta
ook in het verdere veegproces

Voorbeeld.

$$\left.\begin{array}{cc|cccc|c} * & * & * & * & \dots & * & * \\ * & * & * & * & \dots & * & * \\ * & * & * & * & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & * & * & * & \dots & * & * \\ \hline * & * & * & * & \dots & * & M \end{array}\right.$$

$x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ \dots,\ x_n \geq 0$

Vereenvoudig (veeg en schaal) kolom 1 en 2

$$\left.\begin{array}{cc|cccc|c} 1 & 0 & * & * & \dots & * & * \\ 0 & 1 & * & * & \dots & * & * \\ 0 & 0 & * & * & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & * & * & \dots & * & * \\ \hline 0 & 0 & * & * & \dots & * & M - * \end{array}\right.$$

Het zwarte deel is in standaard vorm
Los op met de simplexmethode.
Negeer het deel in magenta
ook in het verdere veegproces

Als $x_3, \dots, x_n$ de oplossing is van het zwarte deel,

dan levert invullen in de eerste twee vergelijkingen (dwz de eerste twee rijen), x_1 en x_2.

Merk op dat we ons niet hoeven af te vragen of x_1 en x_2 wel het goede teken hebben.

Vb.

$$\begin{array}{cc|cccccc|c}
1 & 4 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\
1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\
1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\
\hline
3 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & M
\end{array}$$

$$x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ \ldots,\ x_8 \geq 0$$

Dit is, in standaard vorm, het probleem in **Opgave 6.5.14** van het dictaat.

Vb.

$$\begin{array}{cc|cccccc|c}
1 & 4 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\
1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\
1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\
\hline
3 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & M
\end{array}
\qquad x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ \ldots,\ x_8 \geq 0$$

$$\begin{array}{cc|cccccc|c}
1 & 4 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
0 & -1 & -4 & -2 & -1 & +1 & 0 & 0 & -4 \\
0 & -2 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & -1 & -5 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & -5 \\
\hline
0 & -11 & -5 & -7 & -3 & 0 & 0 & 0 & M-6
\end{array}$$

Vb.

$$\begin{array}{cc|cccccc|c}
1 & 4 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\
1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\
1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\
\hline
3 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & M
\end{array}$$

$$x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ \ldots,\ x_8 \geq 0$$

$$\begin{array}{cc|cccccc|c}
1 & 4 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 4 \\
0 & -2 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & -1 & -5 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & -5 \\
\hline
0 & -11 & -5 & -7 & -3 & 0 & 0 & 0 & M-6
\end{array}$$

Vb.

$$\begin{array}{rr|rrrrrr|r}
1 & 4 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\
1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\
1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\
\hline
3 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & M
\end{array}
\qquad x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ \ldots,\ x_8 \geq 0$$

$$\begin{array}{rr|rrrrrr|r}
1 & 4 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 4 \\
0 & -2 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & -1 & -5 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & -5 \\
\hline
0 & -11 & -5 & -7 & -3 & 0 & 0 & 0 & M-6
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr|rrrrrr|r}
1 & 0 & -13 & -5 & -3 & 4 & 0 & 0 & -14 \\
0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 0 & 8 & 3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 9 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\
\hline
0 & 0 & 39 & 15 & 8 & -11 & 0 & 0 & M+38
\end{array}
\qquad \begin{array}{l} J = [5,1] \\ \mathbf{h}_0 = (1,0,0,0,1,0)^\mathsf{T} \end{array}$$

Merk op dat uit de eerste regel volgt dat

$$x_1 = -14 + 13x_3 + 5x_4 + 3x_5 - 4x_6$$

en uit de tweede regel

$$x_2 = 4 - 4x_3 - 2x_4 - x_5 + x_6.$$

Vb.

$$\begin{array}{cc|cccccc|c}
1 & 4 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\
1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\
1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\
\hline
3 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & M
\end{array}$$

$x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ \ldots,\ x_8 \geq 0$

$$\begin{array}{cc|cccccc|c}
1 & 0 & -13 & -5 & -3 & 4 & 0 & 0 & -14 \\
0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 0 & 8 & 3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 9 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\
\hline
0 & 0 & 39 & 15 & 8 & -11 & 0 & 0 & M+38
\end{array}$$

$J = [5, 1]$

$\mathbf{h}_0 = (1, 0, 0, 0, 1, 0)^\mathsf{T}$

Vb.

$$\begin{array}{cc|cccccc|c}
1 & 4 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\
1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\
1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\
\hline
3 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & M
\end{array}$$

$x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ \ldots,\ x_8 \geq 0$

$$\begin{array}{cc|cccccc|c}
1 & 0 & -13 & -5 & -3 & 4 & 0 & 0 & -14 \\
0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 0 & 8 & 3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 9 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\
\hline
0 & 0 & 39 & 15 & 8 & -11 & 0 & 0 & M+38
\end{array}$$

$J = [5, 1]$

$\mathbf{h}_0 = (1, 0, 0, 0, 1, 0)^\mathsf{T}$

$$\begin{array}{cc|cccccc|c}
1 & 0 & -13 & -5 & -3 & 4 & 0 & 0 & -14 \\
0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -10 & 1 & 8 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 15 & 8 & -50 & 0 & 39 & M-1
\end{array}$$

Vb.

$$
\begin{array}{cc|cccccc|c}
1 & 4 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\
1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\
1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\
\hline
3 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & M
\end{array}
\qquad x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ \ldots,\ x_8 \geq 0
$$

$$
\begin{array}{cc|cccccc|c}
1 & 0 & -13 & -5 & -3 & 4 & 0 & 0 & -14 \\
0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -10 & 1 & 8 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 15 & 8 & -50 & 0 & 39 & M-1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc|cccccc|c}
1 & 0 & -13 & -5 & -3 & 4 & 0 & 0 & -14 \\
0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -10 & 1 & 8 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & -9 & 0 & +30 & -8 & -25 & M-9
\end{array}
\qquad J = [3, 1]
$$

Vb.

$$\begin{array}{cc|cccccc|c}
1 & 4 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\
1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\
1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\
\hline
3 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & M
\end{array}$$

$x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ \ldots,\ x_8 \geq 0$

$$\begin{array}{cc|cccccc|c}
1 & 0 & -13 & -5 & -3 & 4 & 0 & 0 & -14 \\
0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -10 & 1 & 8 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & -9 & 0 & +30 & -8 & -25 & M-9
\end{array}$$

$J = [3, 1]$

$$\begin{array}{cc|cccccc|c}
1 & 0 & -13 & -5 & -3 & 4 & 0 & 0 & -14 \\
0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 0 & 10 & 3 & 1 & 0 & 1 & -2 & 11 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\
\hline
0 & 0 & -30 & -9 & 0 & 0 & -8 & 5 & M-39
\end{array}$$

$J = [3, 4]$

$j_0 = 6$

er is geen i_0

Vb.

$$\begin{array}{cc|cccccc|c}
1 & 4 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\
1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\
1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\
\hline
3 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & M
\end{array}
\qquad x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ \ldots,\ x_8 \geq 0$$

$$\begin{array}{cc|cccccc|c}
1 & 0 & -13 & -5 & -3 & 4 & 0 & 0 & -14 \\
0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 0 & 10 & 3 & 1 & 0 & 1 & -2 & 11 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\
\hline
0 & 0 & -30 & -9 & 0 & 0 & -8 & 5 & M-39
\end{array}$$

$J = [3, 4]$

$j_0 = 6$

er is geen i_0

Conclusie. $\mathbf{x} = (x_1, x_2, 0, 0, 11 + 2\alpha, 1 + \alpha, 0, \alpha)^\top$

is feasible voor iedere $\alpha \geq 0$. I.h.b., $x_3 = x_4 = 0$.

Dus $x_1 = -14 + 3x_5 - 4x_6 = 15 + 2\alpha$

en $x_2 = 4 - x_5 + x_6 = -6 - \alpha$.

Dus is $\mathbf{x} = (15 + 2\alpha, -6 - \alpha, 0, 0, \ldots)^\top$ feasible ($\alpha \geq 0$)

(controleer door invullen) en

$$3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 39 + 5\alpha \to \infty = M \text{ voor } \alpha \to \infty$$

Voorbeeld.

$$\begin{array}{cc|cccc|c}
* & * & * & * & \ldots & * & * \\
* & * & * & * & \ldots & * & * \\
* & * & * & * & \ldots & * & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
* & * & * & * & \ldots & * & * \\
\hline
* & * & * & * & \ldots & * & M
\end{array}$$

$$x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0$$

Voorbeeld.

$$\begin{array}{cc|cccc|c}
* & * & * & * & \dots & * & * \\
* & * & * & * & \dots & * & * \\
* & * & * & * & \dots & * & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
* & * & * & * & \dots & * & * \\
\hline
* & * & * & * & \dots & * & M
\end{array}$$

$x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, $\dots$, $x_n \geq 0$

Vereenvoudig (veeg en schaal) kolom 1 en 2

Voorbeeld.

$$\begin{array}{cc|cccc|c} * & * & * & * & \dots & * & * \\ * & * & * & * & \dots & * & * \\ * & * & * & * & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & * & * & * & \dots & * & * \\ \hline * & * & * & * & \dots & * & M \end{array}$$

$x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, $\ldots$, $x_n \geq 0$

Vereenvoudig (veeg en schaal) kolom 1 en 2

Stel $\mathbf{A}(1,1) = 0$.

$$\begin{array}{cc|cccc|c} 0 & 0 & * & * & \dots & * & * \\ 1 & 0 & * & * & \dots & * & * \\ 0 & 1 & * & * & \dots & * & * \\ 0 & 0 & * & * & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & * & * & \dots & * & * \\ \hline 0 & 0 & * & * & \dots & * & M - * \end{array}$$

Voorbeeld.

$$\begin{array}{cc|cccc|c} * & * & * & * & \ldots & * & * \\ * & * & * & * & \ldots & * & * \\ * & * & * & * & \ldots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & * & * & * & \ldots & * & * \\ \hline * & * & * & * & \ldots & * & M \end{array}$$

$x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, $\ldots$, $x_n \geq 0$

Vereenvoudig (veeg en schaal) kolom 1 en 2

Stel $\mathbf{A}(1,1) = 0$.

$$\begin{array}{cc|cccc|c} 0 & 0 & * & * & \ldots & * & * \\ 1 & 0 & * & * & \ldots & * & * \\ 0 & 1 & * & * & \ldots & * & * \\ 0 & 0 & * & * & \ldots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & * & * & \ldots & * & * \\ \hline 0 & 0 & * & * & \ldots & * & M - * \end{array}$$

Voorbeeld.

$$\begin{array}{cc|cccc|c} * & * & * & * & \dots & * & * \\ * & * & * & * & \dots & * & * \\ * & * & * & * & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & * & * & * & \dots & * & * \\ \hline * & * & * & * & \dots & * & M \end{array}$$

$x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, $\dots$, $x_n \geq 0$

Vereenvoudig (veeg en schaal) kolom 1 en 2

Stel $\mathbf{A}(1,1) = 0$.

$$\begin{array}{cc|cccc|c} 0 & 0 & * & * & \dots & * & * \\ 1 & 0 & * & * & \dots & * & * \\ 0 & 1 & * & * & \dots & * & * \\ 0 & 0 & * & * & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & * & * & \dots & * & * \\ \hline 0 & 0 & * & * & \dots & * & M - * \end{array}$$

Het zwarte deel is in standaard vorm
Los op met de simplexmethode.

Voorbeeld.

$$\begin{array}{cc|cccc|c}
* & * & * & * & \dots & * & * \\
* & * & * & * & \dots & * & * \\
* & * & * & * & \dots & * & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
* & * & * & * & \dots & * & * \\
\hline
* & * & * & * & \dots & * & M
\end{array}$$

$x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, $\dots$, $x_n \geq 0$

Vereenvoudig (veeg en schaal) kolom 1 en 2

Stel $\mathbf{A}(1,1) = 0$.

$$\begin{array}{cc|cccc|c}
0 & 0 & * & * & \dots & * & * \\
1 & 0 & * & * & \dots & * & * \\
0 & 1 & * & * & \dots & * & * \\
0 & 0 & * & * & \dots & * & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & * & * & \dots & * & * \\
\hline
0 & 0 & * & * & \dots & * & M - *
\end{array}$$

Het zwarte deel is in standaard vorm
Los op met de simplexmethode.

Als $x_3, \dots, x_n$ de oplossing is van het zwarte deel,

dan levert invullen in de eerste twee vergelijkingen (dwz de eerste twee rijen), x_1 en x_2.

Voorbeeld.

$$\begin{array}{ccc|ccccc|c}
* & * & * & * & * & \ldots & * & & * \\
* & * & * & * & * & \ldots & * & & * \\
* & * & * & * & * & \ldots & * & & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
* & * & * & * & * & \ldots & * & & * \\
\hline
* & * & * & * & * & \ldots & * & & M
\end{array}$$

$$x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0$$

Voorbeeld.

$$\begin{array}{ccc|cccc|c}
* & * & * & * & * & \dots & * & * \\
* & * & * & * & * & \dots & * & * \\
* & * & * & * & * & \dots & * & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
* & * & * & * & * & \dots & * & * \\
\hline
* & * & * & * & * & \dots & * & M
\end{array}$$

$x_4 \geq 0$, $x_5 \geq 0$, $\dots$, $x_n \geq 0$

Vereenvoudig (veeg en schaal) kolom 1, 2 en 3

Voorbeeld.

$$\begin{array}{ccc|cccc|c}
* & * & * & * & * & \dots & * & * \\
* & * & * & * & * & \dots & * & * \\
* & * & * & * & * & \dots & * & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
* & * & * & * & * & \dots & * & * \\
\hline
* & * & * & * & * & \dots & * & M
\end{array}$$

$x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ \dots,\ x_n \geq 0$

Vereenvoudig (veeg en schaal) kolom 1, 2 en 3

Stel rang($\mathbf{A}(:, [1, 2, 3])$) is 2.

$$\begin{array}{ccc|cccc|c}
1 & 0 & 0 & * & * & \dots & * & * \\
0 & 1 & 0 & * & * & \dots & * & * \\
0 & 0 & 0 & * & * & \dots & * & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & * & * & \dots & * & * \\
\hline
0 & 0 & * & * & * & \dots & * & M - *
\end{array}$$

Voorbeeld.

$$\begin{array}{ccc|cccc|c}
* & * & * & * & * & \dots & * & * \\
* & * & * & * & * & \dots & * & * \\
* & * & * & * & * & \dots & * & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
* & * & * & * & * & \dots & * & * \\
\hline
* & * & * & * & * & \dots & * & M
\end{array}$$

$x_4 \geq 0$, $x_5 \geq 0$, $\dots$, $x_n \geq 0$

Vereenvoudig (veeg en schaal) kolom 1, 2 en 3

Stel rang($\mathbf{A}(:,[1,2,3])$) is 2.

$$\begin{array}{ccc|cccc|c}
1 & 0 & 0 & * & * & \dots & * & * \\
0 & 1 & 0 & * & * & \dots & * & * \\
0 & 0 & 0 & * & * & \dots & * & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & * & * & \dots & * & * \\
\hline
0 & 0 & * & * & * & \dots & * & M - *
\end{array}$$

$c_3 = 0$ anders is $M = \infty$.

Voorbeeld.

$$\begin{array}{ccc|cccc|c}
* & * & * & * & * & \dots & * & * \\
* & * & * & * & * & \dots & * & * \\
* & * & * & * & * & \dots & * & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
* & * & * & * & * & \dots & * & * \\
\hline
* & * & * & * & * & \dots & * & M
\end{array}$$

$x_4 \geq 0$, $x_5 \geq 0$, $\dots$, $x_n \geq 0$

Vereenvoudig (veeg en schaal) kolom 1, 2 en 3

Stel rang($\mathbf{A}(:, [1, 2, 3])$) is 2.

$$\begin{array}{ccc|cccc|c}
1 & 0 & 0 & * & * & \dots & * & * \\
0 & 1 & 0 & * & * & \dots & * & * \\
0 & 0 & 0 & * & * & \dots & * & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & * & * & \dots & * & * \\
\hline
0 & 0 & 0 & * & * & \dots & * & M - *
\end{array}$$

Voorbeeld.

$$\begin{array}{ccc|cccc|c}
* & * & * & * & * & \dots & * & * \\
* & * & * & * & * & \dots & * & * \\
* & * & * & * & * & \dots & * & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
* & * & * & * & * & \dots & * & * \\
\hline
* & * & * & * & * & \dots & * & M
\end{array}$$

$x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ \dots,\ x_n \geq 0$

Vereenvoudig (veeg en schaal) kolom 1, 2 en 3

Stel rang($\mathbf{A}(:, [1, 2, 3])$) is 2.

$$\begin{array}{ccc|cccc|c}
1 & 0 & 0 & * & * & \dots & * & * \\
0 & 1 & 0 & * & * & \dots & * & * \\
0 & 0 & 0 & * & * & \dots & * & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & * & * & \dots & * & * \\
\hline
0 & 0 & 0 & * & * & \dots & * & M - *
\end{array}$$

Voorbeeld.

$$
\begin{array}{ccc|cccc|c}
* & * & * & * & * & \dots & * & * \\
* & * & * & * & * & \dots & * & * \\
* & * & * & * & * & \dots & * & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
* & * & * & * & * & \dots & * & * \\
\hline
* & * & * & * & * & \dots & * & M
\end{array}
$$

$x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ \dots,\ x_n \geq 0$

Vereenvoudig (veeg en schaal) kolom 1, 2 en 3

Stel rang($\mathbf{A}(:, [1, 2, 3])$) is 2.

$$
\begin{array}{ccc|cccc|c}
1 & 0 & 0 & * & * & \dots & * & * \\
0 & 1 & 0 & * & * & \dots & * & * \\
0 & 0 & 0 & * & * & \dots & * & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & * & * & \dots & * & * \\
\hline
0 & 0 & 0 & * & * & \dots & * & M - *
\end{array}
$$

Het zwarte deel is in standaard vorm
Los op met de simplexmethode.

Voorbeeld.

$$\begin{array}{ccc|cccc|c}
* & * & * & * & * & \dots & * & * \\
* & * & * & * & * & \dots & * & * \\
* & * & * & * & * & \dots & * & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
* & * & * & * & * & \dots & * & * \\
\hline
* & * & * & * & * & \dots & * & M
\end{array}$$

$x_4 \geq 0$, $x_5 \geq 0$, $\dots$, $x_n \geq 0$

Vereenvoudig (veeg en schaal) kolom 1, 2 en 3

Stel rang($\mathbf{A}(:,[1,2,3])$) is 2.

$$\begin{array}{ccc|cccc|c}
1 & 0 & 0 & * & * & \dots & * & * \\
0 & 1 & 0 & * & * & \dots & * & * \\
0 & 0 & 0 & * & * & \dots & * & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & * & * & \dots & * & * \\
\hline
0 & 0 & 0 & * & * & \dots & * & M - *
\end{array}$$

Het zwarte deel is in standaard vorm
Los op met de simplexmethode.

Als $x_4, \dots, x_n$ de oplossing is van het zwarte deel,

dan levert invullen in de eerste twee vergelijkingen (dwz de eerste twee rijen), x_1 en x_2.
x_3 mag alles zijn.

Program

- Optimaliseren
- Lineaire programmering
- Voorbeelden
- Polytopen
- Intermezzo: rang
- Intermezzo: notatie
- Hoekpunten
- Intermezzo: vegen
- Standaard vorm
- Simplex methode
- Positiviteitsristricties
- Het eerste hoekpunt

Het vinden van het 1ste hoekpunt

$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\text{stand}}$ is $\ell \times n$, $\ell < n$, $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ en } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$

Stel $\mathbf{A}$ komt van een $\ell \times k$ matrix $\mathbf{A}_{\text{oor}}$ door toevoegen van ℓ slack variabelen ($n = \ell + k$): $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{\text{oor}}, \mathbf{I}_\ell]$.
En stel

$\mathbf{0}_k \equiv (0, 0, \ldots, 0)^{\mathsf{T}}$ is een aanvaardbaar punt
voor het oorspronkelijke ℓ bij k probleem

Dan is
- $\circ$ $J_1 = [\,k+1, \ldots, k+\ell\,]$ een basis,
- $\circ$ $\mathbf{h}_1 \equiv (\mathbf{0}_k^{\mathsf{T}}, \mathbf{b}^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} \geq \mathbf{0}$, en
- $\circ$ $\mathbf{h}_1$ is een hoekpunt van $\mathcal{V}$.

Conclusie. $\mathbf{h}_1$ is een geschikt eerste hoekpunt.

Het vinden van het 1ste hoekpunt

$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\text{stand}}$ is $\ell \times n$, $\ell < n$, $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ en } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$

Stel $\mathbf{A}$ komt van een $\ell \times k$ matrix $\mathbf{A}_{\text{oor}}$ door toevoegen van ℓ slack variabelen $(n = \ell + k)$: $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{\text{oor}}, \mathbf{I}_\ell]$.
En stel

> $\mathbf{0}_k \equiv (0, 0, \ldots, 0)^\mathsf{T}$ is een aanvaardbaar punt
> voor het oorspronkelijke ℓ bij k probleem

Dan is
- $\circ$ $J_1 = [\,k+1, \ldots, k+\ell\,]$ een basis,
- $\circ$ $\mathbf{h}_1 \equiv (\mathbf{0}_k^\mathsf{T}, \mathbf{b}^\mathsf{T})^\mathsf{T} \geq \mathbf{0}$, en
- $\circ$ $\mathbf{h}_1$ is een hoekpunt van $\mathcal{V}$.

Conclusie. $\mathbf{h}_1$ is een geschikt eerste hoekpunt.

$\mathbf{0}_k$ *is een aanvaardbaar punt voor het oorspronkelijk probleem, precies dan als* $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$.

Het vinden van het 1ste hoekpunt

$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\text{stand}}$ is $\ell \times n$, $\ell < n$, $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$

Stel $\mathbf{A}$ komt van een $\ell \times k$ matrix $\mathbf{A}_{\text{oor}}$ door toevoegen van ℓ slack variabelen $(n = \ell + k)$: $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{\text{oor}}, \mathbf{I}_\ell]$.

En stel

$\mathbf{0}_k \equiv (0, 0, \ldots, 0)^\mathsf{T}$ is een aanvaardbaar punt voor het oorspronkelijke ℓ bij k probleem

Dan is

- $J_1 = [\,k+1, \ldots, k+\ell\,]$ een basis,
- $\mathbf{h}_1 \equiv (\mathbf{0}_k^\mathsf{T}, \mathbf{b}^\mathsf{T})^\mathsf{T} \geq \mathbf{0}$, en
- $\mathbf{h}_1$ is een hoekpunt van $\mathcal{V}$.

Conclusie. $\mathbf{h}_1$ is een geschikt eerste hoekpunt.

Wat doen we als $\mathbf{0}_k$ niet aanvaardbaar is voor het oorspronkelijk probleem?

Het vinden van het 1ste hoekpunt

$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\text{stand}}$ is $\ell \times n$, $\ell < n$, $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ en } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$

- Vind basispunt $\mathbf{p}$: vind 'n rij J van ℓ getallen waarvoor
  $\mathbf{p}(j) = 0$ als $j \notin J$,
  rang$(\mathbf{A}(:, J)) = \ell$ en $\mathbf{A}(:, J)\mathbf{p}(J) = \mathbf{b}$.

Stel $\mathbf{p}$ is **niet** aanvaardbaar.

Het vinden van het 1ste hoekpunt

$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\text{stand}}$ is $\ell \times n$, $\ell < n$, $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$

- Vind basispunt $\mathbf{p}$: vind 'n rij J van ℓ getallen waarvoor
  $\mathbf{p}(j) = 0$ als $j \notin J$,
  $\text{rang}(\mathbf{A}(:, J)) = \ell$ en $\mathbf{A}(:, J)\mathbf{p}(J) = \mathbf{b}$.

Stel $\mathbf{p}$ is **niet** aanvaardbaar.

- Veeg zo dat $\mathbf{A}(:, J) = \mathbf{I}_\ell$.

Dan is $\mathbf{p}(J) = \mathbf{b}$.

Het vinden van het 1ste hoekpunt

$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\text{stand}}$ is $\ell \times n$, $\ell < n$, $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$

- Vind basispunt $\mathbf{p}$: vind 'n rij J van ℓ getallen waarvoor
  $\mathbf{p}(j) = 0$ als $j \notin J$,
  $\text{rang}(\mathbf{A}(:, J)) = \ell$ en $\mathbf{A}(:, J)\mathbf{p}(J) = \mathbf{b}$.

Stel $\mathbf{p}$ is **niet** aanvaardbaar.

- Veeg zo dat $\mathbf{A}(:, J) = \mathbf{I}_\ell$.
- Zij $i_0 \equiv \text{argmin}_i\, \mathbf{b}(i)$. Dan geldt

  $\rho \equiv -\mathbf{b}(i_0) > 0$, $\mathbf{p}(j) + \rho \geq 0$ en $\mathbf{p}(J(i_0)) + \rho = 0$.

Het vinden van het 1ste hoekpunt

$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\text{stand}}$ is $\ell \times n$, $\ell < n$, $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ en } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$

- Vind basispunt $\mathbf{p}$: vind 'n rij J van ℓ getallen waarvoor
  $\mathbf{p}(j) = 0$ als $j \notin J$,
  $\text{rang}(\mathbf{A}(:, J)) = \ell$ en $\mathbf{A}(:, J)\mathbf{p}(J) = \mathbf{b}$.

Stel $\mathbf{p}$ is **niet** aanvaardbaar.

- Veeg zo dat $\mathbf{A}(:, J) = \mathbf{I}_\ell$. $\mathbf{1}$ is de ℓ-vector $(1, 1, \ldots, 1)^\mathsf{T}$.
- Zij $i_0 \equiv \text{argmin}_i\, \mathbf{b}(i)$. Dan geldt

$$\rho \equiv -\mathbf{b}(i_0) > 0, \quad \mathbf{p}(j) + \rho \geq 0 \;\text{ en }\; \mathbf{p}(J(i_0)) + \rho = 0.$$

$\mathbf{1}_J$ is de n-vector: $\mathbf{1}_J(j) = 1$ als $j \in J$ en $\mathbf{1}_J(j) = 0$ anders.

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad [\mathbf{A}, -\mathbf{1}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} + \rho \mathbf{1}_J \\ \rho \end{bmatrix} = \mathbf{b}.$$

Verder is $\mathbf{h}_0^+ \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{p} + \rho \mathbf{1}_J \\ \rho \end{bmatrix} \geq 0$

en heeft $[\mathbf{A}(:, J \backslash \{J(i_0)\}), -\mathbf{1}]$ volle rang.

Het vinden van het 1ste hoekpunt

$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\text{stand}}$ is $\ell \times n$, $\ell < n$, $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$

- Vind basispunt $\mathbf{p}$: vind 'n rij J van ℓ getallen waarvoor
  $\mathbf{p}(j) = 0$ als $j \notin J$,
  $\text{rang}(\mathbf{A}(:, J)) = \ell$ en $\mathbf{A}(:, J)\mathbf{p}(J) = \mathbf{b}$.

Stel $\mathbf{p}$ is **niet** aanvaardbaar.

- Veeg zo dat $\mathbf{A}(:, J) = \mathbf{I}_\ell$. $\mathbf{1}$ is de ℓ-vector $(1, 1, \ldots, 1)^{\mathsf{T}}$.
- Zij $i_0 \equiv \text{argmin}_i\, \mathbf{b}(i)$.

Alternatief probleem (+). Maximaliseer $(-z)$,

$$\text{zodat} \quad [\mathbf{A}, -\mathbf{1}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{b} \quad \text{en} \quad \mathbf{x} \geq 0,\ z \geq 0.$$

Merk op: $\qquad \min z = -\max(-z)$.

Het vinden van het 1ste hoekpunt

$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\text{stand}}$ is $\ell \times n$, $\ell < n$, $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ en $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$

- Vind basispunt $\mathbf{p}$: vind 'n rij J van ℓ getallen waarvoor
  $\mathbf{p}(j) = 0$ als $j \notin J$,
  rang$(\mathbf{A}(:, J)) = \ell$ en $\mathbf{A}(:, J)\mathbf{p}(J) = \mathbf{b}$.

Stel $\mathbf{p}$ is **niet** aanvaardbaar.

- Veeg zo dat $\mathbf{A}(:, J) = \mathbf{I}_\ell$. $\mathbf{1}$ is de ℓ-vector $(1, 1, \ldots, 1)^\mathsf{T}$.
- Zij $i_0 \equiv \text{argmin}_i\, \mathbf{b}(i)$.

Alternatief probleem (+). Maximaliseer $(-z)$,

$$\text{zodat} \quad [\mathbf{A}, -\mathbf{1}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{b} \quad \text{en} \quad \mathbf{x} \geq 0,\ z \geq 0.$$

Stelling. $\mathcal{V} \neq \emptyset \;\Leftrightarrow$ maximum$(-z) = 0$ $(< \infty)$.

Bewijs. Met $\mathcal{V}^+ \equiv \{\mathbf{x}^+ \mid [\mathbf{A}, -\mathbf{1}]\mathbf{x}^+ = \mathbf{b},\ \mathbf{x}^+ \geq \mathbf{0}\}$,

geldt $\quad \mathcal{V} = \{\mathbf{x} \mid (\mathbf{x}^\mathsf{T}, 0)^\mathsf{T} \in \mathcal{V}^+\}$.

Het vinden van het 1ste hoekpunt

$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\text{stand}}$ is $\ell \times n$, $\ell < n$, $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$

- Vind basispunt **p**: vind 'n rij J van ℓ getallen waarvoor
  $\mathbf{p}(j) = 0$ als $j \notin J$,
  $\text{rang}(\mathbf{A}(:,J)) = \ell$ en $\mathbf{A}(:,J)\mathbf{p}(J) = \mathbf{b}$.

Stel **p** is **niet** aanvaardbaar.

- Veeg zo dat $\mathbf{A}(:,J) = \mathbf{I}_\ell$. $\mathbf{1}$ is de ℓ-vector $(1, 1, \ldots, 1)^{\mathsf{T}}$.
- Zij $i_0 \equiv \text{argmin}_i\, \mathbf{b}(i)$.

Alternatief probleem (+). Maximaliseer $(-z)$,

$$\text{zodat} \quad [\mathbf{A}, -\mathbf{1}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{b} \quad \text{en} \quad \mathbf{x} \geq 0,\ z \geq 0.$$

Voor $(+)$ is $\mathbf{h}_0^+$ een aanvaardbaar hoekpunt.

Los (+) op met de simplexmethode met start $\mathbf{h}_0^+$.

Het vinden van het 1ste hoekpunt

$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\text{stand}}$ is $\ell \times n$, $\ell < n$, $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$

- Vind basispunt $\mathbf{p}$: vind 'n rij J van ℓ getallen waarvoor
  $\mathbf{p}(j) = 0$ als $j \notin J$,
  $\text{rang}(\mathbf{A}(:,J)) = \ell$ en $\mathbf{A}(:,J)\mathbf{p}(J) = \mathbf{b}$.

Stel $\mathbf{p}$ is **niet** aanvaardbaar.

- Veeg zo dat $\mathbf{A}(:,J) = \mathbf{I}_\ell$. $\mathbf{1}$ is de ℓ-vector $(1,1,\ldots,1)^\mathsf{T}$.
- Zij $i_0 \equiv \text{argmin}_i\, \mathbf{b}(i)$.

Alternatief probleem (+). Maximaliseer $(-z)$,

$$\text{zodat} \quad [\mathbf{A}, -\mathbf{1}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{b} \quad \text{en} \quad \mathbf{x} \geq 0,\ z \geq 0.$$

- Voor de bij $\mathbf{h}_0^+$ behorende basis, vervang i_0-de getal J door $n+1$: veeg (+) met pivot $(i_0, n+1)$.
- **Los (+) op met de simplexmethode met start $\mathbf{h}_0^+$.**

Het vinden van het 1ste hoekpunt

$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\text{stand}}$ is $\ell \times n$, $\ell < n$, $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$

- Vind basispunt $\mathbf{p}$: vind 'n rij J van ℓ getallen waarvoor
  $\mathbf{p}(j) = 0$ als $j \notin J$,
  rang$(\mathbf{A}(:, J)) = \ell$ en $\mathbf{A}(:, J)\mathbf{p}(J) = \mathbf{b}$.

Stel $\mathbf{p}$ is **niet** aanvaardbaar.

- Veeg zo dat $\mathbf{A}(:, J) = \mathbf{I}_\ell$. $\mathbf{1}$ is de ℓ-vector $(1, 1, \ldots, 1)^\top$.
- Zij $i_0 \equiv \text{argmin}_i\, \mathbf{b}(i)$.

Alternatief probleem (+). Maximaliseer $(-z)$,

$$\text{zodat} \quad [\mathbf{A}, -\mathbf{1}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{b} \quad \text{en} \quad \mathbf{x} \geq 0,\ z \geq 0.$$

Stelling. $\mathcal{V} \neq \emptyset \;\Rightarrow \mathcal{V}$ heeft minstens een hoekpunt dat bovendien gevonden wordt door de simplexmethode.

Bewijs. De simplexmethode vindt een hoekpunt van $\mathcal{V}^+$, zeg $\mathbf{h}_1^+$. $\mathbf{h}_1^+$ is van de vorm $\mathbf{h}_1^+ = (\mathbf{h}_1^\top, z)^\top$ en $z = 0$ (zie vorige stelling). Dus is $\mathbf{h}_1$ is een hoekpunt $\mathcal{V}$.

Het vinden van een basis(punt)

$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\text{stand}}$ is ℓ bij n, $\ell < n$. $\qquad \mathcal{V} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$

- Vind basispunt $\mathbf{p}$: vind 'n rij J van ℓ getallen waarvoor
  $\mathbf{p}(j) = 0$ als $j \notin J$,
  $\text{rang}(\mathbf{A}(:, J)) = \ell$ en $\mathbf{A}(:, J)\mathbf{p}(J) = \mathbf{b}$.

Hoe vind je een J met ℓ elementen
zodat $\mathbf{A}(:, J)$ volle rang heeft?

Het vinden van een basis(punt)

$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\text{stand}}$ is ℓ bij n, $\ell < n$. $\quad \mathcal{V} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$

- Vind basispunt $\mathbf{p}$: vind 'n rij J van ℓ getallen waarvoor
  $\mathbf{p}(j) = 0$ als $j \notin J$,
  rang$(\mathbf{A}(:, J)) = \ell$ en $\mathbf{A}(:, J)\mathbf{p}(J) = \mathbf{b}$.

Hoe vind je een J met ℓ elementen
zodat $\mathbf{A}(:, J)$ volle rang heeft?

Kies J en veeg.

Voorbeeld.

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 3 \end{array} \qquad \mathbf{x} \geq 0$$

Met $J = [1,2]$ heeft $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ heeft volle rang.

Veeg kolom 1 en 2:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2.5 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -0.5 & 1 & -1 \end{array} \quad \Rightarrow$$

$\mathbf{p} = (6, -1, 0, 0)^\mathsf{T}$ is een basispunt.

$$i_0 \equiv \mathrm{argmin}_i\, \mathbf{b}(i) = 2 \quad \text{en} \quad \rho \equiv -\mathbf{b}(i_0) = 1.$$

$$\mathbf{h}_0^+ \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{p} + \rho \mathbf{1}_J \\ \rho \end{bmatrix} = (7, 0, 0, 0, 1)^\mathsf{T}$$

Pas nu de simplexmethode toe op $[\mathbf{A}, -\mathbf{1}]$ *en* $\mathbf{c} = -\mathbf{e}_{n+1}$ *om een aanvaardbaar basispunt te construeren.*

Voorbeeld.

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 3 \end{array} \qquad \mathbf{x} \geq 0$$

$$\begin{array}{ccccc|c} \bullet & & & & \circ & \\ 1 & 0 & 2.5 & -3 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -0.5 & 1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & M \end{array}$$

$\mathbf{h}_0^+ \equiv (7,0,0,0,1)^{\mathsf{T}}$
is 'n acceptabele hoek.

Veeg met pivot $(i_0, n+1) = (2,5)$.

Vervang i_0-de getal $J = [1,2]$
door $n+1$: $J \leftarrow [1,5]$

Voorbeeld.

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 3 \end{array} \qquad \mathbf{x} \geq 0$$

$$\begin{array}{ccccc|c} \bullet & & & & \circ & \\ 1 & 0 & 2.5 & -3 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -0.5 & 1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & M \end{array}$$

$\mathbf{h}_0^+ \equiv (7,0,0,0,1)^T$
is 'n acceptabele hoek.

Veeg met pivot $(i_0, n+1) = (2,5)$.

Vervang i_0-de getal $J = [1,2]$
door $n+1$: $J \leftarrow [1,5]$

$$\begin{array}{ccccc|c} \bullet & & & & \bullet & \\ 1 & -1 & 3 & -4 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 0.5 & -1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 0.5 & -1 & 0 & M+2 \end{array}$$

Voorbeeld.

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 3 \end{array} \qquad \mathbf{x} \geq 0$$

$$\begin{array}{ccccc|c} \bullet & & & & \circ & \\ 1 & 0 & 2.5 & -3 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -0.5 & 1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & M \end{array}$$

$\mathbf{h}_0^+ \equiv (7, 0, 0, 0, 1)^T$
is 'n acceptabele hoek.
Veeg met pivot $(i_0, n+1) = (2, 5)$.
Vervang i_0-de getal $J = [1, 2]$
door $n+1$: $J \leftarrow [1, 5]$

$$\begin{array}{ccccc|c} \bullet & & & & \bullet & \\ 1 & -1 & 3 & -4 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 0.5 & -1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 0.5 & -1 & 0 & M+2 \end{array}$$

$j_0 = 3$
min. $[7/3, 1/0.5]$ voor $i_0 = 2$,
Veeg met pivot $(i_0, j_0) = (2, 3)$.
Vervang i_0-de getal $J = [1, 5]$
door j_0: $J \leftarrow [1, 3]$

Voorbeeld.

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 3 \end{array} \qquad \mathbf{x} \geq 0$$

$$\begin{array}{ccccc|c} \bullet & & & & \circ & \\ 1 & 0 & 2.5 & -3 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -0.5 & 1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & M \end{array}$$

$\mathbf{h}_0^+ \equiv (7, 0, 0, 0, 1)^\mathsf{T}$
is 'n acceptabele hoek.
Veeg met pivot $(i_0, n+1) = (2, 5)$.
Vervang i_0-de getal $J = [1, 2]$
door $n+1$: $J \leftarrow [1, 5]$

$$\begin{array}{ccccc|c} \bullet & & & & \bullet & \\ 1 & -1 & 3 & -4 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 0.5 & -1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 0.5 & -1 & 0 & M+2 \end{array}$$

$j_0 = 3$
min. $[7/3, 1/0.5]$ voor $i_0 = 2$,
Veeg met pivot $(i_0, j_0) = (2, 3)$.
Vervang i_0-de getal $J = [1, 5]$
door j_0: $J \leftarrow [1, 3]$

$$\begin{array}{ccccc|c} \bullet & & \bullet & & & \\ 1 & 5 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & M \end{array}$$

Voorbeeld.

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 3 \end{array} \qquad \mathbf{x} \geq 0$$

$$\begin{array}{ccccc|c} \bullet & & & & \circ & \\ 1 & 0 & 2.5 & -3 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -0.5 & 1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & M \end{array}$$

$\mathbf{h}_0^+ \equiv (7, 0, 0, 0, 1)^\mathsf{T}$
is 'n acceptabele hoek.
Veeg met pivot $(i_0, n+1) = (2, 5)$.
Vervang i_0-de getal $J = [1, 2]$
door $n+1$: $J \leftarrow [1, 5]$

$$\begin{array}{ccccc|c} \bullet & & & & \bullet & \\ 1 & -1 & 3 & -4 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 0.5 & -1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 0.5 & -1 & 0 & M+2 \end{array}$$

$j_0 = 3$
min. $[7/3, 1/0.5]$ voor $i_0 = 2$,
Veeg met pivot $(i_0, j_0) = (2, 3)$.
Vervang i_0-de getal $J = [1, 5]$
door j_0: $J \leftarrow [1, 3]$

$$\begin{array}{ccccc|c} \bullet & & \bullet & & & \\ 1 & 5 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & M \end{array}$$

Geen verbetering mogelijk:
$J = [1, 3]$

Voorbeld.

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 3 \end{array} \qquad \mathbf{x} \geq 0$$

$$\begin{array}{ccccc|c} \bullet & & & & \circ & \\ 1 & 0 & 2.5 & -3 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -0.5 & 1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & M \end{array}$$

$\mathbf{h}_0^+ \equiv (7,0,0,0,1)^\mathsf{T}$
is 'n acceptabele hoek.
Veeg met pivot $(i_0, n+1) = (2,5)$.
Vervang i_0-de getal $J = [1,2]$
door $n+1$: $J \leftarrow [1,5]$

$$\begin{array}{ccccc|c} \bullet & & & & \bullet & \\ 1 & -1 & 3 & -4 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 0.5 & -1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 0.5 & -1 & 0 & M+2 \end{array}$$

$j_0 = 3$
min. $[7/3, 1/0.5]$ voor $i_0 = 2$,
Veeg met pivot $(i_0, j_0) = (2,3)$.
Vervang i_0-de getal $J = [1,5]$
door j_0: $J \leftarrow [1,3]$

$$\begin{array}{ccccc|c} \bullet & & \bullet & & & \\ 1 & 5 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & M \end{array}$$

Geen verbetering mogelijk:
$J = [1,3]$

$z = -1 \cdot x_5$ max. voor $z = x_5 = 0 \ \Rightarrow M = 0$ en $\mathbf{x}_{\text{opl}}^\mathsf{T} = (1,0,2,0,0)^\mathsf{T}$.

$\mathbf{h}_1 \equiv (1,0,2,0)^\mathsf{T}$ hoekpunt voor $\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 3 \end{array}$, $\quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

Voorbeeld.

$$\begin{array}{rrrr|l} \circ & & \circ & & \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ \hline 1 & -7 & 3 & 2 & M \end{array}$$

$\mathbf{h}_1 \geq 0$
$J = [1,3]$

Vereenvoudig de kolommen $[1,3]$.

Voor $\mathbf{A}$ en $\mathbf{b}$ hadden we dat al gedaan, zie vorige transp.
voor $\mathbf{c}^{\mathsf{T}}$ echter **niet**.

Voorbeeld.

$$\begin{array}{cccc|c} \circ & & \circ & & \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ \hline 1 & -7 & 3 & 2 & M \end{array}$$

$\mathbf{h}_1 \geq 0$
$J = [1, 3]$

$$\begin{array}{cccc|c} \bullet & & \bullet & & \\ 1 & 5 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 2 \\ \hline 1 & -7 & 3 & 2 & M \end{array}$$

Werk $\mathbf{c}^{\mathsf{T}}$ bij (maak $\mathbf{c}(J) = \mathbf{0}$).

Voorbeeld.

$$\begin{array}{rrrr|l}
\circ & & \circ & & \\
1 & 1 & 2 & -2 & 5 \\
1 & 3 & 1 & 0 & 3 \\
\hline
1 & -7 & 3 & 2 & M
\end{array}$$

$\mathbf{h}_1 \geq 0$
$J = [1, 3]$

$$\begin{array}{rrrr|l}
\bullet & & \bullet & & \\
1 & 5 & 0 & 2 & 1 \\
0 & -2 & 1 & -2 & 2 \\
\hline
0 & -6 & 0 & 6 & M - 7
\end{array}$$

Verder als voorheen

Voorbeeld.

$$\begin{array}{rrrr|l}
\circ & & \circ & & \\
1 & 1 & 2 & -2 & 5 \\
1 & 3 & 1 & 0 & 3 \\
\hline
1 & -7 & 3 & 2 & M
\end{array}$$

$\mathbf{h}_1 \geq 0$
$J = [1,3]$

$$\begin{array}{rrrr|l}
\bullet & & \bullet & & \\
1 & 5 & 0 & 2 & 1 \\
0 & -2 & 1 & -2 & 2 \\
\hline
0 & -6 & 0 & 6 & M-7
\end{array}$$

$j_0 = 4$,
min. $[1/2, *]$ voor $i_0 = 1$,
Vervang i_0-de getal J door j_0:
$J \leftarrow [4,3]$

Voorbeeld.

$$\begin{array}{rrrr|l} \circ & & \circ & & \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ \hline 1 & -7 & 3 & 2 & M \end{array}$$

$\mathbf{h}_1 \geq 0$
$J = [1,3]$

$$\begin{array}{rrrr|l} \bullet & & \bullet & & \\ 1 & 5 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 2 \\ \hline 0 & -6 & 0 & 6 & M-7 \end{array}$$

$j_0 = 4$,
min. $[1/2, *]$ voor $i_0 = 1$,
Vervang i_0-de getal J door j_0:
$J \leftarrow [4,3]$

$$\begin{array}{rrrr|l} & & \bullet & \bullet & \\ 0.5 & 2.5 & 0 & 1 & 0.5 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ \hline -3 & -21 & 0 & 0 & M-10 \end{array}$$

Voorbeeld.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
\circ & & \circ & & \\
1 & 1 & 2 & -2 & 5 \\
1 & 3 & 1 & 0 & 3 \\
\hline
1 & -7 & 3 & 2 & M
\end{array}
$$

$\mathbf{h}_1 \geq 0$
$J = [1, 3]$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
\bullet & & \bullet & & \\
1 & 5 & 0 & 2 & 1 \\
0 & -2 & 1 & -2 & 2 \\
\hline
0 & -6 & 0 & 6 & M - 7
\end{array}
$$

$j_0 = 4$,
min. $[1/2, *]$ voor $i_0 = 1$,
Vervang i_0-de getal J door j_0:
$J \leftarrow [4, 3]$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
 & & \bullet & \bullet & \\
0.5 & 2.5 & 0 & 1 & 0.5 \\
1 & 3 & 1 & 0 & 3 \\
\hline
-3 & -21 & 0 & 0 & M - 10
\end{array}
$$

Geen verbetering mogelijk

$J = [4, 3], \qquad \mathbf{x}_{\text{opl}} = (0, 0, 3, 0.5)^{\mathsf{T}}, \qquad M = 10.$

Voorbeeld II.

$$
\begin{array}{rrrrr|r}
 & & \bullet & \bullet & \bullet & \\
1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\
2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\
\hline
3 & 1 & 0 & 0 & 0 & M
\end{array}
$$

$J = [3, 4, 5]$ is een basis.

$\mathbf{p} = (0, 0, -1, -3, 4)^{\mathsf{T}}$ is een basispunt
maar geen hoekpunt

Dit is, in standaard vorm, het probleem
in **Opgave 6.5.11** van het dictaat

We berekenen eerst een hoekpunt.

We lossen daartoe eerst probleem $+$ op:

$$
\begin{array}{rrrrrr|r}
 & & \bullet & \bullet & \bullet & & \\
1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \\
2 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & *
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrrr|r}
 & & \bullet & \bullet & \bullet & & \\
1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \\
2 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & *
\end{array}
$$

$J = [3, 4, 5]$ is een basis.

$i_0 = \text{argmin}_i\{\beta_i\} = 2$

Veeg met pivot $(i_0, n+1) = (2, 6)$.

Vervang i_0-de getal J door $n+1$:

$J \leftarrow [3, 6, 5]$ en veeg

$$\begin{array}{cccccc|c}
 & & \bullet & \bullet & \bullet & & \\
1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \\
2 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & *
\end{array}$$

$J = [3, 4, 5]$ is een basis.

$i_0 = \text{argmin}_i\{\beta_i\} = 2$

Veeg met pivot $(i_0, n + 1) = (2, 6)$.

Vervang i_0-de getal J door $n + 1$:

$\quad J \leftarrow [3, 6, 5]$ en veeg

$$
\begin{array}{rrrrrr|r}
 & & \bullet & \bullet & \bullet & & \\
1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \\
2 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & *
\end{array}
$$

$J = [3,4,5]$ is een basis.

$i_0 = \text{argmin}_i\{\beta_i\} = 2$

Veeg met pivot $(i_0, n+1) = (2,6)$.

Vervang i_0-de getal J door $n+1$:

$J \leftarrow [3,6,5]$ en veeg

$$
\begin{array}{rrrrrr|r}
 & & \bullet & & \bullet & \bullet & \\
2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\
1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 3 \\
3 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 7 \\
\hline
1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & *
\end{array}
$$

Merk op dat

$\mathbf{h}_0^+ = (0,0,2,0,7,3)^\mathsf{T}$

acceptabel is voor probleem $+$,

dus een hoekpunt is voor probleem $+$

$$
\begin{array}{rrrrrr|r}
 & & \bullet & \bullet & \bullet & & \\
1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \\
2 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & *
\end{array}
$$

$J = [3,4,5]$ is een basis.

$i_0 = \text{argmin}_i\{\beta_i\} = 2$

Veeg met pivot $(i_0, n+1) = (2,6)$.

Vervang i_0-de getal J door $n+1$:

$J \leftarrow [3,6,5]$ en veeg

$$
\begin{array}{rrrrrr|r}
 & & \bullet & & \bullet & \bullet & \\
2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\
1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 3 \\
3 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 7 \\
\hline
1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & *
\end{array}
$$

Kies $j_0 = 2$

Min. $[*, 3, 7/2]$ voor $i_0 = 2$

Vervang i_0-de getal J door j_0:

$J \leftarrow [3,2,5]$

$$
\begin{array}{cccccc|c}
 & & \bullet & \bullet & \bullet & & \\
1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \\
2 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & *
\end{array}
$$

$J = [3, 4, 5]$ is een basis.

$i_0 = \text{argmin}_i\{\beta_i\} = 2$

Veeg met pivot $(i_0, n+1) = (2, 6)$.

Vervang i_0-de getal J door $n+1$:

$J \leftarrow [3, 6, 5]$ en veeg

$$
\begin{array}{cccccc|c}
 & & \bullet & & \bullet & \bullet & \\
2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\
1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 3 \\
3 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 7 \\
\hline
1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & *
\end{array}
$$

Kies $j_0 = 2$

Min. $[*, 3, 7/2]$ voor $i_0 = 2$

Vervang i_0-de getal J door j_0:

$J \leftarrow [3, 2, 5]$

$$
\begin{array}{cccccc|c}
 & \bullet & \bullet & & \bullet & & \\
2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\
1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 3 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & *
\end{array}
$$

Geen verbetering mogelijk.

$J = [3, 2, 5]$ is een basis

en $\mathbf{h}_1 = (0, 3, 2, 0, 1)^T$
is een hoekpunt voor het
oorspronkelijke probleem.

Met dit hoekpunt gaan we verder met
het oplossen van het oorspronkelijke probleem

Vb.

$$
\begin{array}{rrrrr|r}
 & \circ & \bullet & & \bullet & \\
1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\
2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\
\hline
3 & 1 & 0 & 0 & 0 & M
\end{array}
$$

$J = [3, 2, 5]$.

A en **b** hadden we al geveegd voor deze J.

Vb.

$$
\begin{array}{rrrrr|r}
 & \circ & \bullet & & \bullet & \\
1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\
2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\
\hline
3 & 1 & 0 & 0 & 0 & M
\end{array}
$$

$J = [3, 2, 5]$.

A en **b** hadden we al geveegd voor deze J.

$$
\begin{array}{rrrrr|r}
 & \bullet & \bullet & & \bullet & \\
2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\
1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
3 & 1 & 0 & 0 & 0 & M
\end{array}
$$

We moeten nog $\mathbf{c}^\mathsf{T}$ vegen

Vb.

$$
\begin{array}{rrrrr|r}
 & \circ & \bullet & & \bullet & \\
1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\
2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\
\hline
3 & 1 & 0 & 0 & 0 & M
\end{array}
$$

$J = [3, 2, 5]$.

A en **b** hadden we al geveegd voor deze J.

$$
\begin{array}{rrrrr|r}
 & \bullet & \bullet & & \bullet & \\
2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\
1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
2 & 0 & 0 & 1 & 0 & M-3
\end{array}
$$

Vb.

$$
\begin{array}{rrrrr|r}
 & \circ & \bullet & & \bullet & \\
1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\
2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\
\hline
3 & 1 & 0 & 0 & 0 & M
\end{array}
$$

$J = [3, 2, 5]$.

A en **b** hadden we al geveegd voor deze J.

$$
\begin{array}{r|rrrr|r}
 & \bullet & \bullet & & \bullet & \\
2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\
1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
2 & 0 & 0 & 1 & 0 & M-3
\end{array}
$$

Kies $j_0 = 1$.

Min. $[2/2, 3/1, 1/1]$ voor $i_0 = 3$
(hier hadden we ook
$i_0 = 1$ kunnen kiezen)

$J \leftarrow [3, 2, 1]$

Vb.

$$\begin{array}{rrrrr|r}
 & \circ & \bullet & & \bullet & \\
1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\
2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\
\hline
3 & 1 & 0 & 0 & 0 & M
\end{array}$$

$J = [3, 2, 5]$.

A en **b** hadden we al geveegd voor deze J.

$$\begin{array}{rrrrr|r}
\bullet & \bullet & & & \bullet & \\
2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\
1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
2 & 0 & 0 & 1 & 0 & M-3
\end{array}$$

Kies $j_0 = 1$.

Min. $[2/2, 3/1, 1/1]$ voor $i_0 = 3$ (hier hadden we ook $i_0 = 1$ kunnen kiezen)

$J \leftarrow [3, 2, 1]$

$$\begin{array}{rrrrr|r}
\bullet & \bullet & \bullet & & & \\
0 & 0 & 1 & -3 & -2 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 2 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & -1 & -2 & M-5
\end{array}$$

Geen verbetering mogelijk

$\mathbf{x}_{\text{opl}} = (1, 2, 0, 0, 0)^\mathsf{T}$, $M = 5$