Utrecht, 26 april 2013

Modellen en Simulatie
Lesliematrices
Markovketens

Gerard Sleijpen

Universiteit Utrecht
Department of Mathematics

http://www.staff.science.uu.nl/~sleij101/

Program

- Meerdere leeftijdsklassen
- Leslie matrices
- Eigenwaarden en eigenvectoren
- Dominante eigenvector
- Irreducibele, a-periodieke matrices
- Markov ketens
- Google's PageRanking
- Lampen

Twee jarige planten

In jaar n $\quad N_1(n)$: aantal planten in jaar n ontkiemt
$\qquad\qquad N_2(n)$: aantal planten in jaar $n-1$ ontkiemt

Aanname:
- 50% van de 0-jarige geeft zaad
- gemiddeld twee zaden van 0-jarige ontkiemen
- 75% planten overleeft de winter
- gemiddeld vier zaden van de 1-jarige ontkiemen

Model: $N_1(n+1) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot N_1(n) + 4\, N_2(n)$
en $N_2(n+1) = \frac{3}{4} N_1(n)$.

In "matrix taal":

$$\begin{bmatrix} N_1(n+1) \\ N_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1(n) \\ N_2(n) \end{bmatrix}$$

Evenwicht als
voor alle n: $\quad N_1(n+1) = N_1(n) = \alpha_1 \quad$ en
$\qquad N_2(n+1) = N_2(n) = \alpha_2$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow \quad$ 1 eigenwaarde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$

Evenwichtige opbouw in leeftijd als
voor alle n: $N_1(n+1)/N_2(n+1) = N_1(n)/N_2(n)$

$$\lambda \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow \quad \lambda$ eigenwaarde $\mathbf{A}$

Wanneer is evenwicht stabiel?
Wanneer is evenwichtige leeftijdsopbouw stabiel?

Als $|\lambda_2| < |\lambda_1|$, dan geldt, voor grote n,

$$\mathbf{x}_n = \gamma_1 \lambda_1^n \left[\mathbf{v}_1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n \mathbf{v}_2\right] \approx \gamma_1 \lambda_1^n \mathbf{v}_1$$

λ_1 is een **dominante eigenwaarde** als $|\lambda_2| < |\lambda_1|$

$\mathbf{v}_1$ is dan een **dominante eigenvector**

Stelling. $\mathbf{0}$ is een stabiel evenwicht als $1 > |\lambda_i|$, $i = 1, 2$.

Stelling. $\gamma\,\mathbf{v}_1$ is een stabiel evenwicht als $\lambda_1 = 1 > |\lambda_2|$.

Er is een stabiel evenwicht als 1 dominante eigenwaarde $\mathbf{A}$.

Stelling. $\gamma\,\mathbf{v}_1$ is een stabiele opbouw als λ_1 dominant.

Er is een stabiele leeftijdsopbouw als

$\mathbf{A}$ een dominante eigenwaarde heeft.

Voorbeeld. [Twee jarige planten]

Bereken de eigenwaarden $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= (1-\lambda)\cdot(-\lambda) - 4\cdot\frac{3}{4} \\ &= \lambda^2 - \lambda - 3 \end{aligned}$$

λ eigenwaarde $\Leftrightarrow$ $\lambda^2 - \lambda - 3 = 0$ $\Leftrightarrow$

$$\lambda = \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \quad \text{of} \quad \lambda = \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$$

---

1 geen eigenwaarde: dus geen evenwicht $\neq \mathbf{0}$.

Voorbeeld. [Twee jarige planten]

Bereken de eigenwaarden $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= (1-\lambda)\cdot(-\lambda) - 4\cdot\frac{3}{4} \\ &= \lambda^2 - \lambda - 3 \end{aligned}$$

λ eigenwaarde $\Leftrightarrow$ $\lambda^2 - \lambda - 3 = 0$ $\Leftrightarrow$

$$\lambda = \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \quad \text{of} \quad \lambda = \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$$

---

1 geen eigenwaarde: dus geen evenwicht $\neq \mathbf{0}$.

$\lambda_1 > 1$: dus $\mathbf{0}$ geen stabiel evenwicht.

$\lambda_1 > |\lambda_2|$: λ_1 dominante eigenwaarde met eigenv. $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$.

Dus $\gamma \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ stabiele evenwichtige leeftijdsopbouw.

Leslie matrices

m leeftijdsgroepen (tijdvak bv. 1 jaar)

$N_k(n)$ aantal individuen van leeftijd $k-1$ begin n-de tijdvak

Aanname [Leslie]:

- In elk tijdvak overleeft de fractie s_k van leeftijd $k-1$
- Aantal 0-jarige hangt lineair af van de vruchtbaarheid van de diverse leeftijdsgroepen

Model: $N_{k+1}(n+1) = s_k\, N_k(n)$ &

$$N_1(n+1) = g_1\, N_1(n) + \ldots + g_m\, N_m(n)$$

In matrix taal $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_n$

met $\mathbf{A} \equiv \underbrace{\begin{bmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_{m-1} & g_m \\ s_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & s_{m-1} & 0 \end{bmatrix}}_{\textbf{Leslie matrix}}$ en $\mathbf{x}_n \equiv \begin{bmatrix} N_1(n) \\ N_2(n) \\ N_3(n) \\ \vdots \\ N_m(n) \end{bmatrix}$

Evenwicht als
voor alle n: $N_j(n+1) = N_j(n) = \alpha_j$ voor $j = 1, \ldots, m$

$$\vec{\alpha} \equiv \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} = \mathbf{A}\,\vec{\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad 1 \text{ eigenwaarde } \mathbf{A}$$

Evenwichtige opbouw in leeftijd als voor alle n:
$N_i(n+1)/N_j(n+1) = N_i(n)/N_j(n)$ voor alle $i, j = 1, \ldots, m$.

$$\lambda\,\vec{\beta} = \mathbf{A}\,\vec{\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \text{ eigenwaarde } \mathbf{A}$$

Wanneer is evenwicht stabiel?
Wanneer is evenwichtige leeftijdsopbouw stabiel?

Als $|\lambda_j| < |\lambda_1|$ alle $j > 1$, dan geldt, voor grote n,

$$\mathbf{x}_n = \gamma_1\,\lambda_1^n \left[\mathbf{v}_1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n \mathbf{v}_2 + \ldots + \frac{\gamma_m}{\gamma_1}\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_1}\right)^n \mathbf{v}_m\right] \approx \gamma_1\,\lambda_1^n\,\mathbf{v}_1$$

λ_1 is een **dominante eigenwaarde** als $|\lambda_j| < |\lambda_1|$ $(j > 1)$
$\mathbf{v}_1$ is dan een **dominante eigenvector**

Stelling. $\mathbf{0}$ is een stabiel evenwicht $\Leftrightarrow 1 > |\lambda_i|,\ i = 1, \ldots, m$.

Stelling. $\gamma\,\mathbf{v}_1$ is een stabiel evenwicht $\Leftrightarrow \lambda_1 = 1 > |\lambda_j|$ $(j > 1)$
Er is een stabiel evenwicht als 1 dominante eigenwaarde **A**.

Stelling. $\gamma\,\mathbf{v}_1$ is een stabiele opbouw $\Leftrightarrow \lambda_1$ dominant.
Er is een stabiele leeftijdsopbouw als
A een dominante eigenwaarde heeft.

Wat gebeurt er als λ_1 niet dominant, als $|\lambda_1| = |\lambda_2|$?

Voorbeelden.

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \end{matrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ evenwicht.

  met $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon \\ 1 \end{bmatrix}$ is $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon \\ 1 \end{bmatrix}$.

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{matrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ evenwicht.

  $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+\varepsilon \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_0, \ \ldots$

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \end{matrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ evenwicht.

  $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} 1+n\varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$

Relevantie

Stel λ_1 dominant. *Biologisch relevant?*

Alleen als $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 > 0$
en alle coëfficiënten van eigenvector niet negatief.

Stel $|\lambda_1| = |\lambda_2|$. *Biologisch relevant?*

Voorbeeld. $m = 3$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} \lambda \text{ eigenwaarde} \Rightarrow \lambda^3 = 1, \\ \text{dus } |\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3|. \end{matrix}$$

Met $x_0 = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$ is $x_1 = \begin{bmatrix} 36 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} 12 \\ 18 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}, \ldots$

Machtsmethode

Stel **A** is een $m \times m$ matrix
met een dominante eigenwaarde λ_1 en eigenvector $\mathbf{v}_1$.

Stelling. Voor iedere $\mathbf{x}_0$, met een $\neq 0$ component $\mathbf{v}_1$,
geldt, voor grote n, $\quad \mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n\,\mathbf{x}_0 \approx \gamma_1\,\lambda_1^n\,\mathbf{v}_1$.

Gevolg. Met $\quad \mu_n \equiv \dfrac{\mathbf{e}_1^T\mathbf{x}_n}{\mathbf{e}_1^T\mathbf{x}_{n-1}} \quad$ geldt $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = \lambda_1$

Machtsmethode.

$$\widetilde{\mathbf{x}}_n \equiv \mathbf{A}\,\mathbf{x}_{n-1}, \qquad \mu_n \equiv \mathbf{e}_1^T\widetilde{\mathbf{x}}_n, \qquad \mathbf{x}_n \equiv \widetilde{\mathbf{x}}_n/\mu_n.$$

Gevolg. Als $\mathbf{v}_1$ zo geschaald is dat $\mathbf{e}_1^T\mathbf{v}_1 = 1$, dan

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{v}_1 \quad \& \quad \lim_{n\to\infty} \mu_n = \lambda_1.$$

Dominantie

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_n$$

Zij $\ \mathbf{A} = (A_{ij})\ $ een $m \times m$ matrix.

$\mathbf{A}\,\mathbf{v}_j = \lambda_j\mathbf{v}_j$

orden de eigenwaarden λ_j met eigenvectoren $\mathbf{v}_j$ zo dat

$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_m|, \qquad |\lambda_j| = |\lambda_{j+1}| \Rightarrow \mathrm{Re}(\lambda_j) \geq \mathrm{Re}(\lambda_{j+1})$

Stelling [Perron & Frobenius].

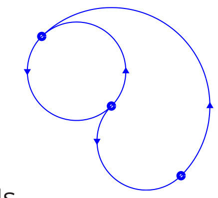
Stel $\ A_{ij} \geq 0\ $ alle $i, j = 1, \ldots, m$. Dan geldt

- $\lambda_1 \geq 0$.
- Er is een eigenvector $\mathbf{v}_1$ bij λ_1 met alle coëfficiënten ≥ 0.
- Als bovendien **A** irreducibel en a-periodiek $\Rightarrow$ λ_1 dominant.

Matrices en grafen

matrix **graaf**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$



Matrix (graaf) is **irreducibel** als
je in de graaf van ieder punt naar ieder ander punt kunt lopen (via de lijnen in de aangegeven richting),
anders is de matrix (graaf) **reducibel**.

Periode matrix (graaf) = ggd(aantal lijnen rondwandeling)

waarbij de grootste gemene deler (ggd) genomen wordt over alle rondwandelingen.

Matrix is **a-periodiek** als periode = 1.

Voorbeeld $\qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}.$

A is irreducible. ggd$(2,3) = 1$, dus a-periodiek.

Dus, **A** heeft een dominante eigenwaarde.
Noem deze λ. Dan $\lambda > 0$,

$$\lambda^3 - \frac{1}{2}\lambda - 1 = 0, \quad \lambda > 1 \quad \text{en} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \lambda^2 \\ \frac{1}{2}\lambda \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

is de bijbehorende eigenvector. $\mathbf{v}$ is dominant.

Interpretatie: Geen evenwicht (behalve de triviale). De bevolking groeit exponentieel en op den duur volgens een stabiele evenwichtige leeftijdsopbouw:

$$\mathbf{x}_n \approx \gamma\,\lambda^n\,\mathbf{v} \text{ voor grote } n.$$

Voor iedere $\gamma > 0$ is $\gamma\,\mathbf{v}$ 'n stabiele leeftijdsopbouw.

Leslie matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & \dots & g_{m-1} & g_m \\ s_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_{m-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Zij $h_1 = 1,\ \ h_2 = s_1\, h_1,\ \ h_3 = s_2\, h_2,\ \dots .$

Stelling. $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) =$

$$\lambda^m - g_1\, h_1\, \lambda^{m-1} - g_2\, h_2\, \lambda^{m-2} - \dots - g_m\, h_m.$$

$$\mathbf{v}_i = (h_1\, \lambda_i^{m-1},\ h_2 \lambda_i^{m-2},\ h_3\, \lambda_i^{m-3}, \dots,\ h_m)^{\mathsf{T}}.$$

$s_i \geq 0,\ \ g_i \geq 0$ alle i & $\text{ggd}(\{i | h_i\, g_i \neq 0\}) = 1$

$\Rightarrow$ λ_1 dominant en $\lambda_1 > 0$.

Voorbeeld.

Beschouw voor $s > 0$, de Leslie matrix $\mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ \frac{1}{2}s & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$.

- *Voor welke s is er evenwicht?*
- *Is het evenwicht stabiel?*
- *Bereken de evenwicht(en).*

$h_1 = 1,\ h_2 = \frac{1}{2}s,\ h_3 = \frac{1}{6}s$ & $\text{ggd}(\{i | h_i g_i \neq 0\}) = \text{ggd}(2,3) = 1$.
Dus, $\mathbf{A}$ heeft een dominante eigenwaarde > 0.
Als λ eigenwaarde $\mathbf{A}$ met eigenvector $\mathbf{v}$ dan

$$\lambda^3 - \frac{1}{2}s\lambda - s = 0 \quad \text{en} \quad \mathbf{v} = (\lambda^2, \frac{1}{2}s\lambda, \frac{1}{6}s)^{\mathsf{T}}.$$

1 is eigenwaarde $\Leftrightarrow$ er is evenwicht $\Leftrightarrow$ $s = 2/3$.

Voor $s = 2/3$ is $\lambda = 1$ de enige oplossing > 0.

Dus, voor $s = 2/3$, is 1 dominant,
is $\gamma\,(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9})^{\mathsf{T}}$ 'n evenwicht (iedere $\gamma > 0$),
het evenwicht is zwak stabiel, de leeftijdsopbouw is **stabiel**.

Zij $\mathbf{A} = (A_{ij})$ een $m \times m$ matrix, $m > 1$.

Stelling. Stel λ_1 is dominant.

Voor iedere $\mathbf{x}_0$, met een $\mathbf{v}_1$ component $\neq 0$,

geldt, voor grote n, $\mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n\, \mathbf{x}_0 \approx \gamma_1\, \lambda_1^n\, \mathbf{v}_1$.

Stelling. Stel $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$ en λ_1 dominant. Dan $\lambda_1 > 0$ en,

voor 'n scalair γ_1, zijn alle coëff. $\gamma_1\, \mathbf{v}_1 \geq 0$.

Gevolg. Stel $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$. Dan $\lambda_1 \geq 0$ en

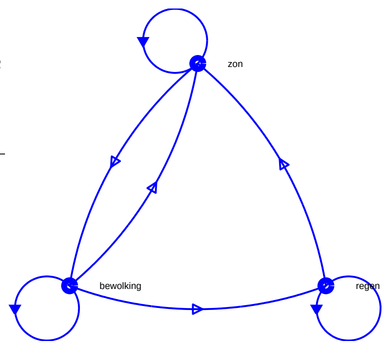
er is een bijbehorende eigenvector met alle coëff. ≥ 0.

Bewijsschets. Zij, voor $\varepsilon > 0$, $\mathbf{A}_\varepsilon$ de matrix die ontstaat door bij alle coëfficiënten van $\mathbf{A}$ ε op te tellen. $\mathbf{A}_\varepsilon$ is irreducibel en a-periodiek. Dus er is een dominante eigenwaarde en die is ≥ 0 en een bijbehorende eigenvector met alleen coëfficiënten ≥ 0. Laat nu ε naar 0 gaan.

Op dag n

p_n kans op zon
q_n kans op bewolkte
r_n kans op regen

Aanname:
"kans op",
van dag tot dag



Model:

$$\mathbf{p}_{n+1} = \begin{bmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{P}\, \mathbf{p}_n \quad \text{met} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Markov ketens

m verschillende toestanden. In toestand j is,
in volgend tijdvak, de kans op toestand i gelijk aan p_{ij}.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{p}_n = \begin{bmatrix} p_1(n) \\ p_2(n) \\ \vdots \\ p_m(n) \end{bmatrix}$$

$\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots$ is 'n discrete **Markov keten** als

$$\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{P}\,\mathbf{p}_n \quad \text{alle } n$$

met $\mathbf{P}$ **kansmatrix** & $\mathbf{p}_0$ **toestandsvector**
(d.w.z. kolomsom(men) $=1$ & alle coëffiënten ≥ 0).

Stelling. $\mathbf{p}_n$ toestandsvector voor alle n.

$\mathbf{P}$ heeft eigenwaarde 1 & $|\lambda| \leq 1$ alle eigenwaarden λ van $\mathbf{P}$.

$\mathbf{P}$ irreducibel & a-periodiek $\Rightarrow$ 1 dominant $\Rightarrow$
$\exists$ 1 stabiele **stationaire toestandsvector**.

Stelling. $\mathbf{P}$ kansmatrix.

$\mathbf{P}$ heeft eigenwaarde 1 & $|\lambda| \leq 1$ alle eigenwaarden λ van $\mathbf{P}$.

Bewijs. $\mathbf{e}_j$ is de j-de standaard basisvector, $\mathbf{1} \equiv (1, \ldots, 1)^\mathsf{T}$

$\mathbf{1}^\mathsf{T}\mathbf{P} = \mathbf{1}^\mathsf{T} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{1} = \mathbf{1}$.

Dus 1 is een eigenwaarde van $\mathbf{P}^\mathsf{T}$.

$\Rightarrow \quad 0 = \det(\mathbf{P}^\mathsf{T} - \mathbf{I}) = \det((\mathbf{P} - \mathbf{I})^\mathsf{T}) = \det(\mathbf{P} - \mathbf{I})$.

Dus 1 is een eigenwaarde van $\mathbf{P}$.

Evenzo, als λ is een eigenwaarde van $\mathbf{A}^\mathsf{T}$.

$\Rightarrow \quad 0 = \det(\mathbf{A}^\mathsf{T} - \lambda\mathbf{I}) = \det((\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^\mathsf{T}) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$.

Dus λ is een eigenwaarde van $\mathbf{A}$.

Hoelang duurt het gemiddeld voordat het regent?

$$\sum n \times \text{ kans eerste regen op dag } n$$

$$= (3,1) \text{ coëfficiënt van } \sum_{n=1}^{\infty} n\,\tilde{\mathbf{P}}^n.$$

Stelling. Als voor alle eigenwaarden λ van $\mathbf{A}$ geldt

$$|\lambda| < 1,$$

dan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{A}^n = \mathbf{A}\,(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathbf{A}^n = \mathbf{A}\,(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-2}.$$

Stelling. λ eigenwaarde $\mathbf{A} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda$ eigenwaarde $\mathbf{A}^\mathsf{T}$

Intermezzo

$$\mathbf{x}_0 = \gamma_1\,\mathbf{v}_1 + \ldots + \gamma_m\mathbf{v}_m, \qquad \text{met } \mathbf{A}\,\mathbf{v}_j = \lambda_j\mathbf{v}_j$$

Zij $\mathbf{w}_1$ zo dat $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{w}_1 = \lambda_1\mathbf{w}_1$, of, equivalent, $\mathbf{w}_1^\mathsf{T}\,\mathbf{A} = \lambda_1\mathbf{w}_1^\mathsf{T}$:

$\mathbf{w}_1$ is een **links** eigenvector bij de eigenwaarde λ_1.

Stelling. Als λ_1 dominant, dan $\gamma_1 = \mathbf{w}_1^\mathsf{T}\mathbf{x}_0/\mathbf{w}_1^\mathsf{T}\mathbf{v}_1$.

Bewijs. $\quad \lambda_1\,\mathbf{w}_1^\mathsf{T}\mathbf{v}_j = \mathbf{w}_1^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{v}_j = \lambda_j\,\mathbf{w}_1^\mathsf{T}\mathbf{v}_j$.

Dus, óf $\lambda_1 = \lambda_j$, óf $\mathbf{w}_1^\mathsf{T}\mathbf{v}_j = 0$.

Als λ_1 dominant, dan $\lambda_1 \neq \lambda_j \quad (j > 1)$:

$$\mathbf{w}_1^\mathsf{T}\mathbf{x}_0 = \gamma_1\mathbf{w}_1^\mathsf{T}\mathbf{v}_1 + \ldots + \gamma_m\mathbf{w}_1^\mathsf{T}\mathbf{v}_m = \gamma_1\mathbf{w}_1^\mathsf{T}\mathbf{v}_1.$$

Stelling. **P** kansmatrix.

P heeft eigenwaarde 1 & $|\lambda| \le 1$ alle eigenwaarden λ van **P**.

Bewijs. $\mathbf{e}_j$ is de j-de standaard basisvector, $\mathbf{1} \equiv (1, \ldots, 1)^{\mathsf{T}}$

Stel $\quad \mathbf{P}\,\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v}$.

Dan $\quad |\lambda|\,|\mathbf{v}| = |\lambda\,\mathbf{v}| = |\mathbf{P}\,\mathbf{v}| \le \mathbf{P}\,|\mathbf{v}|$,

hierbij is $|\mathbf{v}|$ coördinaatsgewijs absolute waarde nemen

en geldt $\le$ coördinaatsgewijs.

Dus $\quad |\lambda|\,\mathbf{1}^{\mathsf{T}}|\mathbf{v}| = \mathbf{1}^{\mathsf{T}}(|\lambda|\,|\mathbf{v}|) \le \mathbf{1}^{\mathsf{T}}\mathbf{P}\,|\mathbf{v}| = \mathbf{1}^{\mathsf{T}}|\mathbf{v}|$

$\Rightarrow \quad |\lambda| \le 1$.

Opmerking. Als $\mathbf{1}^{\mathsf{T}}\,|\mathbf{A}| < \mathbf{1}^{\mathsf{T}}$,

dan $|\lambda_j| < 1$ alle eigenwaarden λ_j van **A**.

Google. Iedere internetpagina I_k heeft een zeker belang (PageRank) p_k.

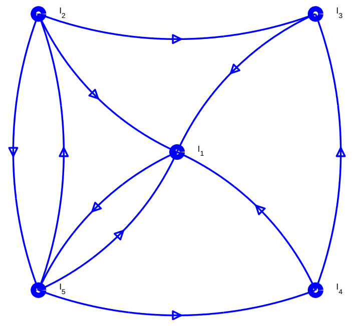
Aanname [Page&Brin 1998]:
- Het belang van iedere pagina I_k is het totaal van de belangen die iedere pagina, die naar I_k linkt, aan I_k toe kent.
- Als I_k naar ℓ andere verschillende pagina's linkt, dan kent I_k aan ieder van deze pagina's $1/\ell$-de deel van zijn belang toe.

Model. $\mathbf{p} \equiv (p_1, \ldots, p_m)^{\mathsf{T}}$.

Schaal p_k zodat $\mathbf{1}^{\mathsf{T}}\mathbf{p} = \sum p_k = 1$.

Met $\quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$

is $\quad \mathbf{p} = \mathbf{P}\mathbf{p}$.



Model. $\quad \mathbf{p} \equiv (p_1, \ldots, p_m)^{\mathsf{T}}$.

Stelling. Als het www irreducibel is en a-periodiek dan convergeert de machtsmethode startend met $\mathbf{p}_0 = \frac{1}{m}\mathbf{1}$.

Problemen.
Reducibel — dangling nodes
(wel links ernaar toe, geen links ervan af).
— onsamenhangend
(geen links van een deel naar een ander deel en visa versa).
Periodiek — machtsmethode convergeert niet.

Oplossing Google.
Dangling nodes linken in feite naar alle internetpagina's:
Als I_k geen link heeft, dan $p_{ik} \equiv \frac{1}{m}$ voor alle i (ook $i = k$).

Pagina's worden ook bereikt via de navigatiebalk van de browse
Teleportatie. Met $\mathbf{T} \equiv \frac{1}{m}\mathbf{1}\mathbf{1}^{\mathsf{T}}$, beschouw $(1-\alpha)\mathbf{P} + \alpha\,\mathbf{T}$.

$(1-\alpha)\mathbf{P} + \alpha\mathbf{T}$ is een a-periodiek, irreducibele kansmatrix.

Stelling. De machtsmethode, met $\mathbf{p}_0 = \frac{1}{m}\mathbf{1}^{\mathsf{T}}$, convergeert.
Per iteratiestap reduceert de fout (op den duur) met een factor $1 - \alpha$.

Bewijs. De eigenwaarde $\lambda_1 = 1$ is dominant.
Wat kunnen we zeggen over de andere eigenwaarden?

Stel $\quad [(1-\alpha)\mathbf{P} + \alpha\mathbf{T}]\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v}$ met $|\lambda| < 1$.

$\Rightarrow \quad \mathbf{1}^{\mathsf{T}}\mathbf{v} = 0$.

$\Rightarrow [(1-\alpha)\mathbf{P} + \alpha\mathbf{T}]\mathbf{v} = (1-\alpha)\mathbf{P}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.

Dus $\quad$ **v** eigenvector **P** en
$\lambda = (1-\alpha) \times$ eigenwaarde **P**

$\Rightarrow |\lambda| \le 1 - \alpha$

- m lampen kunnen ieder met een eigen schakelaar aan of uit gezet worden.
- Telkens wordt om de minuut random een schakelaar gekozen en de schakelaar wordt random (50% kans) omgezet.
- In het begin zijn alle lampen uit.

Model. $\mathbf{p}_n = (p_0(n), p_1(n), \ldots, p_m(n))^\top$:

$p_j(n)$ is de kans dat er in de n-de minuut precies j lampen branden.

$$\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{P}\mathbf{p}_n, \quad \text{met, voor } m = 4, \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{2}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{algemeen,} \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2m} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{2}{2m} & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{m-1}{2m} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2m} & \\ 0 & 0 & \frac{m-2}{2m} & \frac{1}{2} & \ddots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{P}\mathbf{p}_n, \quad \text{met, voor } m = 4, \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{2}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

P is een irreducibel en a-periodieke kansmatrix
$\Rightarrow$ 1 is de dominante eigenwaarde.

$$\text{met} \qquad v_j = \binom{m}{j} \equiv \frac{m!}{j!\,(m-j)!} \qquad \text{is}$$

$\tilde{\mathbf{v}} \equiv (v_0, v_1, \ldots)^\top$ een dominante eigenvector van **P**.

De rij van toestandsvectoren $\mathbf{p}_n$ convergeert naar

de dominante toestands eigenvector $\mathbf{v}_1 \equiv 2^{-m}\tilde{\mathbf{v}}$.

De kans op alle lampen aan: $2^{-m} v_m = 2^{-m}$.
met $m = 100$ *is* $2^{100} = (2^{10})^{10} \approx (10^3)^{10} = 10^{30}$.

$$\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{P}\mathbf{p}_n, \quad \text{met, voor } m = 4, \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{2}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

P is een irreducibel en a-periodieke kansmatrix
$\Rightarrow$ 1 is de dominante eigenwaarde.

$$\mathbf{P} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{I} + \mathbf{Q}), \text{ met } \mathbf{Q} \equiv \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{4} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

Q is een kansmatrix en als $\mathbf{Q}\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{v}}$, dan $\mathbf{P}\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{v}}$.

Als $\tilde{\mathbf{v}} = (1, v_1, v_2, \ldots)^\top$, dan $\frac{1}{4}v_1 = 1$, $1 + \frac{2}{4}v_2 = v_1$, etc.