

Utrecht, 13 mei 2013

Modellen en Simulatie

Recursies

Gerard Sleijpen



Universiteit Utrecht
Department of Mathematics

<http://www.staff.science.uu.nl/~sleij101/>

Program

- Management voorbeeld (affien)
- Economisch voorbeeld (affien)
- Rupsen-wespen (niet lineair)
- Niet-lineaire modellen, evenwicht, stabiliteit
- Lineairiseren
- Companion vorm
- Complex als 2-d reeel
- Hoefijzer van Smale

Economisch model I

In n -de jaar C_n : totale consumptie
 I_n : totaal aan investeringen
 $Y_n = C_n + I_n$: nationaal inkomen

Aanname [Keynes 1936]:

- Consumptie hangt lineair af van het nationaal inkomen van vorig jaar.
- Investeringen veranderen niet.

Model: $C_n = k Y_{n-1} + C_0$ & $I_n = I_0$
voor zekere positieve (bekende) k , C_0 en I_0 .

Dan $Y_n = k Y_{n-1} + C_0 + I_0$.

α evenwichtspunt $\Leftrightarrow \alpha = k\alpha + C_0 + I_0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{C_0 + I_0}{1 - k}$.

Positief evenwicht $\Leftrightarrow k < 1 \Leftrightarrow$
stabiel evenwicht ($Y_n = \alpha + \varepsilon_n \Leftrightarrow \varepsilon_n = k\varepsilon_{n-1}$).

Schommelingen in de conjunctuur?

Economisch model II

Aanname [Samuelson & Hicks 1939]:

- Consumptie hangt lineair af van het nationaal inkomen van het vorig jaar
- Investeringen hangen lineair af van de **groei** van het nationaal inkomen

Model: $C_n = k Y_{n-1} + C_0$ & $I_n = d(Y_{n-1} - Y_{n-2}) + I_0$
voor zekere positieve (bekende) k , C_0 en d , I_0 .

$\Rightarrow Y_n = k Y_{n-1} + C_0 + d(Y_{n-1} - Y_{n-2}) + I_0$
 $= (k + d) Y_{n-1} - d Y_{n-2} + C_0 + I_0$.

α evenwicht $\Leftrightarrow \alpha = (k + d)\alpha - d\alpha + C_0 + I_0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{C_0 + I_0}{1 - k}$.

Positief evenwicht $\Leftrightarrow k < 1$.

Stabiel?? $Y_n \rightarrow \alpha$ als $Y_0 \approx \alpha$ en $Y_1 \approx \alpha$??

Economisch model; Analyse

Er geldt (**companion vorm**)

$$\begin{bmatrix} Y_n \\ Y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k+d & -d \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{n-1} \\ Y_{n-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_0 + I_0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Met $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} k+d & -d \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} C_0 + I_0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix}$ geldt

$$Y_n = x_1(n-1) \quad (\forall n) \quad \Leftrightarrow \quad Y_n = x_2(n) \quad (\forall n) \quad \Leftrightarrow$$

$$Y_1 = x_1(0) \quad \& \quad \mathbf{x}_n = \mathbf{A} \mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{c} \quad \text{alle } n.$$

$$Y_0 = x_2(0)$$

λ_1, λ_2 eigenwaarden \mathbf{A} zodat $|\lambda_2| \leq |\lambda_1|$.

Evenwicht is stabiel $\Leftrightarrow |\lambda_1| < 1$.

Met $Y_n = \alpha_1 + \varepsilon_n$ is $\varepsilon_n = \varepsilon_1(n) = \mathbf{e}_1^T \bar{\varepsilon}_n$.

$|\lambda_2| < |\lambda_1|$ (λ_1 dominant) $\Rightarrow \varepsilon_n \approx \gamma_1 \lambda_1^n$:

Evenwicht herstelt als $|\lambda_1| < 1$.

(Herstel is monotoon als $\lambda_2 > 0$.)

$\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = \rho e^{i\phi} \notin \mathbb{R}$. Hier $\rho \equiv |\lambda_1|$

$\Rightarrow \varepsilon_n = \rho^n (\gamma_1 \cos(n\phi) + \gamma_2 \sin(n\phi))$:

Slingerende herstel van het evenwicht als $|\lambda_1| < 1$.

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{A} \mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{c} \quad \text{alle } n$$

$$\bar{\alpha} \equiv \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \quad \text{evenwicht} \quad (\mathbf{x}_0 = \bar{\alpha} \Rightarrow \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1 = \dots)$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = (C_0 + I_0)/(1 - k).$$

Stabiel als $\mathbf{x}_n \rightarrow \bar{\alpha}$ ($n \rightarrow \infty$) voor $\mathbf{x}_0 \approx \bar{\alpha}$.

Als $\mathbf{x}_n = \bar{\alpha} + \bar{\varepsilon}_n$ dan

$$\bar{\varepsilon}_n = \mathbf{A} \bar{\varepsilon}_{n-1}$$

Stelling. Stabiel $\Leftrightarrow \bar{\varepsilon}_n \rightarrow \mathbf{0}$ ($n \rightarrow \infty$) voor $\bar{\varepsilon}_0 \approx \mathbf{0}$
 $\Leftrightarrow |\lambda| < 1$ alle eigenwaarden λ van \mathbf{A} .

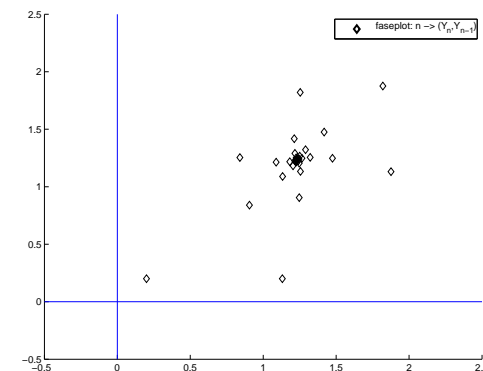
Voorbeeld. Karakteristieke vergelijking \mathbf{A} :

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^2 - (k+d)\lambda + d = 0.$$

Reële oplossing $\Leftrightarrow 4d \leq (k+d)^2 \Leftrightarrow k > 1$.

Stel reële oplossing. Dan: $\lambda_1 > 1 \Leftrightarrow k > 1$.

Stel irreële oplossing. Dan: $|\lambda_1| < 1 \Leftrightarrow d < 1$.



$k = 0.1, d = 0.7, C_0 = 8/9, I_0 = 2/9$.

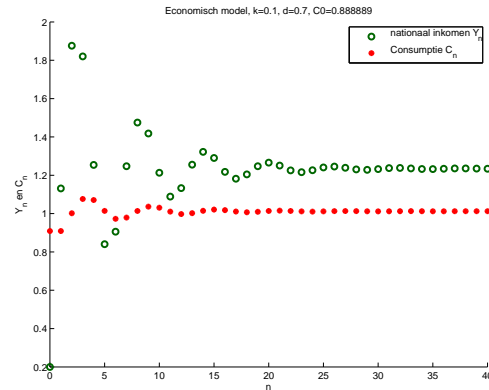
Voorbeeld. Karakteristieke vergelijking **A**:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^2 - (k + d)\lambda + d = 0.$$

Reële oplossing $\Leftrightarrow 4d \leq (k + d)^2 \Leftrightarrow k > 1$.

Stel reële oplossing. Dan: $\lambda_1 > 1 \Leftrightarrow k > 1$.

Stel irreële oplossing. Dan: $|\lambda_1| < 1 \Leftrightarrow d < 1$.



$k = 0.1, d = 0.7, C_0 = 8/9, I_0 = 2/9$.

Niet-lineaire modellen

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n) \end{cases}$$

of $\mathbf{x}_{n+1} \equiv \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \equiv \begin{bmatrix} f(x_n, y_n) \\ g(x_n, y_n) \end{bmatrix}$.

Evenwicht als $\begin{cases} x_n = x_{n-1} = \dots = x_0 = \alpha, \\ y_n = y_{n-1} = \dots = y_0 = \beta. \end{cases}$

(α, β) evenwicht $\Leftrightarrow \alpha = f(\alpha, \beta) \quad \& \quad \beta = g(\alpha, \beta)$.

Evenwicht (α, β) is **stabiel** als

$$x_n \rightarrow \alpha \quad \& \quad y_n \rightarrow \beta \quad (n \rightarrow \infty)$$

voor alle $x_0 \approx \alpha \quad \& \quad y_0 \approx \beta$

en

$$x_0 \approx \alpha \quad \& \quad y_0 \approx \beta \quad \Rightarrow \quad x_n \approx \alpha \quad \& \quad y_n \approx \beta \quad \text{alle } n.$$

Sluipwespen & Rupsen

In jaar n : r_n het aantal rupsen,

w_n het aantal sluipwespen.

Aanname:

- groeicoëfficiënt rupsen neemt linear af bij groeiend aantal rupsen en wespen,
- groeicoëfficiënt wespen neemt linear toe bij groeiend aantal rupsen.

Model:
$$\begin{cases} r_{n+1} = (a - r_n/R - w_n/W) r_n, \\ w_{n+1} = \gamma r_n w_n, \end{cases}$$

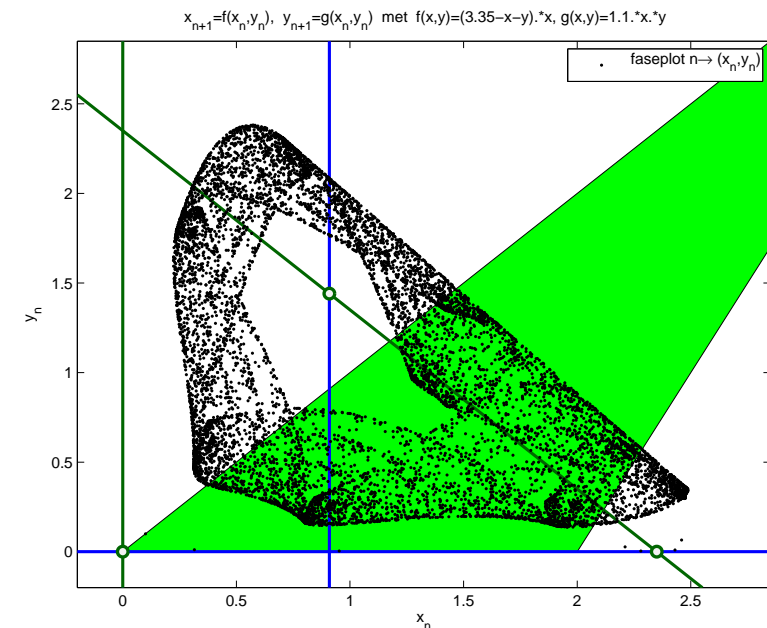
voor zekere positieve constanten a, γ, R en W .

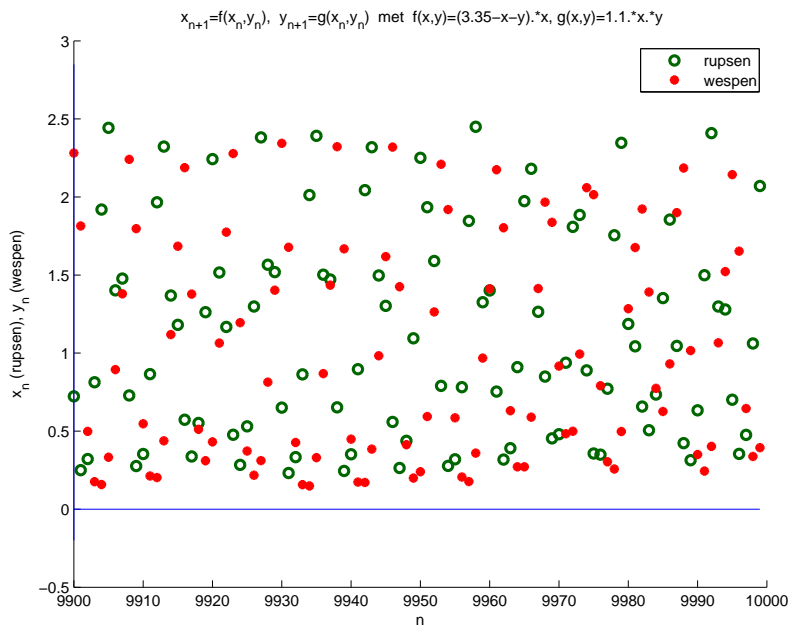
Schaal: $x_n \equiv r_n/R, y_n \equiv w_n/W$ levert

$$\begin{cases} x_{n+1} = (a - x_n - y_n) x_n, \\ y_{n+1} = b x_n y_n. \end{cases}$$

Is er evenwicht? Is dat stabiel?

Hoe ontwikkelt de oplossing zich?





Linearizeren

$$f(\alpha + \varepsilon) \approx f(\alpha) + \varepsilon f'(\alpha) \quad \text{voor } \varepsilon \approx 0.$$

2-dimensionaal: $\varepsilon, \delta \approx 0 \Rightarrow$

$$f(\alpha + \varepsilon, \beta + \delta) \approx f(\alpha, \beta) + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, \beta) + \delta \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha, \beta).$$

Linearizeren rond evenwicht

Stel (α, β) evenwicht, $\vec{\alpha} \equiv \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$.

Als $\begin{cases} x_n = \alpha + \varepsilon_n \\ y_n = \beta + \delta_n \end{cases}$ oplossing met $\begin{cases} \varepsilon_n \approx 0 \\ \delta_n \approx 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{n+1} \\ \delta_{n+1} \end{bmatrix} \approx \mathbf{D} \begin{bmatrix} \varepsilon_n \\ \delta_n \end{bmatrix}, \text{ met } \mathbf{D} \equiv \mathbf{Df}(\vec{\alpha}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, \beta) & \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha, \beta) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(\alpha, \beta) & \frac{\partial g}{\partial y}(\alpha, \beta) \end{bmatrix},$$

de **Jacobi matrix** of **totale afgeleide** van **f**.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{n+1} \\ \delta_{n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{D} \begin{bmatrix} \varepsilon_n \\ \delta_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_n \approx \alpha + \varepsilon_n \\ y_n \approx \beta + \delta_n \end{cases} \text{ opl. mits } \begin{cases} \varepsilon_n \approx 0 \\ \delta_n \approx 0. \end{cases}$$

Lineariseren en stabiliteit

Stelling. $\vec{\alpha}$ evenwichtsooplossing. λ eigenwaarde $\mathbf{Df}(\vec{\alpha})$.

Evenwicht stabiel $\Leftrightarrow |\lambda| < 1$ alle λ .

Evenwicht instabiel $\Leftrightarrow |\lambda| > 1$ zekere λ .

Geen conclusie als

$$|\lambda| \leq 1 \text{ alle } \lambda \quad \& \quad |\lambda| = 1 \text{ zekere } \lambda!$$

Stelling ook goed in meer dan 2 dimensies.

Stabiliteit evenwichten 2-d (reëel)

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \text{ met } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, a_{ij}, \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \text{ reëel.}$$

\mathbf{A} met eigenwaarden λ_1 en λ_2 , $|\lambda_2| \leq |\lambda_1|$.

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12} a_{21} \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) \\ &= \lambda^2 - s\lambda + d \end{aligned}$$

met $d \equiv \det(\mathbf{A}) \equiv a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$

$s \equiv \text{spoor}(\mathbf{A}) \equiv a_{11} + a_{22}$

$$\lambda^2 - s\lambda + d = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$

$$\Rightarrow s = \lambda_1 + \lambda_2 \quad \text{en} \quad d = \lambda_1 \lambda_2$$

Stabiliteit evenwichten 2-d (reëel)

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \text{ met } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, a_{ij}, \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \text{ reëel.}$$

\mathbf{A} met eigenwaarden λ_1 en λ_2 , $|\lambda_2| \leq |\lambda_1|$.

$$d \equiv a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = \det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \lambda_2$$

$$s \equiv a_{11} + a_{22} = \text{spoor}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$4d \leq s^2 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

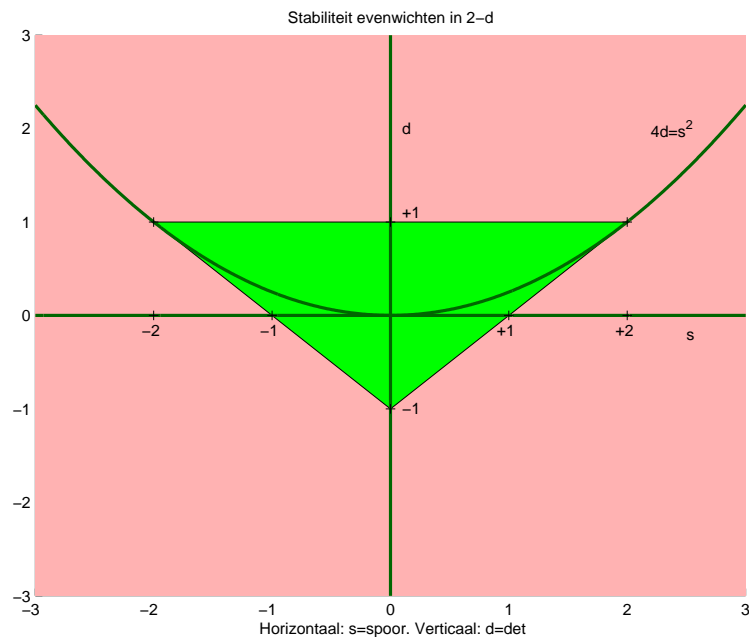
Stabiel: $1 - s + d > 0$ en $1 + s + d > 0 \Leftrightarrow -1 < \lambda_2 \leq \lambda_1 < 1$

$$4d > s^2 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}, \quad \lambda_2 = \bar{\lambda}_1$$

Stabiel: $d = |\lambda_1|^2$: $|\lambda_1| = |\lambda_2| < 1 \Leftrightarrow d < 1$

Bewering. Stabiel als $|s| - 1 < d < 1$.

Instabiel als $|s| - 1 > d$ of $d > 1$.



Voorbeeld. $\begin{cases} x_{n+1} = (a - x_n - y_n) x_n, \\ y_{n+1} = b x_n y_n, \end{cases}$ met $a, b \geq 0$.

Lineariseer rond (α, β) : $\begin{bmatrix} \varepsilon_{n+1} \\ \delta_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - 2\alpha - \beta & -\alpha \\ b\beta & b\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_n \\ \delta_n \end{bmatrix}$.

Evenwicht (1): $\begin{bmatrix} \varepsilon_{n+1} \\ \delta_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_n \\ \delta_n \end{bmatrix}$.

Evenwicht (2): $\begin{bmatrix} \varepsilon_{n+1} \\ \delta_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - a & 1 - a \\ 0 & b(a - 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_n \\ \delta_n \end{bmatrix}$.

Evenwicht (3): $\begin{bmatrix} \varepsilon_{n+1} \\ \delta_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{b} & -\frac{1}{b} \\ b(a - 1) - 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_n \\ \delta_n \end{bmatrix}$.

Evenwicht (1) is stabiel $\Leftrightarrow a < 1$.

Evenwicht (2) is stabiel $\Leftrightarrow 1 < a < 3$ & $a < 1 + \frac{1}{b}$.

Evenwicht (3) is stabiel $\Leftrightarrow \max(\frac{3}{b} - 3, 1 + \frac{1}{b}) < a < 1 + \frac{2}{b}$.

Wat als $a > 1 + \frac{2}{b}$?

Complex als 2-d reëel

Voor $c \in \mathbb{C}$, bekijk

$$z_{n+1} = F(z_n) \quad \text{met} \quad F(z) \equiv z^2 + c \quad (z \in \mathbb{C})$$

Voor $z \in \mathbb{C}$, schrijf $z = x + iy$ met $x, y \in \mathbb{R}$. Evenzo $c = a + ib$.

Dan $F(x + iy) = (x^2 - y^2 + a) + i(2xy + b)$.

Schrijf $z_n = x_n + iy_n$. Dan

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n) \equiv x_n^2 - y_n^2 + a \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n) \equiv 2x_n y_n + b \end{cases}$$

Stabiliteit. Jacobi matrix in (x, y) : $\begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}$

met eigenwaarden $\lambda_1 = 2(x + iy)$ en $\lambda_2 = 2(x - iy)$.

Met $z = x + iy$ is $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 2|z| = |F'(z)|$.

Evenwicht (in \mathbb{C}) in $\zeta_1 \equiv \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4c})$. Stabiel als $|2\zeta_1| < 1$

N_n aantal individuen eind maand n

Aanname:

- Alleen individuen ouder dan 1 maand produceren nakomelingen
- Productie is met vaste groeicoëfficiënt,
- Sterfte hangt lineair af van het totaal aantal individuen.

Model: Voor zekere $g > 0$

$$N_{n+1} = (1 - \kappa \frac{N_n}{N}) N_n + g(1 - \kappa \frac{N_{n-1}}{N}) N_{n-1}.$$

Na schaling $x_n \equiv N_n/N$:

$$x_{n+1} = (1 - \kappa x_n) x_n + g(1 - \kappa x_{n-1}) x_{n-1}$$

of equivalent hiermee (**companion vorm**)

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \kappa x_n^2 + g(y_n - \kappa y_n^2), \\ y_{n+1} = x_n \end{cases}$$

(d.w.z. $y_1 = x_0 \Leftrightarrow y_{n+1} = x_n$).

Voorbeeld

Kies $c \in \mathbb{C}$. Definieer $F(z) \equiv z^2 + c \quad (z \in \mathbb{C})$.

Voor iedere rij (z_n) met $z_{n+1} = F(z_n)$ zijn er drie mogelijkheden:

- 1) $z_n \rightarrow \alpha \quad (n \rightarrow \infty)$ met α evenwicht: $\alpha = F(\alpha)$
- 2) $z_n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$
- 3) anders (chaos, periodieke banen)

Julia set: $\{z_0 \in \mathbb{C} \mid (z_n) \text{ heeft eigenschap 3)\}$

- Kies $c = -1.25$.

Kleur $z_0 \in \mathbb{C}$ met kleur afhankelijk van gedrag (z_n) voor $n \rightarrow \infty$.

- Kies $z_0 = 1$.

Kleur $c \in \mathbb{C}$ met kleur afhankelijk van gedrag (z_n) voor $n \rightarrow \infty$.

Kleurnuances corresponderen met

$$\text{waarde } n \text{ waarvoor } |z_n - \alpha| < 10^{-8} \text{ of } |z_n| > 10^8$$

Chaos $f : I \rightarrow I$

Een iteratief proces $x_{n+1} = f(x_n)$ is **chaotisch** (op I) als

- 1) er voor iedere $x_0 \in I$ **kleine** verstoringen zijn die op den duur tot **grote** afwijkingen leiden,
- 2) er in de buurt van iedere $x \in I$ een $x_0 \in I$ te vinden is waarvoor de baan (x_n) periodiek is,
- 3) er een baan (x_n) te vinden is in I die voor iedere $x \in I$ willekeurig dicht in de buurt van x komt.

Voorbeeld. $z_{n+1} = F(z_n)$ met $F(z) \equiv z^2 \pmod{1}$ ($z \in \mathbb{C}$),

$$|z_0| < 1 \Rightarrow z_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$|z_0| > 1 \Rightarrow z_n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$|z_0| = 1. \text{ Schrijf } z_n = e^{2\pi i \phi_n} \text{ voor een } \phi_n \in [0, 1).$$

$$z_{n+1} = z_n^2 \Leftrightarrow \phi_{n+1} = 2\phi_n \pmod{1}$$

Chaos op $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. *Is chaos zichtbaar hier?*

... ..

Cantor verzameling. $\mathcal{D} \equiv \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} 2 a_i 3^{-i} \mid a_i \in \{0, 1\} \right\}$

Itereren op de Cantor verzameling.

$x_{n+1} = 2x_n \pmod{1}$ op $[0, 1]$ is equivalent met (binair)

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j 2^{-j} \rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} a_{j+1} 2^{-j}$$

'Verplaats' dit proces naar \mathcal{D} :

$$\sum_{j=1}^{\infty} 2 a_j 3^{-j} \rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} 2 a_{j+1} 3^{-j} \quad (*)$$

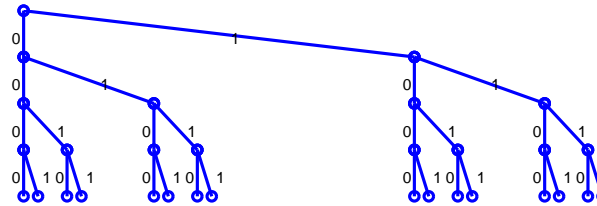
Zo correspondeert $x_0 = 0.01011001\dots$

$$= 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5} + \dots$$

op \mathcal{D} met $0 \cdot 3^{-1} + 2 \cdot 3^{-2} + 0 \cdot 3^{-3} + 2 \cdot 3^{-4} + 2 \cdot 3^{-5} + \dots$

Conclusie. Proces $*$) is chaotisch op de Cantor verzameling.

Cantor verzameling



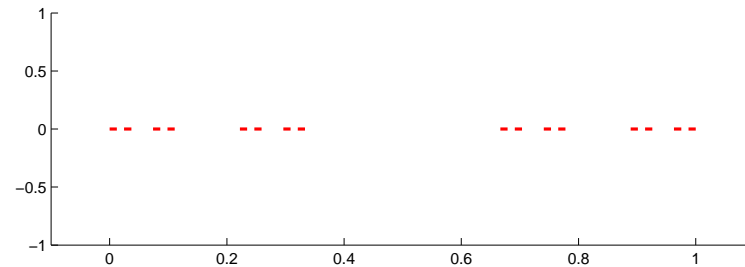
$$\sum_{i=1}^{\infty} 2 a_i 3^{-i}$$

met $a_i \in \{0, 1\}$

\updownarrow

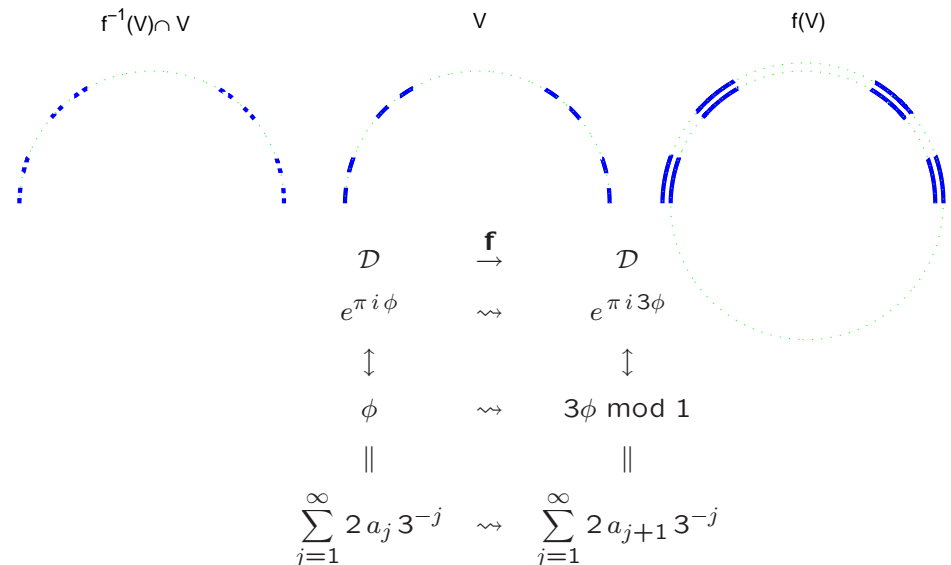
$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i 2^{-i}$$

met $a_i \in \{0, 1\}$



$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ op $\mathbb{R}^2 \sim$ op \mathbb{C} met $F(z) = z^3$ ($z \in \mathbb{C}$).

Wat gebeurt er met de bovenste helft van de eenheidscirkel?



$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$$

Definieer de keten van verzamelingen \mathcal{V}_n door

$$\mathcal{V}_{n+1} \equiv \mathbf{f}^{-1}(\mathcal{V}_n) \cap \mathbf{f}(\mathcal{V}_n) \cap \mathcal{V}_n$$

Met $\mathcal{D} \equiv \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{V}_n$ geldt $\mathbf{f}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$

Chaos op \mathcal{D} in vorige voorbeeld.

Is deze constructie algemener toepasbaar?

Wanneer werkt hij?

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$$

Definieer de keten van verzamelingen \mathcal{V}_n door

$$\mathcal{V}_{n+1} \equiv \mathbf{f}^{-1}(\mathcal{V}_n) \cap \mathbf{f}(\mathcal{V}_n) \cap \mathcal{V}_n$$

Met $\mathcal{D} \equiv \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{V}_n$ geldt $\mathbf{f}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$

Conclusie.

Als $\mathbf{f}(\mathcal{V})$ in twee parallele stroken \mathcal{V} doorsnijdt, en als ℓ een lijn is in \mathcal{V} en $\mathbf{f}(\ell)$ als een hoefijzer om ℓ ligt, dan

- is er een 'Cantor achtige' deelverzameling \mathcal{D} van \mathcal{V} met

$$\mathbf{f}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$$

en

- het proces $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ is chaotisch op \mathcal{D} .

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \text{ op } \mathbb{R}^2 \sim \text{ op } \mathbb{C} \text{ met } F(z) = z^3 \quad (z \in \mathbb{C}).$$

0 is een stabiel evenwicht. **Andere evenwichten?**

- (z_n) convergeert naar 0 als $|z_0| < 1$.
- (z_n) 'convergeert' naar ∞ (divergeert) als $|z_0| > 1$.
- Chaotisch gedrag voor $|z_0| = 1$.

Varianten. $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ op $\mathbb{R}^2 \sim$ op \mathbb{C} met

- $F(z) = z^2 \quad (z \in \mathbb{C})$.
- $F(z) \equiv z^2 + c$ voor zekere c . **Julia set.**
- $F(z) = F(r e^{2\pi i \phi}) \equiv \sqrt{r} e^{2\pi i 2\phi}$.
- $F(z) = F(r e^{\pi i \phi}) \equiv (\frac{1}{3}r + \frac{8}{9}|\phi|) e^{3\pi i \phi} \quad (r \in [0, \infty), |\phi| \leq 1)$

Actie F op $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1, \text{Re}(z) \geq 0\}$ is
 samendrukken, uittrekken, oprollen
 (Plaatjes op de volgende transparanten voor deze iteratie)