

Utrecht, 29 mei 2013

Modellen en Simulatie

Gerard Sleijpen



Universiteit Utrecht
Department of Mathematics

<http://www.staff.science.uu.nl/~sleij101/>

Utrecht, 29 mei 2013

Modellen en Simulatie

Differentiaal- vergelijkingen

Gerard Sleijpen



Universiteit Utrecht
Department of Mathematics

<http://www.staff.science.uu.nl/~sleij101/>

Program

- Continue modellen
- Voorbeeld
- Oplosmethoden
- Evenwicht, stabiliteit
- Discreet versus continue
- Terminologie
- Meer dimensionale eerste orde modellen
- Een dimensionale hogere orde modellen
- Resonantie
- Meer dimensionale eerste orde modellen, II

Continue modellen

Discrete modellen.

- Duidelijk tijdvak.
Binnen het tijdvak verandert de situatie niet echt.
Herten, vogels, zaadplanten, vlinders, scholen, nationaal inkomen,...
- Aantal individuen niet al te klein.

Ook discreet in geval periodieke waarneming "continu" systeem.

Continue modellen

- Veranderingen zijn niet gebonden aan een specifiek tijdvak.
Bacteriën, algen, mensen, ...
concentratie giftige stof, ...
veeldeeltsystemen (gassen, vloeistoffen), ...
bewegingen, ...
- Aantal individuen zéér groot.

$q(t)$ hoeveelheid Co^{60} op tijdstip t .

Aanname:

$\text{Co}^{60} \rightarrow \text{Ni}^{60}$: Afname hoeveelheid Co^{60} is \approx evenredig met hoeveelheid materiaal en met tijdsduur (evenredigheid is beter als de tijdsduur korter is).

Modeleer: $q(t + \Delta t) - q(t) \approx -\alpha \Delta t q(t)$,

met $\alpha > 0$ (bekend) & " $\approx \rightarrow =$ " als $\Delta t \rightarrow 0$.

Model. $q'(t) = -\alpha q(t)$ voor alle $t \geq 0$.

Oplossing. $q(t) = q(0) e^{-\alpha t}$. Hangt af van $q(0)$.

T (halveringstijd) zodat $q(T) = q(0)/2 \Rightarrow$

$$\alpha = \frac{\ln 2}{T} \quad \& \quad q(t) = q(0) \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}.$$

Scheiden van variabelen

Voorbeeld. $q'(t) = \frac{q(t)}{t^2 - 3t + 2}$ voor alle $t \geq t_0$. $q(t_0) = q_0$.

Scheid: $\frac{q'(t)}{q(t)} = \frac{1}{t^2 - 3t + 2} = \frac{1}{t-2} - \frac{1}{t-1}$

Integreer: $\int_{t_0}^t \frac{q'(t)}{q(t)} dt = \int_{t_0}^t \frac{1}{t-2} - \frac{1}{t-1} dt$

$$\int_{t_0}^t \frac{q'(t)}{q(t)} dt = \int_{q_0}^{q(t)} \frac{1}{q} dq = \ln\left(\frac{q(t)}{q_0}\right) = \int_{t_0}^t \frac{1}{t-2} - \frac{1}{t-1} dt = \ln\left(\frac{t-1}{t-2} \cdot \frac{t_0-2}{t_0-1}\right)$$

$$\Rightarrow q(t) = q_0 \frac{t-1}{t-2} \frac{t_0-2}{t_0-1}$$

Model. $q'(t) = -\alpha q(t)$ voor alle $t \geq 0$. $q(0) = q_0$.

Oplossen

Scheid de variabelen: $\frac{q'(t)}{q(t)} = -\alpha$

Integreer: $\int_0^t \frac{q'(t)}{q(t)} dt = \int_0^t -\alpha dt$

$$\int_0^t \frac{q'(t)}{q(t)} dt = \int_{q_0}^{q(t)} \frac{1}{q} dq = \ln\left(\frac{q(t)}{q_0}\right) = \int_0^t -\alpha dt = -\alpha t$$

$$\Rightarrow q(t) = q_0 e^{-\alpha t}$$

$q(t)$ concentratie gif (gr/m^3) in 'n meer op tijdstip t .

Volume meer: $V \text{ m}^3$.

Instroom: $v \text{ m}^3$ water per seconde (s) verontreinigt met l gram gif per m^3 water.

Uitstroom: $v \text{ m}^3$ water per seconde.

Aanname:

Verontreiniging verdeelt zich homogeen over het meer

Modeleer: $V \cdot (q(t + \Delta t) - q(t)) \approx vl \Delta t - v q(t) \Delta t$.

Model: $q' = \frac{vl}{V} - \frac{v}{V} q = \frac{v}{V} (l - q)$ voor $t \geq 0$.

Evenwicht als $q'(t) = 0$ alle t ($\Leftrightarrow q = l$).

Algemene oplossing: $q(t) = (q(0) - l) e^{-\alpha t} + l$ met $\alpha \equiv \frac{v}{V}$

$$q'(t) = -\alpha q(t) + r(t) \quad \text{voor alle } t \geq 0$$

Lineaire differentiaalvergelijking

Homogeen (= lineair) **deel**:

$$q'(t) = -\alpha q(t)$$

met oplossing $q(t) = C e^{-\alpha t}$

Inhomogeen deel: $r(t)$.

Oplosmethode.

- Vind 'n **particuliere** oplossing, zeg q_{part} .
- Los het homogene deel op: $q_{\text{hom}}(t) = C e^{-\alpha t}$
- De algemene oplossing q is $q = q_{\text{part}} + q_{\text{hom}}$.

De constante C wordt bepaald door de **beginwaarde** q_0 , dat is de waarde van q op het begintijdstip.

Verband met discreet model

Model. $x_{n+1} = \kappa x_n$ $q'(t) = \lambda q(t)$

Oplossing. $x_n = \kappa^n x_0$ $q(t) = q(0) e^{\lambda t}$

Evenwicht. $x_n = 0$ alle n $q(t) = 0$ alle t .

Stabiel. $|\kappa| < 1$ $\text{Re}(\lambda) < 0$

Verklaring verschil $|\kappa| \leftrightarrow \text{Re}(\lambda) < 0$

Met $t_n \equiv n \Delta t$ en $q_n \equiv q(t_n)$ geldt

$$q_{n+1} = q(t_n + \Delta t) \approx (1 + \Delta t \lambda) q(t_n) = (1 + \Delta t \lambda) q_n$$

Conclusie.

We moeten $|\kappa| < 1$ vergelijken met $|1 + \Delta t \lambda| < 1$.

Stelling. Voor $\Delta t > 0$, en Δt voldoende klein is

$$|1 + \Delta t \lambda| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Re}(\lambda) < 0.$$

Voorbeeld. Voor $\alpha > 0, \nu \in \mathbb{R}$, $q' = -\alpha q + \cos(\nu t)$ (*)

Handigere variant. Merk op dat

$$r e^{i\nu t} = r \cos(\nu t) + i r \sin(\nu t): \quad r \cos(\nu t) = \text{Re}(r e^{i\nu t}).$$

Bewering. Als $\tilde{q}' = -\alpha \tilde{q} + e^{i\nu t}$

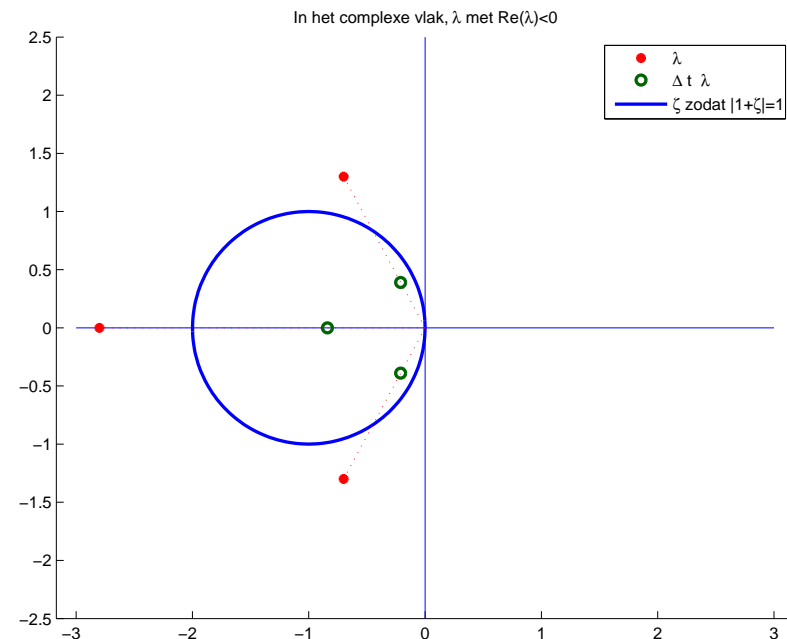
dan is $q(t) \equiv \text{Re}(\tilde{q}(t))$ een oplossing van (*).

Probeer $\tilde{q}(t) = \gamma e^{i\nu t}$ met $\gamma = a + i b \in \mathbb{C}$ en $a, b \in \mathbb{R}$.

$$i\nu \gamma e^{i\nu t} = -\alpha \gamma e^{i\nu t} + e^{i\nu t} \quad \Rightarrow \quad i\nu \gamma = -\alpha \gamma + 1$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{1}{\alpha + i\nu} = \frac{\alpha - i\nu}{\alpha^2 + \nu^2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \nu^2}} e^{-i\phi} \quad \text{met } \cos(\phi) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \nu^2}}, \dots$$

$$\begin{aligned} q_{\text{part}}(t) &= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \nu^2}} \text{Re}(e^{i(\nu t - \phi)}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \nu^2}} \cos(\nu t - \phi) \end{aligned}$$



Klassieke oorlogsvoering

$x(t)$ ($y(t)$) is (\approx) het aantal operationele soldaten van een 19-eeuws leger X (resp. Y). De legers X en Y bevechten elkaar in 'n veldslag.

Aanname:

De verliezen van X (Y) zijn evenredig met de 'schietkracht' van Y (resp. X), die evenredig is met het aantal operationele soldaten van Y (resp. X).

Model:

$$\begin{cases} x'(t) = a s_Y y(t) \\ y'(t) = b s_X x(t) \end{cases} \quad \text{voor } t_0 \leq t \leq t_0 + T,$$

waarbij $a, b < 0$, $s_X, s_Y > 0$ bekend, evenals $x(t_0)$ en $y(t_0)$.

Hoe verloopt het gevecht?

Kan daaruit $a s_X$ en $b s_Y$ bepaald worden?
Is er evenwicht (stabiel)? Wie wint?

Lineaire differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} x'(t) = a s_Y y(t) \\ y'(t) = b s_X x(t) \end{cases} \quad \begin{cases} x' = a s_Y y \\ y' = b s_X x. \end{cases}$$

In matrix representatie:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{met} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & a s_Y \\ b s_X & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) \end{cases} \quad \begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y. \end{cases}$$

In matrix representatie:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{met} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ontkoppelen

Eigenvectoren \mathbf{v}_i met eigenwaarden λ_i

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1 \quad \text{en} \quad \mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2.$$

Splits, voor iedere t , $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ in eigenvectorcomponenten:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = u(t)\mathbf{v}_1 + w(t)\mathbf{v}_2.$$

Invullen levert het **ontkoppelde stelsel**:

$$\begin{cases} u'(t) = \lambda_1 u(t) \\ w'(t) = \lambda_2 w(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \\ w(t) = C_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

zekere C_1, C_2 .

Stabiliteit

Bewijs.

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = u'(t) \mathbf{v}_1 + w'(t) \mathbf{v}_2.$$

&

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= u(t) \mathbf{A} \mathbf{v}_1 + w(t) \mathbf{A} \mathbf{v}_2 \\ &= u(t) \lambda_1 \mathbf{v}_1 + w(t) \lambda_2 \mathbf{v}_2. \end{aligned}$$

Blijkbaar $u'(t) \mathbf{v}_1 + w'(t) \mathbf{v}_2 = u(t) \lambda_1 \mathbf{v}_1 + w(t) \lambda_2 \mathbf{v}_2$.

Dus $(u'(t) - \lambda_1 u(t)) \mathbf{v}_1 + (w'(t) - \lambda_2 w(t)) \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$

en, omdat de eigenvectoren lineair onafhankelijk zijn,

$$\begin{cases} u'(t) = \lambda_1 u(t) \\ w'(t) = \lambda_2 w(t). \end{cases}$$

$$\mathbf{x}'(t) = (x_1'(t), \dots, x_m'(t))^T = \mathbf{A} \mathbf{x}$$

en $\mathbf{A} \mathbf{v}_j = \lambda_j \mathbf{v}_j$ voor $j = 1, \dots, m$.

Stelling.

- Als $\operatorname{Re}(\lambda_1) > \operatorname{Re}(\lambda_j)$ voor $j = 2, \dots, m$, dan

$$\mathbf{x}(t) \approx C_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 \text{ voor grote } t$$

- Als $0 > \operatorname{Re}(\lambda_j)$ voor $j = 1, \dots, m$, dan

$$\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0} \text{ voor } t \rightarrow \infty$$

Opmerking. De stelling geldt ook in geval van meervoudige eigenwaarden (dus als $\lambda_k = \lambda_j$ voor zekere $k \neq j$).

Classificatie evenwichten 2-d (reëel)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ met } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, a_{ij}, \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \text{ reëel.}$$

\mathbf{A} met eigenwaarden λ_1 en λ_2 .

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12} a_{21} \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22}) \lambda + (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) \\ &= \lambda^2 - s \lambda + d \end{aligned}$$

met $d \equiv \det(\mathbf{A}) \equiv a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$

$s \equiv \operatorname{spoor}(\mathbf{A}) \equiv a_{11} + a_{22}$

$$\lambda^2 - s \lambda + d = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$

$$\Rightarrow s = \lambda_1 + \lambda_2 \text{ en } d = \lambda_1 \lambda_2$$

Classificatie evenwichten 2-d (reëel)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ met } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, a_{ij}, \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \text{ reëel.}$$

\mathbf{A} met eigenwaarden λ_1 en λ_2 .

$$d \equiv a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = \det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \lambda_2$$

$$s \equiv a_{11} + a_{22} = \operatorname{spoor}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2$$

$4d \leq s^2 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

$d < 0 \Rightarrow \lambda_2 < 0 < \lambda_1$, **zadelpunt** (instabiel)

$0 < 4d < s^2, s < 0 \Rightarrow \lambda_2 < \lambda_1 < 0$, **stabiele knoop**

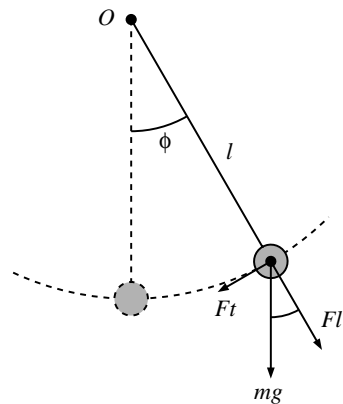
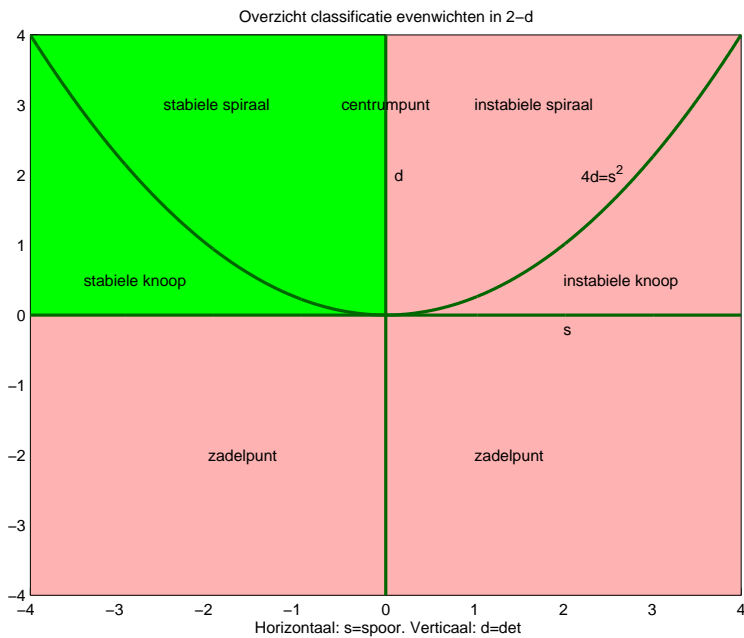
$s > 0 \Rightarrow 0 < \lambda_2 < \lambda_1$, **instabiele knoop**

$4d > s^2 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}, \operatorname{Re}(\lambda_1) = \operatorname{Re}(\lambda_2)$

$s < 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(\lambda_1) < 0$, **stabiel spiraal**

$s > 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(\lambda_1) > 0$, **instabiel spiraal**

$s = 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(\lambda_1) = 0$, **centrumpunt**



Massa m slingert aan een gewichtloos touw van lengte l .

Snelheid massa: $v = l\phi'$. Versnelling: $a = l\phi''$.

Effect zwaartekracht (in bewegingsrichting): $F_t = -mg \sin(\phi)$.

Wrijving: $F_w = -c l \phi'$. Grootte afremming evenredig snelheid.

Newton. $F = ma \Rightarrow -mg \sin(\phi) - c l \phi' = m l \phi''$

3-de orde differentiaal vergelijkingen

$$\phi^{(3)} = \alpha_1 \phi^{(2)} + \alpha_2 \phi^{(1)} + \alpha_3 \phi$$

Companion vorm.

Definieer $x_3 \equiv \phi$, $x_2 \equiv \phi^{(1)}$, $x_1 \equiv \phi^{(2)}$.

$$\Rightarrow x'_1 = \phi^{(3)} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ x'_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}.$$

Opmerking.

Companion matrix is een Leslie matrix met $s_i = 1$.

Tweede orde differentiaal vergelijkingen

$$\phi'' = \alpha \phi' + \beta \phi$$

Companion vorm.

Definieer $y \equiv \phi$, $x \equiv y' = \phi'$.

$$\Rightarrow x' = \phi'' = \alpha x + \beta y$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2$$

Dus $\phi(t) = y(t) = \gamma_1 e^{\lambda_1 t} + \gamma_2 e^{\lambda_2 t}$

met γ_j is C_j maal de tweede coördinaat van \mathbf{v}_j .
 γ_1 en γ_2 te bepalen uit de beginwaarden.

3-de orde differentiaal vergelijkingen

$$\phi^{(3)} = \alpha_1 \phi^{(2)} + \alpha_2 \phi^{(1)} + \alpha_3 \phi$$

Stelling. Als $\lambda_i \neq \lambda_j$, voor $i \neq j$ dan

$$\phi(t) = y(t) = \gamma_1 e^{\lambda_1 t} + \gamma_2 e^{\lambda_2 t} + \gamma_3 e^{\lambda_3 t},$$

waarbij λ_j oplossingen zijn van

$$\lambda^3 = \alpha_1 \lambda^2 + \alpha_2 \lambda + \alpha_3$$

en γ_j zodat $\phi(0) = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$,

$$\phi'(0) = \gamma_1 \lambda_1 + \gamma_2 \lambda_2 + \gamma_3 \lambda_3$$

$$\phi''(0) = \gamma_1 \lambda_1^2 + \gamma_2 \lambda_2^2 + \gamma_3 \lambda_3^2.$$

Tweede orde differentiaal vergelijkingen

$$\phi'' = \alpha \phi' + \beta \phi$$

Stelling. Als $\lambda_1 \neq \lambda_2$, dan

$$\phi(t) = y(t) = \gamma_1 e^{\lambda_1 t} + \gamma_2 e^{\lambda_2 t},$$

waarbij λ_1 en λ_2 oplossing van

$$\lambda^2 = \alpha \lambda + \beta$$

en γ_1 en γ_2 zodat $\phi(0) = \gamma_1 + \gamma_2$,

$$\phi'(0) = \gamma_1 \lambda_1 + \gamma_2 \lambda_2$$

Slinger

$$\phi'' = -\frac{c}{m} \phi' - \frac{g}{\ell} \phi$$

$c = 0$: $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = i\nu$ met $\nu \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

$$\phi(t) = C \cos(\nu t + \delta)$$

voor zekere constanten $C \in [0, \infty)$ en $\delta \in [0, 2\pi)$.

$c > 0$: $\lambda_{1,2} = -\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \nu^2}$ met $\rho \equiv \frac{c}{2m}$, $\nu \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}}$.

$\rho < \nu$: $\phi(t) = C \exp(-\rho t) \cos(\sqrt{\nu^2 - \rho^2} t + \delta)$

Damping $\rho > 0$:
oscillerende demping als $\rho < \nu$
kritische demping als $\rho = \nu$
overdemping als $\rho > \nu$

Kritische demping: "snelst" terug naar de rust situatie

Slinger

$$\phi'' + 2\rho\phi' + \nu^2\phi = \cos(\mu t) \quad \text{met} \quad \rho \equiv \frac{c}{2m}, \nu \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Opmerking. $\phi = \text{Re}(\tilde{\phi})$ als $\tilde{\phi}'' + 2\rho\tilde{\phi}' + \nu^2\tilde{\phi} = e^{i\mu t}$.

Probeer $\tilde{\phi}(t) = H e^{i\mu t}$. Schrijf $p(\lambda) \equiv \lambda^2 + 2\rho\lambda + \nu^2$.

$$\Rightarrow H = H(\mu) = \frac{1}{p(i\mu)} = \frac{1}{-\mu^2 + 2\rho i\mu + \nu^2}$$

Schrijf $H = |H| e^{-i\delta}$. Dan $\phi_{\text{part}}(t) = |H(\mu)| \cos(\mu t - \delta)$

$\mu \approx \nu$ en $\rho \approx 0$ is de **respons** ϕ_{part} op het **input signaal** op de duur groot (veel groter dan de input): we spreken over

resonantie

Slinger

In de praktijk:

$$\phi'' + 2\rho\phi' + \nu^2\phi = r(t) \quad \text{met} \quad r(t) = \sum_j \alpha_j \cos(\mu_j t)$$

Sterke respons als aan de volgende voorwaarden voldaan is.

- De eigenfrequentie ν van het systeem zit in de buurt van de frequentie μ_j van 'n harmonische oscillatie $\alpha_j \cos(\mu_j t)$ in het input signaal r .
- Die oscillatie is significant: $\alpha_j \not\approx 0$.
- De demping is gering: $\rho \approx 0$.

Als particuliere oplossing hebben we namelijk

$$\phi_{\text{part}}(t) = \sum_j \alpha_j |H(\mu_j)| \cos(\mu_j t - \delta_j)$$

Slinger

$$\phi'' + 2\rho\phi' + \nu^2\phi = \cos(\mu t) \quad \text{met} \quad \rho \equiv \frac{c}{2m}, \nu \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Samenvatting voor het geval $c > 0$, $\rho \equiv \frac{c}{2m} \ll \nu \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}}$.

- Homogeen deel heeft eigenwaarden $\lambda_{1,2} = -\rho \pm i\sqrt{\nu^2 - \rho^2}$
eigenfrequentie $\sqrt{\nu^2 - \rho^2}$.
- Inhomogeen systeem: oplossing $\phi =$
particuliere oplossing ϕ_{part} + oplossing ϕ_{hom} homogeen de
Op den duur: $\phi \approx \phi_{\text{part}}$.
- Oscillerende input (aandrijving) met (hoek)frequentie μ
levert oscillerende respons (output) ϕ_{part} met
 - \approx zelfde frequentie μ , maar met verschoven fase,
 - amplitude groot als $\mu \approx \nu$ en $\rho \approx 0$ (resonantie), anders amplitude klein.

Grote resonantie als
frequentie aandrijving \approx eigenfrequentie systeem

Kanttekeningen.

In praktijk heeft men te maken met (zeer) hoog dimensionale lineaire differentiaalvergelijkingen (met zeer veel eigenwaarden/eigenfrequenties).

Hogere orde vergelijkingen worden middels 'n companion vorm omgeschreven naar een eerste orde vergelijking (waarvoor de dimensie nog verder toeneemt).

Electronische circuits (chips) hebben tot 100 000 000 elektrische componenten (Wet van Moore) (weerstand, condensators, spoelen, etc.). $\text{dim} > 4 \cdot 10^8$.

Andere toepassingen:

- Getijden (eb en vloed)
- Muziek (sithar, viool)
- **Magnetic Resonance Imaging**
-

Classificatie evenwichten 2-d (reëel)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{met} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

met eigenwaarden λ_1 en λ_2 .

$$d \equiv a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = \det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \lambda_2$$

$$s \equiv a_{11} + a_{22} = \text{spoor}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2$$

$d > 0$ en $s < 0$: **Stabiel**

$$4d \leq s^2 \Rightarrow \text{Knoop}$$

$$4d > s^2 \Rightarrow \text{Spiraal}$$

Put

$d \leq 0$ of $s \geq 0$: **Instabiel**

$$d < 0 \Rightarrow \text{Zadelpunt}$$

$$d > 0 \ \& \ 4d \leq s^2 \Rightarrow \text{Knoop}$$

$$d > 0 \ \& \ 4d > s^2 \Rightarrow \text{Spiraal}$$

ZADELPUNT

BRON

Jordan kastjes, $d = 2$

$$4d = s^2, s \neq 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2, \quad \text{Im}(\lambda_1) = 0$$

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

$$y' = \lambda_1 y \Rightarrow y(t) = C_2 e^{\lambda_1 t}.$$

$$x \text{ voldoet aan } x'(t) = \lambda_1 x(t) + C_2 e^{\lambda_1 t}.$$

Oplossing homogeen deel: $C_1 e^{\lambda_1 t}$

Particuliere oplossing (variatie van constante):

$$C_2(1+t) e^{\lambda_1 t}.$$

Algemene oplossing:

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2(1+t) e^{\lambda_1 t}, \quad y(t) = C_2 e^{\lambda_1 t}$$

Analyse 'determinant is 0'

$$d = \det = 0, s = \text{spoor} < 0 \Leftrightarrow \lambda_2 < \lambda_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1 \mathbf{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2$$

met $\mathbf{v}_1 = (0, 1)^T$ en $\mathbf{v}_2 = (1, 0)^T$

Op den duur (d.w.z., voor t groot) $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \approx C_1 \mathbf{v}_1$

Instabiel. Instabiele kam?

Jordan kastjes, $d = 2$

$$4d = s^2, s \neq 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2, \quad \text{Im}(\lambda_1) = 0$$

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} \mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{A} \tilde{\mathbf{v}}_1 = \lambda_1 \tilde{\mathbf{v}}_1 + \mathbf{v}_1$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = (C_1 + C_2 t) e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + C_2 e^{\lambda_1 t} \tilde{\mathbf{v}}_1$$

met C_i zo dat $\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = C_1 \mathbf{v}_1 + C_2 \tilde{\mathbf{v}}_1$.

Op den duur (t groot) $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \approx C_2 t e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1$

Jordan kastjes, $d > 2$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3, \quad \text{Im}(\lambda_1) = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t} \left[C_1 + C_2(1+t) + C_3(1+t+\frac{1}{2}t^2) \right]$$

$$x_2(t) = e^{\lambda_1 t} [C_2 + C_3(1+t)]$$

$$x_3(t) = e^{\lambda_1 t} [C_3]$$

Op den duur (t groot) $x_1(t) \approx C_3 \frac{1}{2} t^2 e^{\lambda_1 t}, \dots$

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ \varepsilon & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad \text{met } \varepsilon \neq 0$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm\sqrt{\varepsilon} \end{bmatrix} = \pm\sqrt{\varepsilon} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm\sqrt{\varepsilon} \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \mu \pm \sqrt{\varepsilon}, \quad \mathbf{v}_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 \\ \pm\sqrt{\varepsilon} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon > 0: \quad C_1 e^{(\mu+\sqrt{\varepsilon})t} \mathbf{v}_1 + C_2 e^{(\mu-\sqrt{\varepsilon})t} \mathbf{v}_2, \quad C_i \in \mathbb{R} \quad \text{knoop}$$

$$\varepsilon < 0: \quad \text{Re} \left(C e^{\mu t} e^{i\sqrt{|\varepsilon|}t} \mathbf{v}_1 \right), \quad C \in \mathbb{C} \quad \text{spiraal}$$

Schrijf $C = |C| e^{i\delta}$. Dan oplossing:

$$|C| e^{\mu t} \text{Re} \left(e^{i(\sqrt{|\varepsilon|}t+\delta)} \begin{bmatrix} 1 \\ i\sqrt{|\varepsilon|} \end{bmatrix} \right) = |C| e^{\mu t} \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{|\varepsilon|}t+\delta) \\ -\sqrt{|\varepsilon|} \sin(\sqrt{|\varepsilon|}t+\delta) \end{bmatrix}$$

Jordan kastjes & Companion vorm

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3, \quad \text{Im}(\lambda) = 0$$

$$\phi^{(3)} + \alpha_0 \phi^{(2)} + \alpha_1 \phi^{(1)} + \alpha_2 \phi = 0$$

$$\text{met } \alpha_i \text{ zodat } (\lambda - \lambda_1)^3 = \lambda^3 + \alpha_0 \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2$$

Algemene oplossing:

$$\phi(t) = e^{\lambda_1 t} [\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 t + \tilde{C}_3 t^2]$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad a_{i,j} \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} d \equiv \det(\mathbf{A}) = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \\ s \equiv \text{spoor}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22} \end{cases}$$

