

Utrecht, 10 juni 2013

# Modellen en Simulatie Stelsels Dvg

Gerard Sleijpen



Universiteit Utrecht  
Department of Mathematics

<http://www.staff.science.uu.nl/~sleij101/>

## Program

- Niet-lineaire continue modellen
- Evenwicht
- Stabiliteit
- Lineairiseren rond het evenwicht
- Voorbeelden: concurrentie
- Voorbeelden: roof-prooi dier
- Chaos
- Hamilton systemen
- Voorbeelden van Hamilton systemen
- Tot slot

## Continu versus discreet: Lineaire modellen

**Continu model.**  $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ .

Als 0 geen eigenwaarde van  $\mathbf{A}$ :

opl.  $\mathbf{x}(t)$  in evenwicht  $\Leftrightarrow \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$  alle  $t$

$\mathbf{0}$  stabiel evenwicht  $\Leftrightarrow \operatorname{Re}(\lambda) < 0$  alle eigenw.  $\lambda$  van  $\mathbf{A}$ .

**Discreet model.**  $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n$ .

Als 1 geen eigenwaarde van  $\mathbf{A}$ :

opl.  $\mathbf{x}_n$  in evenwicht  $\Leftrightarrow \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$  alle  $n$

$\mathbf{0}$  stabiel evenwicht  $\Leftrightarrow |\lambda| < 1$  alle eigenw.  $\lambda$  van  $\mathbf{A}$ .

## Roof-prooidier model

In een zeker gebied komt, op tijdstip  $t$ , een diersoort  $X$  voor met dichtheid  $x(t)$  en een ander diersoort  $Y$  met dichtheid  $y(t)$ . Prooidier  $X$  heeft  $Y$  niet nodig om te overleven. Roofdier  $Y$  heeft  $X$  wel nodig.

**Aanname** [Lotka & Volterra]:

- Continu model.
- Groeicoëfficiënt van  $X$  hangt lineair af van de dichtheid van zowel soort  $X$  als soort  $Y$ : bij grotere dichtheden wordt de groei geremd.
- Groeicoëfficiënt van  $Y$  hangt lineair af van de dichtheid van soort  $X$ : bij grotere dichtheden wordt de groei gestimuleerd.

**Model:**

$$\begin{cases} x' = (k_X - b_X x - c_X y) x \\ y' = -k_Y y + c_Y x y. \end{cases}$$

## Niet-lineaire differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \quad \text{met bv.} \quad \begin{cases} f(x, y) = (a - by)x \\ g(x, y) = -cy + dxy. \end{cases}$$

### Evenwicht

Oplossing  $(x(t), y(t))$  is in **evenwicht** (of **stationair**) als

$$x(t) = x(t_0) = \alpha \quad \& \quad y(t) = y(t_0) = \beta \quad \text{alle } t.$$

**Bewering.** Evenwicht

$$\Leftrightarrow x'(t) = 0 \quad \& \quad y'(t) = 0 \quad \text{alle } t$$

$$\Leftrightarrow f(x(t), y(t)) = 0 \quad \& \quad g(x(t), y(t)) = 0 \quad \text{alle } t$$

$$\Leftrightarrow f(\alpha, \beta) = 0, \quad g(\alpha, \beta) = 0 \quad \& \quad x(t) = \alpha, \quad y(t) = \beta \quad \text{alle } t$$

## Haai-prooivis model

$$\begin{cases} x' = (a - by)x \\ y' = -cy + dxy. \end{cases} \quad \text{Lotka \& Volterra}$$

**Evenwichten.** 1.  $(0, 0)$  2.  $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$

Effecten van jaarlijks constante deel vangen?

$$a \rightarrow a - \varepsilon, \quad c \rightarrow c + \varepsilon.$$

**Evenwichten.**  $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) \rightarrow \left(\frac{c + \varepsilon}{d}, \frac{a - \varepsilon}{b}\right)$ .

**Interpretatie:**

aantal prooivissen neemt toe,  
aantal haaien neemt af.

## Haai-prooivis model

$$\begin{cases} x' = (a - by)x \\ y' = -cy + dxy. \end{cases} \quad \text{Lotka \& Volterra}$$

**Evenwichten.** 1.  $(0, 0)$  2.  $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$

Effecten van jaarlijks constante deel vangen?

## Stabiliteit

Evenwicht  $(\alpha, \beta)$  is **stabiel** als  $\varepsilon(t) \approx 0$  &  $\delta(t) \approx 0$  alle  $t$

en  $\varepsilon(t) \rightarrow 0$  &  $\delta(t) \rightarrow 0$  voor  $t \rightarrow \infty$

voor iedere opl.  $\begin{cases} x(t) = \alpha + \varepsilon(t) \\ y(t) = \beta + \delta(t) \end{cases}$  met  $\begin{cases} \varepsilon(t_0) \approx 0 \\ \delta(t_0) \approx 0. \end{cases}$

**Voorbeeld.** Lineaire differentiaalvergelijking:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

$\det(\mathbf{A}) \neq 0 \Rightarrow$  alleen evenwicht in  $\alpha = 0$  &  $\beta = 0$ .

**Stelling.**  $(0, 0)$  is een stabiel evenwicht

$\Leftrightarrow \operatorname{Re}(\lambda) < 0$  alle eigenwaarden  $\lambda$  van  $\mathbf{A}$ .

## Lineairiseren rond evenwicht

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \quad \text{of} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{bmatrix}$$

Beschouw een evenwicht  $\vec{\alpha} \equiv (\alpha, \beta)$ .

$$\text{Als } \begin{bmatrix} \varepsilon'(t) \\ \delta'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{D} \begin{bmatrix} \varepsilon(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix}, \quad \text{waarbij } \mathbf{D} \equiv \mathbf{Df}(\vec{\alpha}),$$

$$\text{dan } \begin{cases} x(t) \approx \alpha + \varepsilon(t) \\ y(t) \approx \beta + \delta(t) \end{cases} \quad \text{oplossing, mits } \begin{cases} |\varepsilon(t)| \approx 0 \\ |\delta(t)| \approx 0. \end{cases}$$

## Guerilla oorlogsvoering

$x(t), y(t)$  is ( $\approx$ ) het aantal operationele soldaten van een regulier leger  $X$ , respectievelijk guerilla leger  $Y$ .

De legers  $X$  en  $Y$  bevechten elkaar.

### Aanname:

De verliezen van  $X$  zijn evenredig met de schietkracht van  $Y$ , de verliezen van  $Y$  zijn evenredig met de schietkracht van  $X$  maar ook met het aantal guerilla soldaten van  $Y$ .

$$\text{Model: } \begin{cases} x'(t) = a s_Y y(t) \\ y'(t) = b s_X x(t) y(t), \end{cases}$$

waarbij  $a, b < 0$ ,  $s_X, s_Y > 0$  bekend, evenals  $x(t_0)$  en  $y(t_0)$ .

Werkt lineairisatie hier?

## Lineariseren en stabiliteit

**Stelling.**  $\vec{\alpha}$  evenwicht.  $\lambda$  eigenwaarde van  $\mathbf{Df}(\vec{\alpha})$ .

Evenwicht stabiel  $\Leftrightarrow \text{Re}(\lambda) < 0$  **alle**  $\lambda$ .

Evenwicht instabiel  $\Leftrightarrow \text{Re}(\lambda) > 0$  **zekere**  $\lambda$ .

*Geen conclusie als*

$\text{Re}(\lambda) \leq 0$  *alle*  $\lambda$  &  $\text{Re}(\lambda) = 0$  *zekere*  $\lambda$ !!

### Opmerkingen.

- Classificatie voor 2-dimensionale lineaire differentiaalvergelijkingen geldt ook voor niet lineaire (m.u.v.,  $s = d = 0$ ,  $4d = s^2$ ).
- Stelling is ook goed in meer dan 2 dimensies.
- De gegeven classificatie geldt echter alleen voor twee dimensies (en reële problemen).

## Concurrerende soorten

In een zeker gebied komt een plant  $X$  voor met dichtheid  $x(t)$  op tijdstip  $t$  en een plant  $Y$  met dichtheid  $y(t)$ .

### Aanname:

- Continu model.
- Groeicoëfficiënten hangen, voor beide soorten, lineair af van van de dichtheid van zowel soort  $X$  als soort  $Y$ : grotere dichtheden remmen de groei.

**Model:**

$$\begin{cases} x' = (k_X - b_X x - c_X y) x \\ y' = (k_Y - b_Y x - c_Y y) y. \end{cases}$$

**Voorbeeld.** 
$$\begin{cases} x' = (3 - x - y)x \\ y' = (4 - 2x - y)y. \end{cases}$$

Voer de schetsen alleen uit in het biologische relevante deel van het fase vlak.

**Wiskundige opdrachten**

- (a) Bepaal de evenwichtspunten.
- (b) Geef een indicatie voor het richtingsveld.
- (c) Classificeer de evenwichtspunten uit het richtingsveld en de classificatie theorie of door lineairisatie rond evenwicht.
- (d) Schets het fase portret. Schets de separatrices. Geef een nauwkeurige schets in de buurt van zadelpunten.

**Biologische vragen**

- (i) Waarom is het model verantwoord?
- (ii) Welke conclusies trek je uit de wiskundige analyse?

**Evenwichtspunten.**

$$(3 - x - y)x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ of } x + y = 3$$

$$(4 - 2x - y)y = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ of } 2x + y = 4.$$

Dus evenwichtspunten in

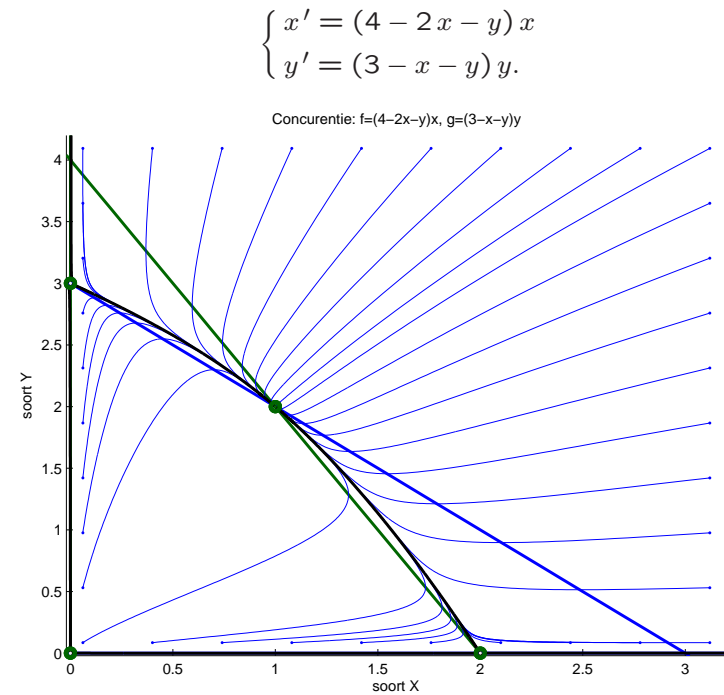
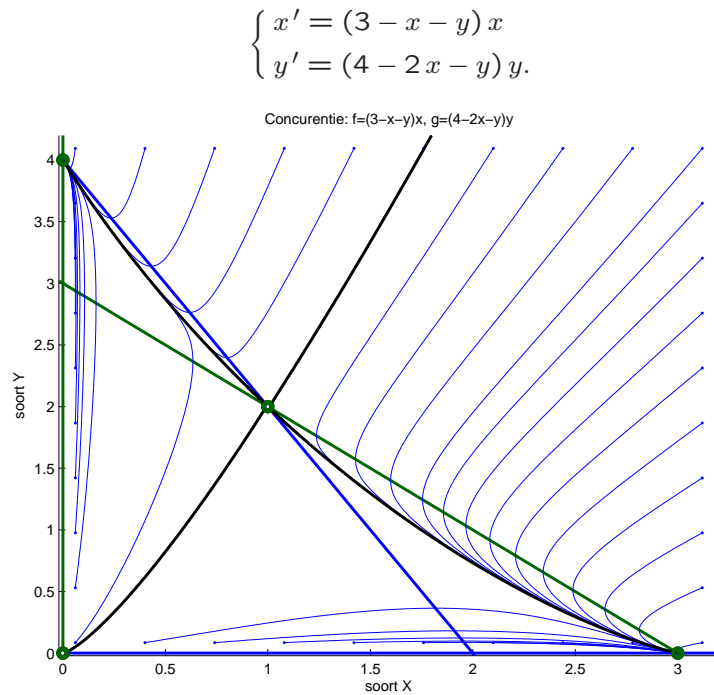
- 1. (0,0)    2. (0,4),    3. (3,0),    4. (1,2)

**Classificatie.**

Door linearisatie: 
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 2x - y & -x \\ -2y & 4 - 2x - 2y \end{bmatrix}$$

1.  $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ ,    2.  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}$      $s = -5 < 0$   
 $d = 4 > 0$ ,

3.  $\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$      $s = -5$      $d = 6$ ,    4.  $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$      $d = -2$ .



## Concurrerende soorten

**Voorbeeld.** 
$$\begin{cases} x' = (3 - x - y)x \\ y' = (4 - 2x - y)y. \end{cases}$$

**Voorbeeld.** 
$$\begin{cases} x' = (4 - 2x - y)x \\ y' = (3 - x - y)y. \end{cases}$$

**Voorbeeld.** 
$$\begin{cases} x' = (a - x^2 - y^2)x & \text{voor } a = 9. \\ y' = (4 - x - y)y \end{cases}$$

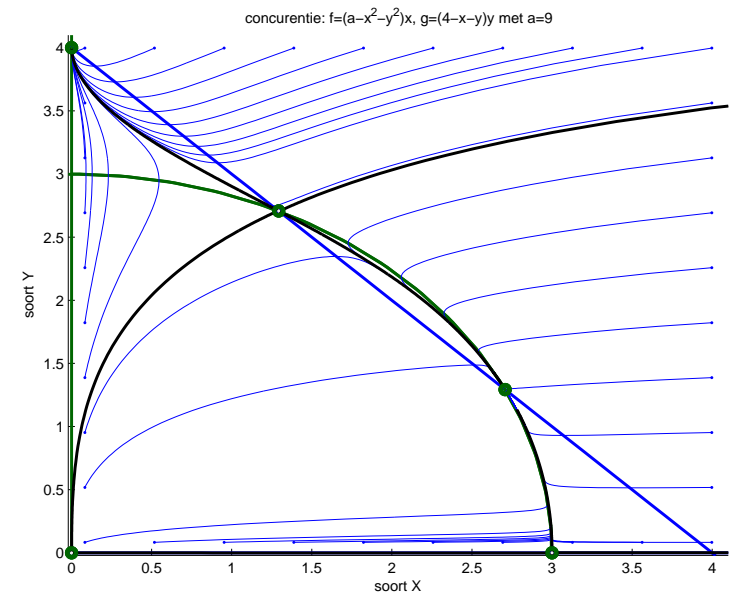
Bekijk de situatie ook voor  $a$ 's kleiner dan 9.

Vergelijk met name de situatie voor

$$a < 8 \quad \text{en} \quad a > 8.$$

Geef een verklaring.

$$\begin{cases} x' = (a - x^2 - y^2)x & \text{voor } a = 9. \\ y' = (4 - x - y)y \end{cases}$$



## Roof-prooidier modellen I

$$\begin{cases} x' = (a - x - y)x & \text{voor } a > 0 \\ y' = (-1 + x)y \end{cases}$$

Evenwichten in

1.  $(0, 0)$ ,
2.  $(a, 0)$ ,
3.  $(1, a - 1)$ .

Linearisatie: 
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - 2x - y & -x \\ y & x - 1 \end{bmatrix}.$$

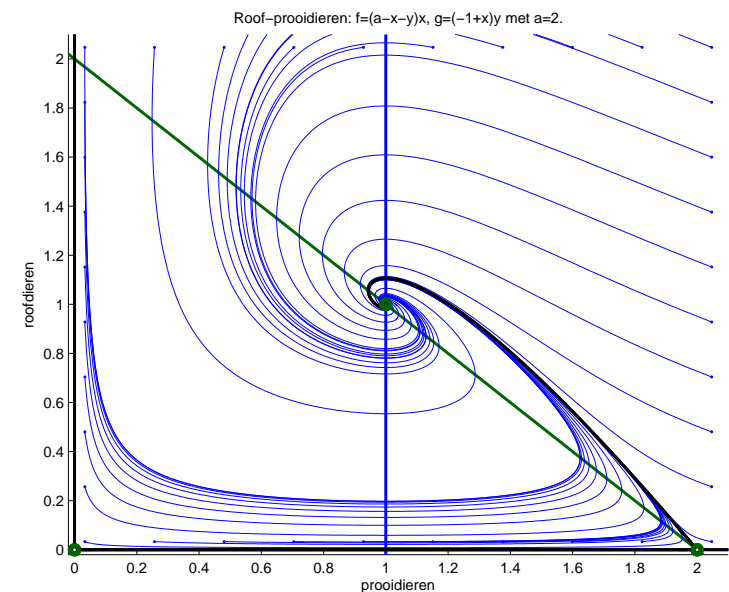
1. In  $(0, 0)$ :  $d = -a < 0$ .
2. In  $(a, 0)$ :  $s = -1, d = a(1 - a)$ .  $d < 0 \Leftrightarrow a > 1$ .
3. **Kan niet uit richtingsveld!!**

$(1, a - 1)$  alleen biologisch relevant als  $a \geq 1$ .

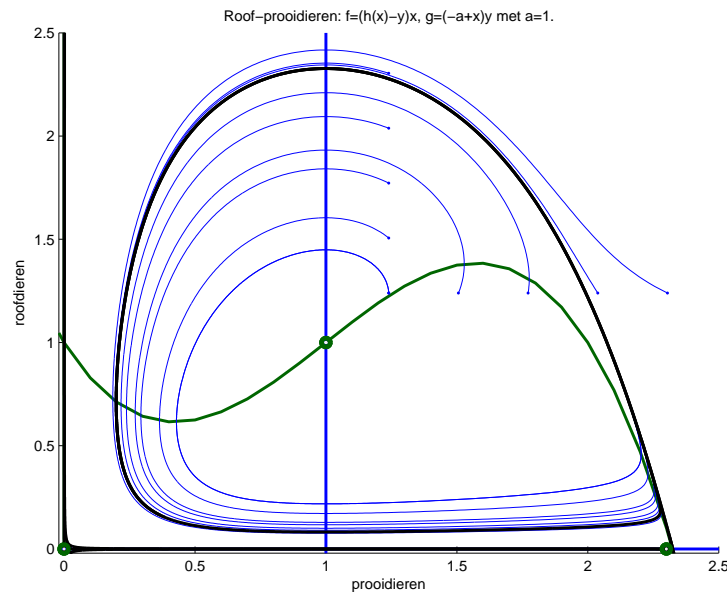
$$s = -1 \quad \& \quad d = a - 1 \quad (\text{put}).$$

$$1 = s^2 < 4(a - 1) \Leftrightarrow a > 5/4 \quad (\text{spiraal})$$

$$\begin{cases} x' = (a - x - y)x & \text{voor } a = 2 \\ y' = (-1 + x)y \end{cases}$$



$$\begin{cases} x' = (h(x) - y)x \\ y' = (-a + x)y \end{cases} \text{ voor } a = 1 \\ \text{en } h = 1 - x(x - 1)(x - 2)$$



## Autonome differentiaalvergelijkingen

Een differentiaal vergelijking is **autonoom** als het rechterlid niet expliciet afhangt van  $t$ .

### Voorbeelden

1) autonoom	2) niet autonoom
$\begin{cases} x' = (3 - y)x \\ y' = (2x - 1)y \end{cases}$	$\begin{cases} x' = (3 \sin^2(t) - y)x \\ y' = (2x - 1)y \end{cases}$

### Voorbeeld

3) autonoom

$$\begin{cases} x' = (3 \sin^2(z) - y)x \\ y' = (2x - 1)y \\ z' = 1 \end{cases}$$

## Roof-prooidier modellen II

$$\begin{cases} x' = (h(x) - y)x & \text{voor zekere functie } h \\ y' = (-a + x)y & \text{voor zekere } a > 0 \end{cases}$$

We bekijken een  $h$  waarvoor, voor een  $b > a$ , geldt  $h(x) > 0$  als  $0 \leq x < b$ ,  $h(x) < 0$  voor  $x > b$ .

Evenwichten in:

1.  $(0, 0)$ ,
2.  $(b, 0)$ ,
3.  $(a, h(a))$ .

Classificatie evenwicht  $(a, h(a))$  door linearisatie:

$$Df(a, h(a)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h'(a)a & -a \\ h(a) & 0 \end{bmatrix}.$$

$s = h'(a)a$ ,  $d = ah(a)$ : teken  $h'(a)$  bepaalt stabiliteit

Oplossing benadert stabiele **Limiet cykel** als  $h'(a) > 0$

## Autonome differentiaalvergelijkingen

Een differentiaal vergelijking is **autonoom** als het rechterlid niet expliciet afhangt van  $t$ .

### Voorbeelden

1) autonoom	2) niet autonoom
$\begin{cases} x' = (3 - y)x \\ y' = (2x - 1)y \end{cases}$	$\begin{cases} x' = (3 \sin^2(t) - y)x \\ y' = (2x - 1)y \end{cases}$

**Stelling.** De oplossingskrommen  $t \rightsquigarrow (x(t), y(t))$  van een autonome differentiaalvergelijkingen met continue differentieerbare rechterlid functies kruisen elkaar niet.

**Gevolg.** In 2-d. geen chaos voor autonome dvg.

**Stelling.** De oplossingskrommen  $t \rightsquigarrow (x(t), y(t))$  van een autonome differentiaalvergelijkingen met continue differentieerbare rechterlid functies kruisen elkaar niet.

**Voorbeeld**

$$\begin{cases} x' = 2\sqrt{|x|} \\ y' = 1 \end{cases}$$

Oplossing

$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = t \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} x(t) = t|t| \\ y(t) = t \end{cases}$$

$f(x, y) = 2\sqrt{|x|}$  is niet differentieerbaar in  $x = 0$ .

**Chaos**

Een discreet model is een voorschrift om rijen te produceren. Voor zulk voorschrift is chaos gedefinieerd.

Hoe chaos te definiëren voor continue modellen?  
Ook weer via een voorschrift om rijen te produceren.

Genereer rijen van  $x_n$  als volgt.

In 2 d.: Kies bijvoorbeeld de lijn  $y = \beta$ . De snijpunten van een oplossing  $(x(t), y(t))$  met deze lijn levert een rij van  $x_n$ :

$$x_n = x(t_n) \text{ als } y(t_n) = \beta \ \& \ y(t) \neq \beta \text{ voor } t_n < t < t_{n+1}.$$

In 3 d.: Kies een vlak en kijk naar de rij van snijpunten met dat vlak.

**Limiet cykel in 2-dimensies**

2-d autonome dvg: 
$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

**Stelling [Poincaré–Bendixon]**

$f, g$  continu differentieerbaar.

Als een oplossing  $t \rightsquigarrow (x(t), y(t))$  voor  $t \geq 0$  beperkt blijft tot een begrensde gebied dat geen evenwichtoplossingen bevat dan nadert de baan van de kromme  $t \rightsquigarrow (x(t), y(t))$  op den duur een **limiet cykel**, d.w.z. een gesloten kromme die zelf de baan is van een periodieke oplossing.

**Definitie.** Een oplossing  $t \rightsquigarrow (x(t), y(t))$  is **periodiek**

met **periode**  $T > 0$  als

$$(x(t + T), y(t + T)) = (x(t), y(t)) \quad \text{voor alle } t \geq 0$$

**Chaos**

In 2 d., voor autonome dvg., **geen chaos!!**

Iedere geproduceerde rij  $(x_n)$  (zie vorige transparant) gaat op den duur (d.w.z.,  $n \rightarrow \infty$ )

- (1) of naar oneindig ( $x_n \rightarrow \infty$ ),
- (2) of naar een evenwicht ( $x_n \rightarrow \alpha$ ),
- (3) of wordt twee periodiek ( $x_{2n} \rightarrow \alpha', x_{2n+1} \rightarrow \alpha'' \neq \alpha'$ ).

## Hamilton systemen

Beschouw een differentieerbare  $\mathbb{R}$ -waardige functie  $F$  op  $\mathbb{R}^2$ .

$$\begin{cases} x' = -\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \\ y' = +\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \end{cases}$$

**Stelling.** Voor iedere oplossing  $(x(t), y(t))$  geldt

$$F(x(t), y(t)) = C \quad \text{voor zekere constant } C.$$

**Probleem.** Gegeven  $f$  en  $g$ . Is er een  $F$  zodat

$$-\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = f(x, y) \quad \text{en} \quad +\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = g(x, y)$$

of, m.a.w., is  $\text{grad}(F) = (g, -f)$ ?

Is  $(g, -f)$  **exact**? Dwz, is  $-\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}$ ?

## Hamilton systemen

Beschouw een differentieerbare  $\mathbb{R}$ -waardige functie  $F$  op  $\mathbb{R}^2$ .

$$\begin{cases} x' = -\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \\ y' = +\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \end{cases}$$

**Stelling.** Voor iedere oplossing  $(x(t), y(t))$  geldt

$$F(x(t), y(t)) = C \quad \text{voor zekere constant } C.$$

**Voorbeeld.** Stel  $H$  en  $G$  zijn  $\mathbb{R}$ -waardig op een deel van  $\mathbb{R}$

zo dat  $\frac{dG}{dy}(y) = f(x, y)$  en  $\frac{dH}{dx}(x) = g(x, y)$ .

Dan  $F(x, y) = H(x) - G(y)$ .

**Stelling.** Voor iedere oplossing  $t \rightsquigarrow (x(t), y(t))$  geldt

$$F(x(t), y(t)) = C \quad \text{voor zekere constante } C.$$

**Bewijs.**  $t \rightsquigarrow (x(t), y(t))$  oplossing.

Uit de differentiaalvergelijking volgt

$$x'(t) \frac{\partial F}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial F}{\partial y}(x(t), y(t)) = 0$$

Omdat

$$\frac{d}{dt}F(x(t), y(t)) = x'(t) \frac{\partial F}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial F}{\partial y}(x(t), y(t))$$

is  $\frac{d}{dt}F(x(t), y(t)) = 0$

en de stelling volgt door integratie.

**Voorbeeld [Slinger]**  $\phi'' = -\nu^2 \sin \phi$  met  $\nu^2 \equiv g/l$ .

Schrijf  $y \equiv \phi$  en  $x \equiv \phi'$ . Dan

$$\begin{cases} x' = -\nu^2 \sin(y) \\ y' = x \end{cases}$$

Met  $F(x, y) = -\nu^2 \cos(y) + \frac{1}{2}x^2$  is

$$\text{grad}(F) = (x, \nu^2 \sin(y)) = (g, -f).$$

Na schaling,  $m l^2 F(x, y) = C' \equiv m l^2 C$ , geldt

$$-gml \cos(y) + \frac{1}{2} m l^2 x^2 = -gml \cos(\phi) + \frac{1}{2} m (\ell \phi')^2 = C' :$$

**potentiële energie + kinetische energie = constant**

Dus  $F(x, y) = C$  is de **Wet van behoud van energie**.



## Hamilton systemen II

$F$  en  $h$  scalair-velden (dwz  $\mathbb{R}$ -waardig) op  $\mathbb{R}^2$ ,  $F$  differentieerbaar

$$\begin{cases} x' = -h(x, y) \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \\ y' = +h(x, y) \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \end{cases} \quad \text{Hamilton systeem}$$

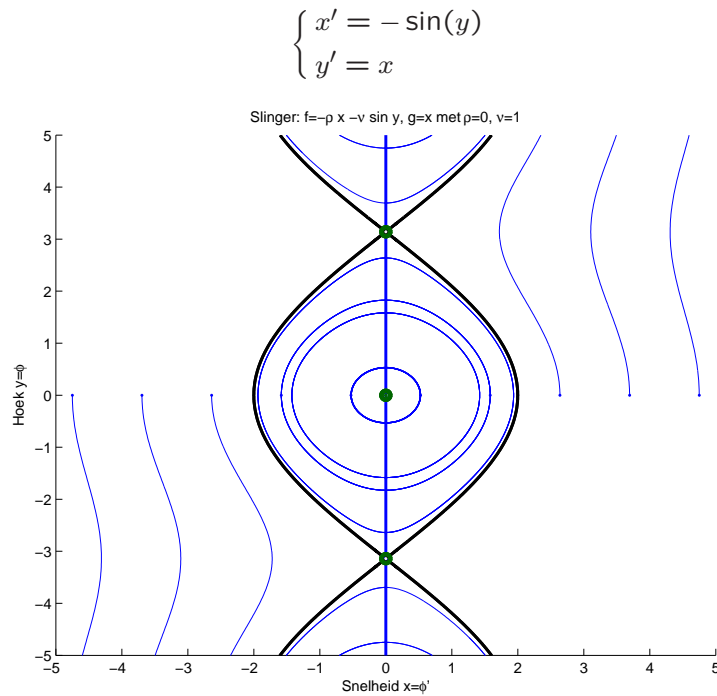
**Stelling.** Voor iedere oplossing  $t \rightsquigarrow (x(t), y(t))$  geldt

$$F(x(t), y(t)) = C \quad \text{voor zekere constante } C.$$

Gegeven  $f$  en  $g$ .

Is er een  $F$  en een zgn **integrerende factor**  $h$  zodat

$$\text{grad}(F) = \left( \frac{g}{h}, -\frac{f}{h} \right)?$$



**Voorbeeld** [Guerilla oorlog]

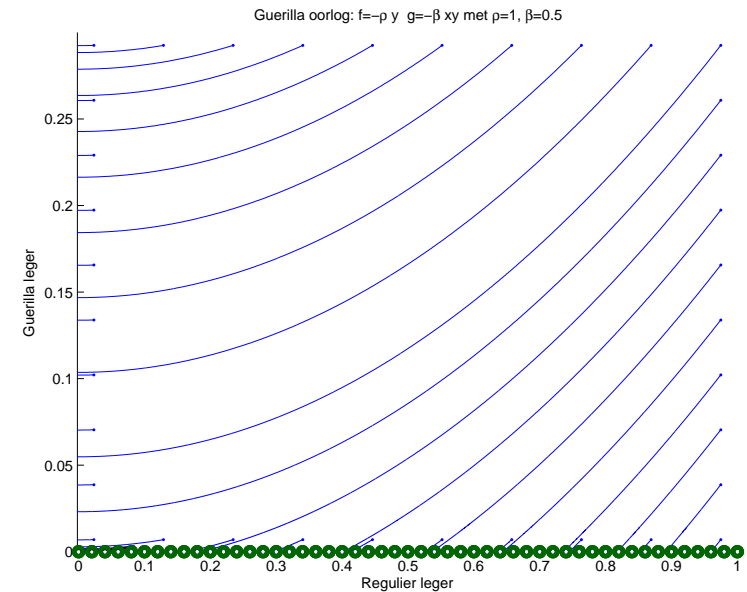
$$\begin{cases} x' = -\alpha y \\ y' = -\beta x y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = -\alpha y = y(-\alpha) \\ y' = -\beta x y = y(-\beta x) \end{cases}$$

Met  $F(x, y) = \alpha y - \frac{1}{2} \beta x^2$  en  $h(x, y) = y$  is

$$\text{grad}(F) = \left( \frac{g}{h}, -\frac{f}{h} \right) = (-\beta x, \alpha).$$

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = -0.5 x y \end{cases}$$



## Epidemie

$x(t)$  is het deel van de bevolking dat op tijdstip  $t$  vatbaar is voor de ziekte maar niet ziek is,  $y(t)$  is het deel dat ziek is.

### Aanname:

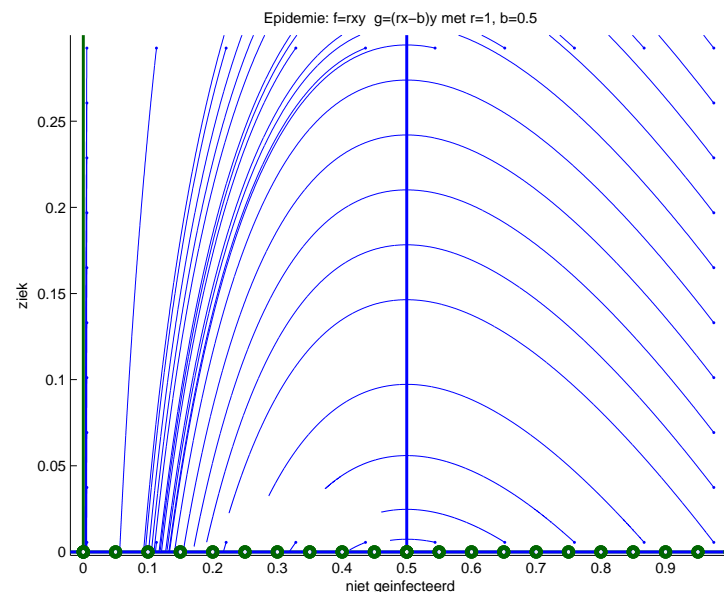
- Mensen die genezen zijn immuun en niet meer besmettelijk.
- Zieken zijn onmiddellijk besmettelijk.
- Het aantal mensen dat per tijdseenheid geneest of sterft is een vast deel van het aantal zieke mensen.
- Het aantal mensen verandert alleen door bezwijken aan de ziekte.

**Model.** Voor zekere  $\rho, \gamma > 0$  geldt

$$\begin{cases} x' = -\rho x y, \\ y' = \rho x y - \gamma y. \end{cases}$$

**Bijzonderheid.**  $(\alpha, 0)$  evenwicht voor alle  $\alpha$ .

$$\begin{cases} x' = -xy \\ y' = xy - \frac{1}{2}y \end{cases}$$



## Brandnetels

In een zeker gebied is  $x(t)$  de gemiddelde hoeveelheid brandnetel op tijdstip  $t$  en  $y(t)$  de gemiddelde hoeveelheid giftige stof in de bodem die door de brandnetels zelf geproduceerd is.

### Aanname:

- De groei van de brandnetels wordt geremd door zijn eigen gif met een evenredigheidsconstante  $c$ .
- In de grond wordt het gif met constante snelheid  $\kappa$  afgebroken.

**Model.** Voor zekere  $a, b > 0$  geldt

$$\begin{cases} x'(t) = (a - cy(t))x(t) \\ y'(t) = bx(t) - K(y(t)), \end{cases} \text{ waarbij } K(y) = \begin{cases} \kappa & \text{als } y > 0 \\ 0 & \text{als } y = 0. \end{cases}$$

**Bijzonderheid.**  $K$  hangt niet continu van  $y$  af.

**Voorbeeld** [Brandnetels]

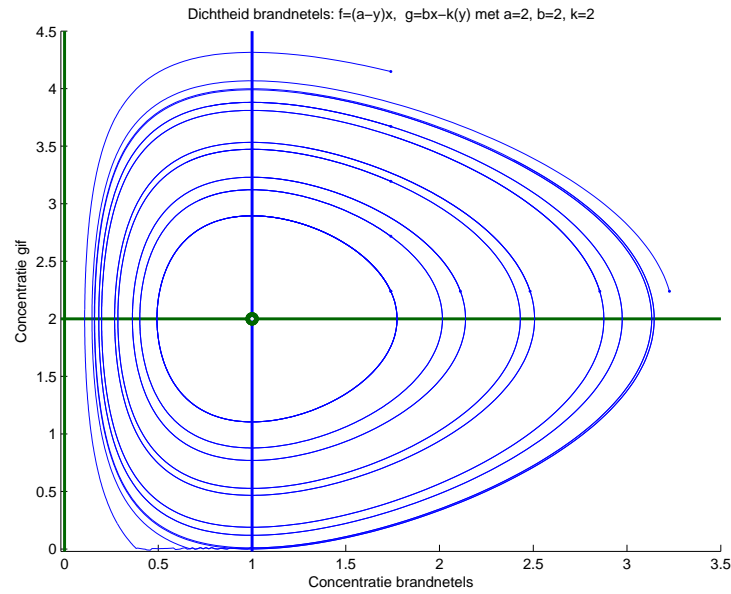
$$\begin{cases} x' = (2 - y)x \\ y' = 2x - K(y) \end{cases} \text{ met } K(y) = \begin{cases} 2 & \text{als } y > 0 \\ 0 & \text{als } y = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = (2 - y)x = x(2 - y) \\ y' = 2x - 2 = x(2 - \frac{2}{x}) \end{cases}$$

Neem  $F(x, y) = -2y + \frac{1}{2}y^2 + 2x - 2 \ln(x)$ , en

$$h(x, y) = x.$$

$$\begin{cases} x' = (2 - y)x \\ y' = 2x - K(y) \end{cases} \quad \text{met} \quad K(y) = \begin{cases} 2 & \text{als } y > 0 \\ 0 & \text{als } y = 0. \end{cases}$$



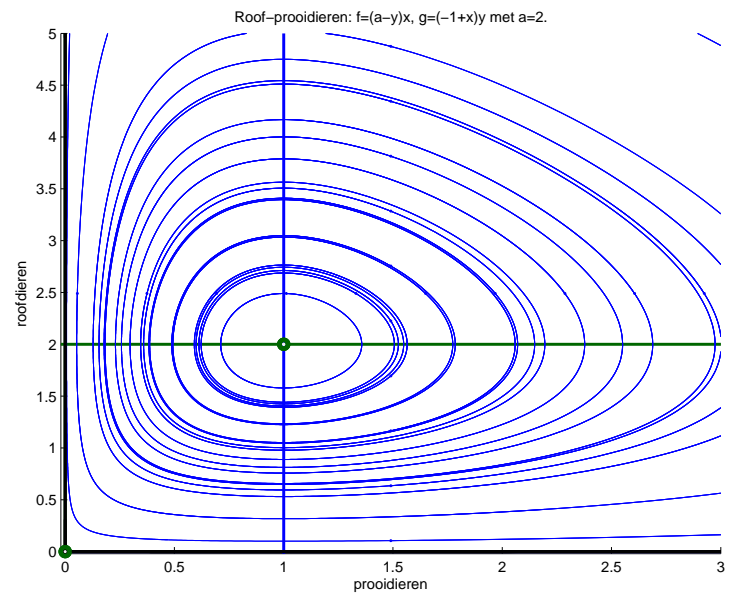
### Voorbeeld [Lotka-Volterra]

$$\begin{cases} x' = (2 - y)x \\ y' = (-1 + x)y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = (2 - y)x = xy \left( \frac{2}{y} - 1 \right) \\ y' = (-1 + x)y = xy \left( -\frac{1}{x} + 1 \right) \end{cases}$$

Neem  $F(x, y) = -2 \ln(y) + y - \ln(x) + x$  en  $h(x, y) = xy$ .

$$\begin{cases} x' = (2 - y)x \\ y' = (-1 + x)y \end{cases}$$



### Voorbeeld [Roof-prooidier]

$$\begin{cases} x' = (2 - x - y)x \\ y' = (-1 + x)y \end{cases}$$

Met  $F(x, y) = ???$  en  $h(x, y) = ???$  is

$$\text{grad}(F) = \left( \frac{g}{h}, -\frac{f}{h} \right)$$

## Hamilton systemen

### Voordelen.

- Theorie geeft een 'globale' uitspraak over de oplossing: het geeft een uitdrukking voor  $y = y(t)$  in termen van  $x(t)$  voor iedere oplossing  $t \rightsquigarrow (x(t), y(t))$ . (De analyse via linearisatie in het evenwicht geeft maar alleen uitspraken in de buurt van het evenwicht).
- Geeft een (exacte) **analytische formule** waaraan de oplossingen voldoen (linearisatie geeft alleen benaderende oplossingen).
- Geeft exacte uitspraken voor 'centrumpuntachtige' oplossingen (situaties waarin de hogere orde termen in het linearisatie proces precies niet verwaarloosd mogen worden).
- Komen in de 'natuur' nogal eens voor. De bewering, 'de oplossingskrommen voldoen aan  $F(x(t), y(t)) = C$  voor alle  $t$ ' verwoordt vaak een **behoudswet** (behoud van energie, **bv** voor de slinger is  $\frac{1}{2}m(\dot{\phi})^2$  de kinetische energy en  $\ell \cos(\phi)$  de potentiële).

### Nadelen.

- Komen welliswaar in de 'natuur' nogal eens voor, maar dan wel vooral in 'model' situaties (met centrumpunt achtige evenwichten).
- De relatie waaraan de oplossing voldoet ( $F(x, y) = C$ ) geeft geen informatie over de tijdsafhankelijkheid.

## Continue modellen: Wat er te doen is

### Lineaire problemen

- homogeen met constante coëfficiënten:  $\mathbf{x}' = \mathbf{A} \mathbf{x}$ ,
- inhomogeen met constante coëfficiënten:  
 $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t)$ ,  
met variabele coëfficiënten:  $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t)$ .

### Niet lineaire problemen

- autonome  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ,
- niet autonome  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ .

### Vertraagde differentiaalvergelijkingen

$$x'(t) = (2 - x(t))x(t - 1).$$

- = uitgebreid behandeld
- = aandacht aan besteed
- = niet gedaan.

4

## Continue modellen: Wat er te doen is

### Partiële differentiaalvergelijkingen

$u(t, x)$  hangt af van het tijdstip tijd  $t$  en de plaats  $x$ .

lineair  $\frac{\partial u}{\partial t} = 2u + a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,

niet-lineair 1  $\frac{\partial u}{\partial t} = (2 - u)u + a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,

niet-lineair 2  $\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ .

### Combinaties van alles & in meer dimensies

### Numerieke methoden

Kies  $h > 0$ . In  $t_{n+1} = t_n + h$

$$\mathbf{x}(t_{n+1}) \approx \mathbf{x}(t_n) + h \mathbf{f}(t_n, \mathbf{x}(t_n)).$$