Utrecht, 13 juni 2013

Modellen en Simulatie
Lineare Programmering

Gerard Sleijpen

Universiteit Utrecht
Department of Mathematics

http://www.staff.science.uu.nl/~sleij101/

Program

dagelijks kunnen verwerkt worden:
480 hammen (H), 400 pork bellies (B), 230 picnic hammen (P
420 kunnen gerookt worden, en met overwerk nog eens 250

Winst per item (in dollars)

	vers	gerookt (regulier)	gerookt (overwerk)
H	8	14	11
B	4	12	7
P	4	13	9

Dagelijkse aantallen (nog te bepalen onbekenden $x_1, \ldots, x_9$)

	vers	gerookt (regulier)	gerookt (overwerk)
H	x_1	x_2	x_3
B	x_4	x_5	x_6
P	x_7	x_8	x_9

Maximaliseer $\quad 8x_1 + 14x_2 + 11x_3 + 4x_4 + \ldots + 9x_9$
onder de beperkingen $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_9 \geq 0$,
$x_1 + x_2 + x_3 = 480,\ x_4 + x_5 + x_6 = 400,\ x_7 + x_8 + x_9 = 230$
$x_2 + x_5 + x_8 \leq 420,\ x_3 + x_6 + x_9 \leq 250$

Voorbeeld.
$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ met $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ (**Lineaire vorm** op $\mathbb{R}^n$)
en $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}_i^\mathsf{T}\mathbf{x} \leq \beta_i$ voor $i = 1, \ldots, m\}$,
waarbij $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ en $\beta_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots. m)$.

Lineair programmering. Los op

max $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ **doel, doelfunctie**
zodat $\mathbf{a}_i^\mathsf{T}\mathbf{x} \leq \beta_i$ voor alle $i = 1, \ldots, m$. **beperkingen**

Stelling. Als 1) $\mathcal{V}$ een hoekpunt heeft en
2) het maximum wordt aangenomen op $\mathcal{V}$
dan wordt het maximum aangenomen in een hoekpunt.

Dieet

m Voedingsstoffen $V_1, \dots, V_m$ (vitaminen, mineralen, koolhydraten, ...). Keuze uit n ingrediënten $I_1, \dots, I_n$.

Aanname:
- Het dagelijkse dieet moet minstens β_i microgram V_i bevatten.
- Een gram van ingrediënt I_j bevat a_{ij} microgram V_i.
- Een gram van ingrediënt I_j kost c_j euro.

Opdracht. Bepaal het goedkoopste dieet waarmee je gezond blijft.

Model. x_j is de dagelijkse hoeveelheid van ingrediënt I_j.
Schrijf $\mathbf{x} \equiv (x_1, \dots, x_n)^\mathsf{T}$, $\mathbf{c} \equiv (c_1, \dots, c_n)^\mathsf{T}$, $\mathbf{a}_i \equiv (a_{i,1}, \dots, a_{i,n})^\mathsf{T}$.

Minimalizeer $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ met $\mathbf{x}$ zo dat $\mathbf{a}_i^\mathsf{T}\mathbf{x} \geq \beta_i \quad (i = 1, \dots, m)$.

Maximalizeer $-\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ met $\mathbf{x}$ zo dat $-\mathbf{a}_i^\mathsf{T}\mathbf{x} \leq -\beta_i \quad (i = 1, \dots, m)$.

Voorbeeld.

$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ met $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ (**Lineaire vorm** op $\mathbb{R}^n$)

en $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}_i^\mathsf{T}\mathbf{x} \leq \beta_i$ voor $i = 1, \dots, m\}$,

waarbij $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ en $\beta_i \in \mathbb{R} \qquad (i = 1, \dots . m)$.

Lineair programmering. Los op

max $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ — **doel, doelfunctie**

zodat $\mathbf{a}_i^\mathsf{T}\mathbf{x} \leq \beta_i$ voor alle $i = 1, \dots, m$. **beperkingen**

Stelling. Als 1) $\mathcal{V}$ een hoekpunt heeft en
2) het maximum wordt aangenomen op $\mathcal{V}$
dan wordt het maximum aangenomen in een hoekpunt.

Terminologie. Punten in $\mathcal{V}$ zijn **acceptabele** punten.

Terminologie. Beschouw een $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ en een $\beta \in \mathbb{R}$.

$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} \leq \beta\}$ is een **halfruimte**,

$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} = \beta\}$ is een **hypervlak**.

Als $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ en $\beta_i \in \mathbb{R}$ dan heet

$$\mathcal{V} \equiv \{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}_i^\mathsf{T}\mathbf{x} \leq \beta_i \ (i = 1, \dots, m)\} = \bigcap_{i=1}^{m} \{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}_i^\mathsf{T}\mathbf{x} \leq \beta_i\}$$

een **polytoop**.
Een **polyeder** of **veelvlak** is een *begrensd* polytoop.

Notatie.

Met $\mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^\mathsf{T} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^\mathsf{T} \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} \equiv \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}$ en $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ als $x_j \leq y_j$ alle j

is $\qquad \mathcal{V} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$

Met $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$ in $\mathbb{R}^n$ is

$$[\mathbf{p}, \mathbf{q}] \equiv \{\alpha\mathbf{p} + (1-\alpha)\mathbf{q} \mid \alpha \in [0,1]\}$$

het **lijnstuk** tussen $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$.

Als $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$, dan bekijken we ook

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \equiv \{\alpha\mathbf{p} + (1-\alpha)\mathbf{q} \mid \alpha \in (0,1)\} .$$

Met $\mathbf{p}_j$ in $\mathbb{R}^n \quad (j = 0, 1, \dots, k)$ is

$$\mathcal{S} \equiv \{\sum_{j=0}^{k} \alpha_j \mathbf{p}_j \mid \alpha_j \geq 0, \sum_{j=0}^{k} \alpha_j = 1\}$$

een polytoop,

Als $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \ \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0, \ \dots, \ \mathbf{p}_k - \mathbf{p}_0$ lineair onafhankelijk zijn dan heet $\mathcal{S}$ een **k-simplex**.

$\mathbf{p}_0 = \mathbf{0}$ en $\mathbf{p}_j = \mathbf{e}_j$ de j-de standaard basis vector $(k = n)$ geeft het **eenheidssimplex** in $\mathbb{R}^n$

Definitie. Een verzameling $\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^n$ is **convex** als

$$\text{voor alle } \mathbf{p},\mathbf{q}\in\mathcal{U} \quad\Rightarrow\quad [\mathbf{p},\mathbf{q}]\subset\mathcal{U}.$$

Stelling. $\mathcal{U}$ en $\mathcal{W}$ convex $\quad\Rightarrow\quad$ $\mathcal{U}\cap\mathcal{W}$ convex.

Stelling. Halfruimtes en hypervlakken zijn convex.

Stelling. Polytopen zijn convex.

Definitie. Zij $\mathcal{U}$ een convexe verzameling.
Een $\mathbf{p}$ in $\mathcal{U}$ is een **hoekpunt** van $\mathcal{U}$ als

$$\mathbf{p}\notin(\mathbf{x},\mathbf{y}) \quad \text{voor alle } \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathcal{U}\ ,\ \mathbf{x}\neq\mathbf{y}.$$

Hoe zie je in hogere dimensies of $\mathbf{p}$ *een hoekpunt is?*

$\mathbf{A}$ is $m\times k$, $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^m$, $k\leq m$, $\quad \mathcal{V}\equiv\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^k \mid \mathbf{A}\mathbf{x}\leq\mathbf{b}\}$.

Terminologie. $\mathbf{p}\in\mathbb{R}^k$ is een **basispunt** voor $\mathcal{V}$ als er een rij I is van k verschillende getallen uit $\{1,2,\ldots,m\}$ waarvoor $\mathbf{A}(I,:)$ inverteerbaar is en $\mathbf{A}(I,:)\mathbf{p}=\mathbf{b}(I)$.

Stelling. $\quad\mathbf{p}\in\mathcal{V}$.
$\mathbf{p}$ is een hoekpunt van $\mathcal{V}$ $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\mathbf{p}$ is een basispunt voor $\mathcal{V}$.

Interpretatie. In de k-dim. ruimte: hoekpunten zijn snijpunten van k hypervlakken $\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^k \mid \mathbf{A}(i,:)\mathbf{x}=\mathbf{b}(i)\}$ (i uit een rij I van k verschillende getallen uit $\{1,\ldots,m\}$).

In 2-d ($k=2$), snijpunten van 2 lijnen.
In 3-d ($k=3$), snijpunten van 3 vlakken.

Opmerking. Als $I=[I',i]$ een rij is van verschillende getallen uit $\{1,\ldots,m\}$ en $\mathbf{A}(I,:)$ heeft niet volle rang, dan is, met $\mathcal{H}(I)\equiv\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^k \mid \mathbf{A}(I,:)\mathbf{x}=\mathbf{b}(I)\}$,

$\mathcal{H}(I')$ parallel aan (een deel van) $\mathcal{H}(i)$.

Lineair programmering. Los op

$$\max\ \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}$$
$$\text{zodat } \mathbf{A}\mathbf{x}\leq\mathbf{b}.$$

Stelling. Als 1) $\mathcal{V}$ een hoekpunt heeft en
2) het maximum wordt aangenomen op $\mathcal{V}$
dan wordt het maximum aangenomen in een hoekpunt.

Oplosmethode.

- Vind een hoekpunt van $\mathcal{V}$
- Herhaal
  - Vind vanuit dat hoekpunt een richting langs de rand van $\mathcal{V}$ waar langs de doelfunctie groter wordt. **Stop** als er niet zo'n richting is.
  - Loop vanuit dat hoekpunt in die richting tot een volgend hoekpunt van $\mathcal{V}$

Stelling. Het hoekpunt waarin gestopt wordt is 'n maximalizerende $\mathbf{x}$ ('n $\mathbf{x}$ die het lp-probleem oplost).

Lineair programmering. Los op

$$\max\ \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}$$
$$\text{zodat } \mathbf{A}\mathbf{x}\leq\mathbf{b}.$$

Lineair programmering in standaardvorm. Los op

$$\max\ \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}$$
$$\text{zodat } \mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b} \text{ en } \mathbf{x}\geq\mathbf{0}.$$

Breng op standaard vorm door

1) **slack** variabelen in te voeren:

Beperking wordt: $\ \mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ met $x_j\geq 0$ alle $j\in J$,

waarbij $\quad J\subset\{1,\ldots,n\}$ en $x_j\in\mathbb{R}$ voor $j\notin J$

2) en de x_j te elimineren waarvoor $j\notin J$

Opmerking. De matrix $\mathbf{A}=\mathbf{A}_{\text{stand}}$ in standaardvorm is geconstrueerd uit de matrix $\mathbf{A}=\mathbf{A}_{\text{lp}}$ voor het algemene LP-probleem. De matrices zijn echter **niet** hetzelfde:

$\mathbf{A}_{\text{lp}}$ is smal en hoog ($m\times k$ met, gewoonlijk, $m>k$),
$\mathbf{A}_{\text{stand}}$ is breed en laag ($\ell\times n$ met, gewoonlijk, $\ell<n$, $m=n=k+\ell$).

Lineair programmering in standaardvorm. Los op

$$\max \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$$
$$\text{zodat } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ en } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Stelling. Als 1) $\mathcal{V} \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ en } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \neq \emptyset$ en
2) maximum $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ wordt aangenomen op $\mathcal{V}$
dan wordt het max. aangenomen in een hoekpunt van $\mathcal{V}$.

Simplex methode.

- Breng het lp-probleem op standaardvorm.
- Vind een hoekpunt van $\mathcal{V}$.
- Herhaal
  - Vind vanuit dat hoekpunt een richting langs de rand van $\mathcal{V}$ waarin de doelfunctie groter wordt. **Stop** als er niet zo'n richting is.
  - Loop vanuit dat hoekpunt in die richting tot een volgend hoekpunt van $\mathcal{V}$

Stelling. Het hoekpunt waarin gestopt wordt is 'n maximalizerende $\mathbf{x}$ ($\mathbf{x}$ lost het lp-probleem in standaardvorm op).

$\mathbf{A}$ is $\ell \times n$, $\ell < n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^\ell$, $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ en } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$.

Terminologie. $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ is een **basispunt** voor $\mathcal{V}$ als er een rij J is van ℓ verschillende getallen uit $\{1, 2, \ldots, n\}$ waarvoor

- $\mathbf{A}(:, J)$ inverteerbaar is,
- $\mathbf{A}(:, J)\mathbf{p}(J) = \mathbf{b}$,
- $\mathbf{p}(j) = 0$ voor iedere $j \notin J$.

Stelling. $\mathbf{p}$ is een hoekpunt van $\mathcal{V}$
$\Leftrightarrow$ $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$ & $\mathbf{p}$ is een basispunt voor $\mathcal{V}$.

Opmerking. Als $\mathbf{p}$ een basispunt is voor $\mathcal{V}$ dan is $\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{A}(:, J)\mathbf{p}(J) = \mathbf{b}$ en dus is $\mathbf{p} \in \mathcal{V}$ als ook nog $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$.

Opmerking. Als J uit minder dan ℓ verschillende getallen bestaat en

- $\mathbf{A}(:, J)$ heeft volle rang,
- $\mathbf{A}(:, J)\mathbf{p}(J) = \mathbf{b}$,
- $\mathbf{p}(j) = 0$ voor iedere $j \notin J$,

en $\mathbf{A}$ heeft rang ℓ (volle rang), dan kan J worden aangevuld tot een basis.

$\mathbf{A}$ is $\ell \times n$, $\ell < n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^\ell$, $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ en } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$.

Met $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ en $M \equiv \max\{\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathcal{V}\}$, zij

$$\mathcal{V}_{\max} \equiv \{\mathbf{x} \in \mathcal{V} \mid \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} = M\} = \left\{\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \;\middle|\; \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{c}^\mathsf{T} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ M \end{bmatrix}\right\}.$$

Door te vegen veranderen $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ en M maar

Stelling. Door te vegen veranderen $\mathcal{V}$ en $\mathcal{V}_{\max}$ niet.

Bewijs. $\mathcal{V}$: merk op dat met $\nu, \alpha \in \mathbb{R}$, $\nu \neq 0$ geldt

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{a}_1^\mathsf{T}\mathbf{x} = \beta_1 \\ \mathbf{a}_2^\mathsf{T}\mathbf{x} = \beta_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{\nu}\mathbf{a}_1^\mathsf{T}\mathbf{x} = \frac{1}{\nu}\beta_1 \\ (\mathbf{a}_2 - \alpha\mathbf{a}_1)^\mathsf{T}\mathbf{x} = \beta_2 - \alpha\beta_1 \end{array}\right. \qquad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n).$$

Als (i_0, j_0) de pivot is in een veegstap dan is bovenstaande van toepassing met $\mathbf{a}_1^\mathsf{T} = \mathbf{A}(i_0, :)$ en $\mathbf{a}_2^\mathsf{T}$ 'n andere rij van $\mathbf{A}$.

$\mathcal{V}_{\max}$: behandel (de onbekende) M als een getal en pas het resultaat toe met $\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{c}^\mathsf{T} \end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ M \end{bmatrix}$ in plaats van $\mathbf{A}$, resp. $\mathbf{b}$.

Zij $\mathbf{A}$ een $\ell \times n$ matrix van volle rang, $\ell < n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^\ell$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

$$\text{(B)} \left\{\begin{array}{l} J \text{ rij van } \ell \text{ verschillende getallen uit } \{1, 2, \ldots, n\} \\ \text{zodat } \mathbf{A}(:, J) = \mathbf{I}_\ell,\ \mathbf{c}(J) = \mathbf{0},\ \mathbf{b} \geq 0 \end{array}\right.$$

Herhaal

- Als $\mathbf{c} \leq \mathbf{0}$ dan, **succes=true**, **stop**
  anders, kies j_0 zodat $\mathbf{c}(j_0) > 0$
- Als $\mathbf{A}(:, j_0) \leq \mathbf{0}$ dan, **succes=false**, **stop**
  anders, $i_0 \equiv \text{argmin}_i\{\mathbf{b}(i)/\mathbf{A}(i, j_0) \mid \mathbf{A}(i, j_0) > 0\}$
- Vervang het i_0-de getal van J door j_0
- Veeg met (i_0, j_0) als pivot
  (veeg $\mathbf{b}$, $M - \mu$ en $\mathbf{c}$ mee)

einde herhaal
$\mathbf{h}(J) = \mathbf{b}$, $\mathbf{h}(j) = 0$ als $j \notin J$.
Als **succes** dan $\mathbf{x}_{\text{opl}} = \mathbf{h}$, $M = \mu$, anders $M = \infty$.

Bewering. Als $M < \infty$ dan is de gevonden $\mathbf{x}_{\text{opl}}$ een hoekpunt dat het probleem oplost ($\mathbf{x}_{\text{opl}}$ is een maximaliserende vector in $\mathcal{V}$: $\mathbf{x}_{\text{opl}} = \text{argmax}\{\mathbf{c}_{\text{oor}}^\mathsf{T}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathcal{V}\}$ waarbij $\mathbf{c}_{\text{oor}}$ de oorspronkelijke vector $\mathbf{c}$ is).

Voorbeeld.

2	3	10	1	0	0	5
4	1	2	0	1	0	11
3	4	16	0	0	1	8
5	4	26	0	0	0	M

$\mathbf{b} \geq 0$,
$J = [4, 5, 6]$.

2	3	10	1	0	0	5
4	1	2	0	1	0	11
3	4	16	0	0	1	8
5	4	26	0	0	0	M

Kies $j_0 = 1$ (of 2 of 3).
Minimum $[5/2, 11/4, 8/3]$ voor $i_0 = 1$.
Nieuwe $J = [1, 5, 6]$.
Veeg met pivot $(i_0, j_0) = (1, 1)$.

1	1.5	5	0.5	0	0	2.5
0	−5	−18	−2	1	0	1
0	−0.5	1	−1.5	0	1	0.5
0	−3.5	1	−2.5	0	0	$M - 12.5$

Kies $j_0 = 3$.
Min. $[5/2.5, *, 0.5]$ voor $i_0 = 3$ (of
Nieuwe $J = [1, 5, 3]$.
Veeg met pivot $(i_0, j_0) = (3, 3)$.

1	4	0	8	0	−5	0
0	−14	0	−29	1	18	10
0	−0.5	1	−1.5	0	1	0.5
0	−3	0	−1	0	−1	$M - 13$

Geen verbetering meer mogelijk.

$J = [1, 5, 3]$, $M = 13$,

$\mathbf{x}_{\text{opl}}(J) = \mathbf{h}(J) = (0, 10, 0.5)^{\mathsf{T}}$, $\mathbf{x}_{\text{opl}} = (0, 0, 0.5, 0, 10, 0)^{\mathsf{T}}$.

$x_j \equiv \mathbf{x}_{\text{opl}}(j)$ *aflezen uit de "eindtabel" is gemakkelijk:*

als $j \notin J$ dan is $x_j = 0$, anders
loop in de $j$de-kolom naar de rij met de 1 en x_j is de $\mathbf{b}(i)$ in die rij.

Minder dan n positiviteitsrestricties

Wat doen we als er **geen** *positiviteitsrestrictie zit op k van de n coördinaten x_j van* $\mathbf{x}$*?*

- Hernummer de x_j zodat $x_j \geq 0$ voor alle $j = k+1, \ldots, n$.
- Elimineer $x_1, \ldots, x_k$.

Vb.

1	4	3	3	1	0	0	0	2
1	3	−1	1	0	1	0	0	−2
1	2	3	2	0	0	1	0	3
1	3	−2	1	0	0	0	1	−3
3	1	4	2	0	0	0	0	M

$x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ \ldots,\ x_8 \geq 0$

1	0	−13	−5	−3	4	0	0	−14
0	1	4	2	1	−1	0	0	4
0	0	10	3	1	0	1	−2	11
0	0	1	0	0	1	0	−1	1
0	0	−30	−9	0	0	−8	5	$M - 39$

$J = [3, 4]$
$j_0 = 6$
er is geen i_0

Conclusie. $\mathbf{x} = (x_1, x_2, 0, 0, 11 + 2\alpha, 1 + \alpha, 0, \alpha)^{\mathsf{T}}$
is feasible voor iedere $\alpha \geq 0$. I.h.b., $x_3 = x_4 = 0$.
Dus $x_1 = -14 + 3x_5 - 4x_6 = 15 + 2\alpha$
en $x_2 = 4 - x_5 + x_6 = -6 - \alpha$.
Dus is $\mathbf{x} = (15 + 2\alpha, -6 - \alpha, 0, 0, \ldots)^{\mathsf{T}}$ feasible $(\alpha \geq 0)$
(controleer door invullen) en

$$3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 39 + 5\alpha \to \infty = M \text{ voor } \alpha \to \infty$$

Het vinden van het 1ste hoekpunt

$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\text{stand}}$ is $\ell \times n$, $\ell < n$, $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ en } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$

Stel $\mathbf{A}$ komt van een $\ell \times k$ matrix $\mathbf{A}_{\text{oor}}$ door toevoegen van ℓ slack variabelen $(n = \ell + k)$: $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{\text{oor}}, \mathbf{I}_\ell]$.
En stel

$\mathbf{0}_k \equiv (0, 0, \ldots, 0)^{\mathsf{T}}$ is een aanvaardbaar punt voor het oorspronkelijke ℓ bij k probleem

Dan is
- $J_1 = [k + 1, \ldots, k + \ell]$ een basis,
- $\mathbf{h}_1 \equiv (\mathbf{0}_k^{\mathsf{T}}, \mathbf{b}^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} \geq \mathbf{0}$, en
- $\mathbf{h}_1$ is een hoekpunt van $\mathcal{V}$.

Conclusie. $\mathbf{h}_1$ is een geschikt eerste hoekpunt.

Het vinden van het 1ste hoekpunt

$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\text{stand}}$ is $\ell \times n$, $\ell < n$, $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$

- Vind basispunt $\mathbf{p}$: vind 'n rij J van ℓ getallen waarvoor
  $\mathbf{p}(j) = 0$ als $j \notin J$,
  rang$(\mathbf{A}(:, J)) = \ell$ en $\mathbf{A}(:, J)\mathbf{p}(J) = \mathbf{b}$.

Stel $\mathbf{p}$ is **niet** aanvaardbaar.

- Veeg zo dat $\mathbf{A}(:, J) = \mathbf{I}_\ell$. $\mathbf{1}$ is de ℓ-vector $(1, 1, \ldots, 1)^{\mathsf{T}}$.
- Zij $i_0 \equiv \text{argmin}_i \mathbf{b}(i)$.

Alternatief probleem (+). Maximaliseer $(-z)$,

$$\text{zodat} \quad [\mathbf{A}, -\mathbf{1}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{b} \quad \text{en} \quad \mathbf{x} \geq 0,\ z \geq 0.$$

Voor $(+)$ is $\mathbf{h}_0^+$ een aanvaardbaar hoekpunt.

Los $(+)$ op met de simplexmethode met start $\mathbf{h}_0^+$.

Het vinden van een basis(punt)

$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\text{stand}}$ is ℓ bij n, $\ell < n$. $\quad \mathcal{V} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$

- Vind basispunt $\mathbf{p}$: vind 'n rij J van ℓ getallen waarvoor
  $\mathbf{p}(j) = 0$ als $j \notin J$,
  rang$(\mathbf{A}(:, J)) = \ell$ en $\mathbf{A}(:, J)\mathbf{p}(J) = \mathbf{b}$.

Hoe vind je een J met ℓ elementen zodat $\mathbf{A}(:, J)$ volle rang heeft?

Kies J en veeg.

Het vinden van het 1ste hoekpunt

$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\text{stand}}$ is $\ell \times n$, $\ell < n$, $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$

- Vind basispunt $\mathbf{p}$: vind 'n rij J van ℓ getallen waarvoor
  $\mathbf{p}(j) = 0$ als $j \notin J$,
  rang$(\mathbf{A}(:, J)) = \ell$ en $\mathbf{A}(:, J)\mathbf{p}(J) = \mathbf{b}$.

Stel $\mathbf{p}$ is **niet** aanvaardbaar.

- Veeg zo dat $\mathbf{A}(:, J) = \mathbf{I}_\ell$. $\mathbf{1}$ is de ℓ-vector $(1, 1, \ldots, 1)^{\mathsf{T}}$.
- Zij $i_0 \equiv \text{argmin}_i \mathbf{b}(i)$.

Alternatief probleem (+). Maximaliseer $(-z)$,

$$\text{zodat} \quad [\mathbf{A}, -\mathbf{1}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{b} \quad \text{en} \quad \mathbf{x} \geq 0,\ z \geq 0.$$

Stelling. $\mathcal{V} \neq \emptyset \ \Rightarrow \mathcal{V}$ heeft minstens een hoekpunt dat bovendien gevonden wordt door de simplexmethode.

Bewijs. De simplexmethode vindt een hoekpunt van $\mathcal{V}^+$, zeg $\mathbf{h}_1^+$. $\mathbf{h}_1^+$ is van de vorm $\mathbf{h}_1^+ = (\mathbf{h}_1^{\mathsf{T}}, z)^{\mathsf{T}}$ en $z = 0$ (zie vorige stelling). Dus is $\mathbf{h}_1$ is een hoekpunt $\mathcal{V}$.

Voorbeeld.

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 3 \end{array} \qquad \mathbf{x} \geq 0$$

Met $J = [1, 2]$ heeft $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ heeft volle rang.

Veeg kolom 1 en 2:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2.5 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -0.5 & 1 & -1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \mathbf{p} = (6, -1, 0, 0)^{\mathsf{T}} \\ \text{is een basispunt.} \end{array}$$

$$i_0 \equiv \text{argmin}_i \mathbf{b}(i) = 2 \quad \text{en} \quad \rho \equiv -\mathbf{b}(i_0) = 1.$$

$$\mathbf{h}_0^+ \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{p} + \rho \mathbf{1}_J \\ \rho \end{bmatrix} = (7, 0, 0, 0, 1)^{\mathsf{T}}$$

Pas nu de simplexmethode toe op $[\mathbf{A}, -\mathbf{1}]$ en $\mathbf{c} = -\mathbf{e}_{n+1}$ om een aanvaardbaar basispunt te construeren.

Voorbeeld.

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 3 \end{array} \qquad \mathbf{x} \geq 0$$

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2.5 & -3 & \boxed{-1} & 6 \\ 0 & 1 & -0.5 & 1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & M \end{array}$$

$\mathbf{h}_0^+ \equiv (7,0,0,0,1)^\top$
is 'n acceptabele hoek.
Veeg met pivot $(i_0, n+1) = (2,5)$.
Vervang i_0-de getal $J = [1,2]$
door $n+1$: $J \leftarrow [1,5]$

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 3 & -4 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & \boxed{0.5} & -1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 0.5 & -1 & 0 & M+2 \end{array}$$

$j_0 = 3$
min. $[7/3, 1/0.5]$ voor $i_0 = 2$,
Veeg met pivot $(i_0, j_0) = (2,3)$.
Vervang i_0-de getal $J = [1,5]$
door j_0: $J \leftarrow [1,3]$

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 5 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & M \end{array}$$

Geen verbetering mogelijk:
$J = [1,3]$

$z = -1 \cdot x_5$ max. voor $z = x_5 = 0 \;\Rightarrow\; M = 0$ en $\mathbf{x}_{\text{opl}}^\top = (1,0,2,0,0)^\top$.

$\mathbf{h}_1 \equiv (1,0,2,0)^\top$ hoekpunt voor $\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 3 \end{array}$, $\quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

Voorbeeld.

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ \hline 1 & -7 & 3 & 2 & M \end{array}$$

$\mathbf{h}_1 \geq 0$
$J = [1,3]$

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 5 & 0 & \boxed{2} & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 2 \\ \hline 0 & -6 & 0 & 6 & M-7 \end{array}$$

$j_0 = 4$,
min. $[1/2, *]$ voor $i_0 = 1$,
Vervang i_0-de getal J door j_0:
$J \leftarrow [4,3]$

$$\begin{array}{rrrr|r} 0.5 & 2.5 & 0 & 1 & 0.5 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ \hline -3 & -21 & 0 & 0 & M-10 \end{array}$$

Geen verbetering mogelijk

$J = [4,3]$, $\quad \mathbf{x}_{\text{opl}} = (0,0,3,0.5)^\top$, $\quad M = 10$.