Utrecht, 20 juni 2012

Modellen en Simulatie
Speltheorie

Gerard Sleijpen

Universiteit Utrecht
Department of Mathematics

http://www.staff.science.uu.nl/~sleij101/

Program

- Optimaliseren
- Nul-som matrix spel
- Spel strategie
- Gemengde strategiën
- Minimax stelling
- Het vinden van de optimale strategie
- Verdere ontwikkelingen
- Bewijs van de minimax stelling

Prisoner's dilemma

[Wikipedia] Er is een ernstig misdrijf gepleegd. Twee gewapende mannen worden gepakt en het staat wel vast dat het de daders zijn, maar het bewijs ontbreekt. Ze worden apart in de cel gezet en kunnen niet met elkaar communiceren. De rechter doet elke verdachte het volgende voorstel:

1. Als jullie allebei blijven zwijgen, kan ik jullie niet veel maken. Je krijgt dan alleen een lichte straf wegens wapenbezit zonder vergunning.
2. Als er een bekent, is de zaak rond. Degene die bekende zal ik vrijspreken omdat hij zo goed heeft meegewerkt. Degene die niet bekende kan minstens tien jaar verwachten.
3. Als jullie allebei bekennen, krijgen jullie allebei vijf jaar.

De vraag is: wat kan een gevangene het beste doen?

De essentie van het dilemma is dat het voor beide verdachten (voor persoon **x** en persoon **y**) samen beter is te zwijgen, maar elke verdachte denkt alleen aan zijn eigen voordeel. Ongeacht wat de ander doet, het is voor elke verdachte beter te bekennen.

In de tabel staat alleen wat de persoon **x** krijgt:

	y zwijgt	**y** bekent
x zwijgt	Geldboete	Tien jaar
x bekent	vrij	Vijf jaar

Vervoer

[Wikipedia] In deze situatie gaan mensen op hetzelfde moment naar hun werk. Je kunt de bus nemen of de auto, maar de bus duurt tien minuten langer doordat je naar de bushalte moet lopen. Als meer mensen de auto nemen ontstaat er een file, en daar heeft de bus ook last van.

In de tabel staat het effect voor de "ik-persoon":

	Iedereen neemt de bus	Iedereen neemt de auto
Ik neem de bus	Duurt 20 minuten	Duurt 130 minuten
Ik neem de auto	Duurt 10 minuten	Duurt 120 minuten

$$\begin{bmatrix} 20 & 130 \\ 10 & 120 \end{bmatrix}$$

Adverteren

[Wikipedia] Een dorp heeft twee bakkers. Elke bakker heeft de helft van het dorp als klant. Een bakker kan meer klandizie krijgen door te adverteren. Dat kost geld, maar daar staat de klandizie tegenover.

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Twee persoons matrix spellen

Speler **x** kan uit m strategiën kiezen,
speler **y** kan uit n strategiën kiezen.

Een $m \times n$ matrix **A** beschrijft de verdienste bij gekozen strategiën: als speler **x** strategie i kiest en speler **y** kiest strategie j dan is $\mathbf{A}(i,j)$ een getal dat de verdienste van speler **x** representeert. **A** is de **payoff matrix** voor speler **x**.

De spelers weten wat de diverse strategiën opleveren (zowel voor zichzelf, als voor de concurrent; **A** is bekend), maar weten niet welke strategie de ander speler kiest.

In een **twee persoons matrix spel** is een (bekende) matrix **A** beschikbaar en kiest speler **x** een rij en speler **y** kiest een kolom. De keuzes worden onafhankelijk van elkaar gemaakt.

Nul-som matrix spel

In een **nul-som** matrix spel tellen winst en verlies van beide spelers bij iedere strategie op tot nul.

De theorie de wij hier behandelen betreft:
twee persoons nul-som matrix spellen.

De payoff matrix **A** *is bekend. Wat is de beste strategie?*

Voorbeeld 1. Speler **X (Rood)** kiest de rijen,
en speler **Y (Groen)** kiest de kolommen

Payoff matrix voor **X**:

X \ Y	1	2	3
1	+25	+15	+20
2	+30	+10	−20

Beste (minste risico's) strategie voor **X**: **rij 1**
Beste (minste risico's) strategie voor **Y**: **kolom 2**.

Strategie $(1, 2)$ is optimaal:
- als alleen **Y** van strategie verandert, verliest hij meer,
- als alleen **X** verandert, verdient hij minder:

strategie $(1, 2)$ is hier een **Nash evenwicht**.
15 is de **waarde** van het spel.

$(1, 2)$ is een **zadelpunt** van **A**.

X: $15 = \max_i \min_j \mathbf{A}(i,j)$; $\quad 1 = \text{argmax}_i \min_j \mathbf{A}(i,j)$
Y: $15 = \min_j \max_i \mathbf{A}(i,j)$; $\quad 2 = \text{argmin}_j \max_i \mathbf{A}(i,j)$.

Voorbeeld 2. **X** kiest rijen, **Y** kiest kolommen.

Payoff matrix voor **X**:

X \ Y	1	2	3
1	+30	−10	+20
2	+10	+20	−20

Beste (minste risico's) strategie voor **X**: **rij 1**.
Beste (minste risico's) strategie voor **Y**: **kolom 3**.

Als **Y** verandert, kan hij verdienen,
Strategie $(1, 3)$ is hier geen **Nash evenwicht**.

A heeft geen **zadelpunt**.

John von Neumann [1928]: als je het spel vaak speelt dan biedt een **gemengde strategie** (iedere 'zet' kies je met een zekere kans) een oplossing.

Voorbeeld 2. **X** kiest rijen, **Y** kiest kolommen.

Payoff matrix voor **X**:

X \ Y	1	2	3
1	+30	−10	+20
2	+10	+20	−20

Strategie voor **X**: kies rij **1** met kans $\frac{4}{7}$ en rij **2** met kans $\frac{3}{7}$. $\mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} \end{bmatrix}$

Strategie voor **Y**: kies kolom **1** met kans 0, kolom **2** met kans $\frac{4}{7}$, kolom **3** met kans $\frac{3}{7}$. $\mathbf{y} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} \end{bmatrix}$

$$-10 = \max_i \min_j \mathbf{A}(i,j) < \tfrac{20}{7} < \min_j \max_i \mathbf{A}(i,j) = 20$$

Straks zullen we zien dat deze specifieke strategiën optimaal zijn: als één van de spelers afwijkt van deze strategie dan gaat hij er niet op vooruit: $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ is een **Nash evenwicht**.

Gemengde strategiën

Als de $m \times n$ matrix $\mathbf{A}$ de payoff matrix van **X**.

X kiest voor een **gemengde strategie** $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)^\top$ als $\mathbf{x}$ een kansvector is ($x_i \geq 0$ en $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1$) en **X** de **zuivere strategie** i (d.w.z., de i-de rij van $\mathbf{A}$) kiest met kans x_i.

Als **X** de gemengde strategie $\mathbf{x}$ kiest en **Y** kiest $\mathbf{y}$, dan is de **verwachte uitbetaling** (gemiddeld per keer bij vaak spelen) voor **X** gelijk aan $\mathbf{x}^\top\mathbf{A}\mathbf{y}$ en voor **Y** gelijk aan $-\mathbf{x}^\top\mathbf{A}\mathbf{y}$.

Als **X** strategie $\mathbf{x}$ speelt dan krijgt **X** minimaal

$$\min_{\mathbf{y}} \mathbf{x}^\top\mathbf{A}\mathbf{y}$$

uitbetaalt (gemiddeld per keer, bij vaak spelen).

Gemengde strategiën

Als de $m \times n$ matrix $\mathbf{A}$ de payoff matrix van **X**.

X kiest voor een **gemengde strategie** $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)^\top$ als $\mathbf{x}$ een kansvector is ($x_i \geq 0$ en $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1$) en **X** de **zuivere strategie** i (d.w.z., de i-de rij van $\mathbf{A}$) kiest met kans x_i.

Speler **X** zal proberen zijn gegarandeerde uitbetaling te maximaliseren:

De optimale (minste risico's) gemengde strategie $\mathbf{x}_0$ voor **X** ("**rij**-selectie-strategie") is

$$\mathbf{x}_0 = \operatorname{argmax}_{\mathbf{x}} \min_{\mathbf{y}} \mathbf{x}^\top\mathbf{A}\mathbf{y}$$

waarbij het minimum en maximum genomen is over alle kansvectoren $\mathbf{y}$, respectievelijk $\mathbf{x}$.

Een minimax stelling

$\mathbf{A}$ is een $m \times n$ matrix.

Hieronder zijn $\mathbf{x}$ m-kansvectoren en $\mathbf{y}$ n-kansvector.

Stelling. $w \equiv \max_{\mathbf{x}} \min_{\mathbf{y}} \mathbf{x}^\top\mathbf{A}\mathbf{y} = \min_{\mathbf{y}} \max_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^\top\mathbf{A}\mathbf{y}$

w is de **waarde** van het spel.

Hoe vinden we de optimale strategiën,
dwz, de kansvectoren $\mathbf{x}_0$ *en* $\mathbf{y}_0$ *die de* max min, *resp.* min max *realiseren?*

Middels de simplexmethode.

Optimale rij-selectie

Beschouw een m-kansvector $\mathbf{x}_0 = (x_1, \ldots, x_m)^\top$.

Stelling. $\min_{\mathbf{y}} \mathbf{x}_0^\top \mathbf{A}\mathbf{y} = \min_j \mathbf{x}_0^\top \mathbf{A}\mathbf{e}_j = \min_j \sum_{i=1}^m x_i a_{ij}$

Bewijs. Met $\mathbf{c}^\top \equiv -\mathbf{x}_0^\top \mathbf{A}$, hebben we dat

$$\min_{\mathbf{y}} \mathbf{x}_0^\top \mathbf{A}\mathbf{y} = -\max_{\mathbf{y}} \mathbf{c}^\top \mathbf{y}$$

en het minimaliseringsprobleem ziet er uit als:

$$\begin{cases} \max \mathbf{c}^\top \mathbf{y} \\ \mathbf{1}^\top \mathbf{y} = 1, \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

Dit is een LP in standaardvorm! :-)

$\Rightarrow$ Maximimum in hoekpunt $\Leftrightarrow$ Max. in $\mathbf{y} = \mathbf{e}_j$ zekere j.

Optimale rij-selectie

Beschouw een m-kansvector $\mathbf{x}_0 = (x_1, \ldots, x_m)^\top$.

Stelling. $\min_{\mathbf{y}} \mathbf{x}_0^\top \mathbf{A}\mathbf{y} = \min_j \mathbf{x}_0^\top \mathbf{A}\mathbf{e}_j = \min_j \sum_{i=1}^m x_i a_{ij}$

Conclusie. Een optimale strategie $\mathbf{x}_0 = (x_1, \ldots, x_m)^\top$

$$\text{maximaliseert} \quad \min_j \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \quad \text{zodat}$$

$$\mathbf{1}^\top \mathbf{x} = 1 \text{ en } \mathbf{x} \geq 0.$$

Equivalente formulering:

$$\text{maximaliseer } z \quad \text{zodat}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \geq z \quad \text{voor} \quad j = 1, \ldots, n, \\ \mathbf{1}_m^\top \mathbf{x} = 1 \text{ en } \mathbf{x} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{maximaliseer } z \quad \text{zodat} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{1}_m^\top & \mathbf{0}_n^\top & 0 \\ -\mathbf{A}^\top & \mathbf{I}_n & \mathbf{1}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{s} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0}_n \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

Voorbeeld. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 30 & -10 & 20 \\ 10 & 20 & -20 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -30 & -10 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & -20 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -20 & 20 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & M \end{array} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

Geen positiviteits restrictie op z: elimineer z.

$$\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -30 & -10 & 1 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 10 & -20 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -20 & 20 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & M \end{array} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

Geen positiviteits restrictie op z: elimineer z.

$$\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -30 & -10 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 40 & -10 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 30 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 30 & 10 & -1 & 0 & 0 & 0 & M \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 40 & -10 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 30 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 30 & 10 & -1 & 0 & 0 & M \end{array}$$

$\mathbf{h}_0 = (1, 0, 40, 0, 30)^\top$ is een hoekpunt
Vereenvoudig kolom 1,3 en 5

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 50 & 1 & -1 & 0 & 40 \\ 0 & \boxed{70} & 0 & -1 & 1 & 30 \\ \hline 0 & 30 & 0 & -1 & 0 & M - 30 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{70} & 0 & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} & -\frac{5}{7} & \frac{130}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{70} & \frac{1}{70} & \frac{3}{7} \\ \hline 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{7} & -\frac{1}{70} & * \end{array}$$

klaar: $x_1 = \frac{4}{7}$, $x_2 = \frac{3}{7}$ (met slacks $x_3 = \frac{130}{7}$, $x_4 = 0$).
Invullen in magenta levert $z = \frac{20}{7}$.

Optimale kolom-selectie

We hebben gezien hoe we een optimale rij-selectie-strategie $\mathbf{x}_0$ (die $\min_{\mathbf{y}} \mathbf{x}_0^\top \mathbf{A}\mathbf{y}$ maximaliseert) kunnen uitrekenen. Een optimale kolom-selectie-strategie $\mathbf{y}_0$ maximaliseert

$$\min_{\mathbf{x}} -\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{y}_0 = \min_{\mathbf{x}} \mathbf{y}_0^\top(-\mathbf{A}^\top)\mathbf{x}$$

en kan dus op exact dezelfde manier uitgerekend worden als $\mathbf{x}_0$: we hoeven slechts $\mathbf{A}$ te vervangen door $-\mathbf{A}^\top$ (en de dimensies aan te passen):

$$\begin{cases} \text{maximaliseer } z \quad \text{zodat} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{1}_n^\top & \mathbf{0}_m^\top & 0 \\ \mathbf{A} & \mathbf{I}_m & \mathbf{1}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{s} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0}_m \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

Optimale kolom selectie, II

Als we de waarde w van het spel kennen (omdat we $\mathbf{x}_0$ uitgerekend hebben), dan geldt voor $\mathbf{y}_0$ ook dat

$$\max_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{y}_0 = \max_i \mathbf{e}_i^\top \mathbf{A}\mathbf{y}_0 = w.$$

Dus $\qquad \mathbf{A}\mathbf{y}_0 \leq w\mathbf{1}, \quad \mathbf{1}_n^\top \mathbf{y}_0 = 1, \quad \mathbf{y}_0 \geq \mathbf{0}$:

we zijn op zoek naar een acceptabel (feasible) punt.

In standaard vorm, 'n $(\mathbf{y}^\top, \mathbf{s}^\top)^\top$ zodat

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1}_n^\top & \mathbf{0}_m^\top \\ \mathbf{A} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ w\mathbf{1}_m \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}.$$