1. Numeriek differentiëren. We bekijken een funktie f die gedefinieerd is op $[a,b]$.
Definieer recursief, voor $k=2,3,\ldots$, de k-**de gedeelde differentie**

$$f[x_i,x_{i+1},\ldots,x_{i+k}]\equiv \\ k\,\frac{f[x_{i+1},x_{i+2},\ldots,x_{i+k}]-f[x_i,x_{i+1},\ldots,x_{i+k-1}]}{x_{i+k}-x_i},$$

waarbij

$$f[x_i,x_{i+1}]\equiv\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}.$$

STELLING 1.1. *Als π een permutatie is van $\{0,1,\ldots,k\}$ dan*

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_k]=f[x_{\pi(0)},x_{\pi(1)},\ldots,x_{\pi(k)}].$$

Verder geldt, als $f\in C^{(k)}([a,b])$, dat

$$f[x_0,\ldots,x_k]=f^{(k)}(\xi)\quad \textit{voor zekere } \xi \textit{ tussen}\quad x_0,\ldots,x_k,$$

en als $f\in C^{(k+2)}([a,b])$ dan geldt, met $h\equiv\max\{|x_j-x_i|\mid i,j=0,\ldots,k\}$, dat

$$f[x_0,\ldots,x_k]=f^{(k)}\left(\frac{x_0+\ldots+x_k}{k+1}\right)+\mathcal{O}(h^2)\qquad(h\to 0).$$

De laatste uitspraak in de stelling volgt uit het volgende lemma door voor f een Taylor polynoom benadering te nemen, de eerste en de tweede uitspraak bewijzen we later (zie 2.4 en 2.3).

LEMMA 1.1. *Als p een polynoom is van graad $\leq k+1$ dan*

$$p[x_0,\ldots,x_k]=p^{(k)}\left(\frac{x_0+\ldots+x_k}{k+1}\right).$$

Bewijs. De polynomen $p_0\equiv 1$, $p_j(x)\equiv(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{j-1})$ vormen, voor $j=1,\ldots,k+1$, een basis voor ruimte van alle polynomen van graad $\leq k+1$. Voor p_k en p_{k+1} gaat men, door uitschrijven, na dat de uitspraak klopt. Voor p_j met $j<k$ volgt de uitspraak middels een induktie argument. $\square$

Stel nu dat de f-waarden met een fout ε belast zijn: we rekenen met $f^\star$ waarbij

(0.1) $$f^\star(x) = f(x) + \varepsilon(x), \quad \text{voor alle} \quad x \in [a, b].$$

Van $\varepsilon(x)$ weten we dat

$$|\varepsilon(x)| \leq \overline{\varepsilon} \quad \text{voor alle} \quad x \in [a, b] \tag{0.2}$$

en kennen we de waarde $\overline{\varepsilon}$: $\overline{\varepsilon}$ is de onbetrouwbaarheid in de f-waarden. Verder weten we niets (of wensen we niets te weten) over de 'numerieke ruis' ε.

STELLING 1.2. *Stel dat de x_i* equidistant *verdeeld liggen, d.w.z. voor zekere $h > 0$ geldt $x_i = x_0 + ih$ voor $i = 1, \ldots, k$. Dan geldt*

$$|f^\star[x_0, \ldots, x_k] - f[x_0, \ldots, x_k]| \leq \frac{2^k}{h^k}\,\overline{\varepsilon}. \tag{0.3}$$

De schatting is scherp *in de volgende zin: er is een funktie ε die aan* (0.2) *voldoet en waarvoor in* (0.3) *het de ongelijkheid in feite een gelijkheid is.*

2. Interpolatie. De rij $\mathbf{x} \equiv (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ van punten x_i in $[a, b]$ is zo genummerd dat

$$x_i = x_{i+j} \quad \text{voor} \quad j = 1, \ldots, d \quad \text{als} \quad x_i = x_{i+d}. \tag{0.1}$$

We zeggen dat $f = g$ **op de rij x** als voor iedere $i = 0, \ldots, n$ geldt

$$f(x_i) = g(x_i) \quad \text{en} \quad f^{(j)}(x_i) = g^{(j)}(x_i) \ \text{voor iedere } j \text{ waarvoor } x_i = x_{i+j}.$$

De funkties f en g moeten in de relavante punten x_i voldoende vaak differentieerbaar zijn.

Het volgende lemma generaliseert de stelling van Rolle ($f'(\xi) = 0$ voor zekere $\xi \in (c, d)$ als $f(c) = f(d) = 0$). Het lemma speelt een belangrijke rol bij het bepalen van de vorm van de restterm.

LEMMA 2.1 (Stelling van Rolle). *Als f n maal continu differentieerbaar is en $f = 0$ op $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ dan $f^{(n)}(\xi) = 0$ voor zekere ξ tussen $x_0, \ldots, x_n$.*

Bewijs. We mogen aannemen dat $x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n$. Volgens de standaard stelling van Rolle zijn er y_i $(i = 0, \ldots, n-1)$ zodat $x_i \leq y_i \leq x_{i+1}$ $(i = 0, \ldots, n-1)$ en $f' = 0$ op $(y_0, \ldots, y_{n-1})$ (ga na dat de bewering ook korrekt is in geval aan aantal x_i-en samenvallen). Herhaald toepassen van deze observatie (op achtereenvolgense f', f'', ...) levert de uitspraak van het lemma. □

Een polynoom p **interpoleert** f **op** $\mathbf{x}$ als $p = f$ op die rij en de graad van p $\leq n$ is.

STELLING 2.1. *Het interpolatie polynoom voor f op $\mathbf{x}$ is uniek.*

Bewijs. Als p en q van graad $\leq n$ zijn en beide zijn gelijk aan f op $\mathbf{x}$ dan is $p-q = 0$ op $\mathbf{x}$ en $p(x) - q(x) = r(x)(x - x_0)(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$ voor zeker polynoom r (hoofdstelling van de algebra). Omdat $p-q$ van graad $\leq n$ is en $(x-x_0) \cdots (x-x_n)$ van graad $n + 1$ kan dit alleen als $r = 0$ en dus is $p = q$. $\square$

Als de punten x_i onderling verschillend zijn (zeg $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$) dan spreken we over **Lagrange interpolatie**. Is het aantal punten x_i even, $n = 2m + 1$, en is $x_0 = x_1 < x_2 = x_3 < \ldots < x_{2m} = x_{2m+1}$ dan spreken we over **Hermite interpolatie** (dus voor het Hermite interpolatie polynoom p geldt $p(x_{2i}) = f(x_{2i})$ en $p'(x_{2i}) = f'(x_{2i})$ voor $i = 0, \ldots, m$). Vallen alle punten x_i samen ($x_0 = x_1 = x_2 = \ldots$) dan is het interpolatie polynoom p precies het **Taylor polynoom**.

STELLING 2.2. *Het interpolatie polynoom p voor f op $\mathbf{x}$ wordt gegeven door*

$$p(x) = f(x_0) + (x - x_0)\frac{f[x_0, x_1]}{1!} + (x - x_0)(x - x_1)\frac{f[x_0, x_1, x_2]}{2!} + \ldots$$
$$+(x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1})\frac{f[x_0, \ldots, x_n]}{n!}.$$

Bewijs. Bekijk de polynomen q_0 en q_1 die f interpoleren op, respektievelijk $(x_0, \ldots, x_{n-1})$ en $(x_1, \ldots, x_n)$. Dan is

$$p = \frac{x - x_n}{x_0 - x_n} q_0 + \frac{x - x_0}{x_n - x_0} q_1; \tag{0.2}$$

immers het polynoom rechts interpoleert f op $(x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n-1})$ (ga dat na door invullen van de x_i's) en het interpolatie polynoom is uniek (Stelling 2.1). Nemen we aan dat de stelling korrekt is voor q_0 en q_1 (induktie aanname), dan weten we dat de leidende coëfficiënt van q_0 en q_1 gelijk is aan, respektievelijk, $f[x_0, \ldots, x_{n-1}]/(n - 1)!$ en $f[x_1, \ldots, x_n]/(n - 1)!$. Relatie (0.2) vertelt ons dat de leidende coëfficiënt van p gelijk is aan

$$\frac{f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{(x_0 - x_n)(n - 1)!} + \frac{f[x_1, \ldots, x_n]}{(x_n - x_0)(n - 1)!} =$$
$$n\,\frac{f[x_0, \ldots, x_{n-1}] - f[x_1, \ldots, x_n]}{x_0 - x_n}\,\frac{1}{n!}.$$

Per definitie (zie §1) is dit $f[x_0, \ldots, x_n]/n!$. $\square$

Uit voorgaande stelling volgen eenvoudig twee resultaten (Stelling1.1 in §1) die al eerder genoemd zijn.

Nummeren we $x_0, \ldots, x_n$ in een andere volgorde met in achtname van conventie (0.1), dan hebben we hetzelfde interpolatie polynoom, met dezelfde leidende coëfficiënt. Dus

STELLING 2.3. *$f[x_0, \ldots, x_k] = f[x_{\pi(0)}, \ldots, x_{\pi(k)}]$ voor iedere toelaatbare permutatie π van $0, \ldots, k$.* $\square$

Omdat $f - p = 0$ op $\mathbf{x}$ voor het interpolatie polynoom p, vertelt de stelling van Rolle (Lemma 2.1) ons dat $f^{(n)}(\xi) - p^{(n)}(\xi) = 0$ voor zekere ξ tussen $x_0, \ldots, x_n$. Omdat p van graad n is, is de n-de afgeleide gelijk aan $n!$ maal de leidende coëfficiënt, dus gelijk aan $f[x_0, \ldots, x_n]$. Blijkbaar

STELLING 2.4. *$f[x_0, \ldots, x_n] = f^{(n)}(\xi)$ voor zekere ξ tussen $x_0, \ldots, x_n$.* $\square$

STELLING 2.5. *Beschouw het interpolatie polynoom p voor f op $\mathbf{x}$. Dan geldt voor iedere x dat*

$$f(x) = p(x) + (x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) \frac{f[x_0, \ldots, x_n, x]}{(n+1)!},$$

en, als f voldoende glad is, is er een ξ tussen $x_0, \ldots, x_n, x$ $\left(\xi \approx \frac{x_0 + \ldots + x_n + x}{n+2}\right)$ zodat

$$f(x) = p(x) + (x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Bewijs. Kies een x_{n+1} in $[a, b]$. Schrijf $y = x_{n+1}$. Volgens Stelling 2.2 is

$$p(x) + (x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) \frac{f[x_0, \ldots, x_n, y]}{(n+1)!}$$

het interpolatie polynoom van f op $(x_0, \ldots, x_n, y)$. Omdat het polynoom ook in y interpoleert geldt

$$f(y) = p(y) + (y - x_0) \cdot \ldots \cdot (y - x_n) \frac{f[x_0, \ldots, x_n, y]}{(n+1)!},$$

We hebben al gezien dat $f[x_0, \ldots, x_n, y] = f^{(n+1)}(\xi)$ (zie Stelling 1.1). Met $y = x_{n+1} = x$ is hiermee het bewijs geleverd. $\square$