Praktikum Numerieke Gewone differentiaalvergelijkingen.

Korte handleiding bij het eerste praktikum numerieke gewone differentiaalvergelijkingen, 1 oktober 2002.

Maak aantekeningen bij je experimenten!

Bij dit praktikum gebruiken we zeven kleine matlab-programma's (zgn. m-files): `op1ef.m`, `op1eb.m`, `kromme.m`, `op1efb.m`, `op1al.m`, `op1g1.m` en `op1g2.m` [1].
Matlab kan je opstarten door `matlab` in te toetsen in een 'commandtool'. In matlab is alles wat na een %-teken staat commentaar; dit kan je gebruiken om bepaalde commando's in de m-files 'aan- en uit te zetten'.

Ad b. Start matlab op. Tik `op1ef` in na >>, om een plaatje van de analytische oplossing te krijgen. In het plaatje staat de eerste component van u tegen de tweede uitgezet.

Ad d. Druk nu op de spatiebalk, en je ziet de benaderingen in een plaatje verschijnen; de 2-norm van de globale fouten en een schatting van de orde komen op het scherm. Ook de eigenwaarden van de matrix D (deze spelen een rol bij de stabiliteit van de methode, vgl. opgaves **e**, **f** en **h**) worden afgedrukt. De stapgroottes `h1`, `h2` en het eindtijdstip `T` kun je veranderen in de m-file `op1ef.m`. Zorg ervoor dat `h1` > `h2`, en dat `T/h1` en `T/h2` geheel zijn! De matrices `A` en `B` kun je veranderen door een %-teken weg te halen c.q. toe te voegen in het begin van de file `op1ef.m`.

Ad g. Deze experimenten kun je uitvoeren door `op1eb` aan te roepen. `op1eb` werkt precies hetzelfde als `op1ef` (vergeet niet op de spatiebalk te drukken nadat je de analytische oplossing gezien hebt).

Ad h. Een plaatje van de kromme krijg je door `kromme` aan te roepen.

Ad j. Als je `op1efb` aanroept, krijg je in een figuur de analytische oplossing en benaderingen met Euler forward en Euler backward te zien. Kies nu een waarde voor α, en pas de variabele `alpha` in de m-file `op1al.m` aan. Na het aanroepen van `op1al` krijg je ook de benadering met het α-schema (met de door jou gekozen α) te zien in het plaatje. De 2-norm van de fouten en een schatting van de orde van het α-schema verschijnen op het scherm. Ook de stapgrootte `h` en het eindtijdstip `T` kun je aanpassen in het programma `op1al.m`.

Ad l. M.b.v. de m-file `op1g1.m` wordt het effect van het halveren van h vs. $1-\gamma$ geïllustreerd. Kies in de m-file `op1g1.m` een eindtijdstip `T`, een stapgrootte `h` en een waarde gamma; zorg ervoor dat gamma $\in [0,1)$ en `T/h` geheel is. Als je nu op1g1 aanroept krijg je in één plaatje benaderingen behorende bij de combinaties $(\frac{1}{2}h,\gamma)$ en $(h,\widetilde{\gamma})$, waarbij $1-\widetilde{\gamma}=\frac{1}{2}(1-\gamma)$.

Ad m. Als je op1g2 aanroept, krijg je op het scherm de exacte oplossing en benaderingen voor twee verschillende waardes van γ te zien. Ook zie je weer de 2-norm van de fouten en schattingen van de ordes op het scherm verschijnen. De twee waardes voor γ (viz. gammma1 en gamma2), de stapgrootte en het eindtijdstip kun je veranderen in de m-file `op1g2.m`.

[1] Deze m-files zijn te vinden in de directory
`http://www.math.uu.nl/people/sleijpen/Opgaven/NumGDV/Opgave1.tar.gz`
Kopieer deze files naar de directory waarin je voor dit praktikum wilt werken.
Met `gunzip Opgave1.tar.gz` en `tar xvf Opgave1.tar` kan je de files 'uitpakken'.

1. [Lineaire tweede orde vergelijkingen].

Bij dit praktikum wordt matlab gebruikt. De opgaves waarvoor je matlab nodig hebt zijn gemerkt met een ^{m}. Tijdens het praktikum wordt een korte handleiding over het gebruik van matlab (bij dit praktikum) uitgedeeld. Probeer de opgaves **a**, **c**, **e**, **f**, en de onderdelen van **d** en **h** waarbij je geen computer nodig hebt, *voor* het praktikum uit te werken!

Beschouw, voor $d \times d$ matrices A en B (A niet-singulier), het volgende beginwaardeprobleem:

$$\begin{cases} Au'' + Bu = 0 \\ u(0) = u_0, \;\; u'(0) = v_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

De meest voor de hand liggende manier om (1.1) (numeriek) op te lossen is door het probleem m.b.v. de nieuwe variabele

$$U = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

te herschrijven tot een stelsel van eerste orde vergelijkingen

$$\begin{cases} U' = -CU \\ U(0) = U_0 \end{cases} \tag{1.2}$$

met $v = u'$ en $U_0 = (u_0, v_0)^T$. De analytische oplossing van (1.2) wordt gegeven door

$$U(t) = e^{-tC} U_0. \tag{1.3}$$

a. Bepaal C in termen van $D = A^{-1}B$.

b^m. Genereer random 2×2-matrices A en B. Vermenigvuldig B met 1000. Konstrueer D en C uit A en B. Neem $u_0 = (0,0)^T$ en $v_0 = (1,1)^T$. Bekijk de exacte oplossing (3) op een tijdsinterval $[0, T]$ (neem bijv. $T = 0.2$ en $h = 0.01$). Kun je op grond van de vorm van de baan al enigszins aangeven of (1) numeriek gezien een eenvoudige of een moeilijke differentiaalvergelijking is? (Denk je hierbij aan lokale nauwkeurigheid of aan stabiliteit?)

c. Laat zien dat Euler forward toegepast op (1.2) te schrijven is als:

$$\begin{cases} u_{n+1} - u_n = hv_n \\ A(v_{n+1} - v_n) + hBu_n = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

d^m. Bereken de Euler forward benadering voor twee verschillende stapgroottes (b.v. $h = 0.01$ en $h = 0.005$). Hoe zou je nu de konsistentie orde kunnen schatten (merk op dat je de analytische oplossing kent)? Geef een schatting van de konsistentie orde (komt dit overeen met de theorie?). Herhaal bovenstaande procedure met kleinere stapgroottes. Geef een schatting voor de benodigde stapgrootte om $u(T)$ met een precisie van 0.0001 te benaderen.

e. Stel dat de analytische oplossing van (1.2) begrensd is. Wat betekent dit voor de eigenwaarden van C? Laat zien dat de eigenwaarden van C worden bepaald door de eigenwaarden van D (hint: schrijf $C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ uit; de eigenwaarden van C blijken de 'wortels' van de eigenwaarden van $-D$ te zijn). Geef een noodzakelijke voorwaarde voor de eigenwaarden van D zodat de analytische oplossing van (1.1) (of (1.2)) begrensd is.

Voor het geval de analytische oplossing begrensd is kan je in de volgende onderdelen van deze opgave de stabiliteit redelijk gemakkelijk precies analyseren. Voor andere situaties ligt dat wat lastiger. Besteed hieronder in zowel de experimenten als in de theorie speciale aandacht aan de analytisch stabiele situatie.

f. Laat zien dat Euler forward, toegepast op (1.2), i.h.a. een onbegrensde rij benaderingen $U_n \approx U(nh)$ (h vast, $n \to \infty$) levert. Je zou dus kunnen zeggen dat Euler forward voor het probleem (1.1) instabiel is. Is dit erg (hint: wat gebeurt er met $U(t)$ als $t \to \infty$)? Als je alleen stabiliteit met betrekking tot een 'relatieve' fout eist, hoe luidt dan de stabiliteits voorwaarde voor Euler forward?

Euler backward, toegepast op (1.2), leidt tot

$$\begin{cases} u_{n+1} - u_n = hv_{n+1} \\ A(v_{n+1} - v_n) + hBu_{n+1} = 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

g^m. Verwacht je voor Euler backward betere resultaten dan voor Euler forward, wanneer beiden toegepast worden voor (1.2)? Voer nu de experimenten bij **d** uit met Euler backward. Conclusie?

h^m. Laat zien dat Euler backward, toegepast op (1.2), stabiel is als de eigenwaarden van h^2D in het buitengebied van de kromme

$$\{-\cos 2\varphi - 2\cos\varphi - 1 + i(\sin 2\varphi + 2\sin\varphi) \ : \ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$$

liggen. Maak m.b.v. matlab een plaatje van deze kromme. Concludeer uit dit plaatje dat, voor h klein genoeg, Euler backward hetzelfde soort stabiliteitsgedrag vertoont als de analytische oplossing van (1.2).

Euler forward en Euler backward zijn de extreme gevallen ($\alpha = 0$ en $\alpha = 1$) van de zgn. α-schema's of semi-impliciete schema's:

$$\begin{cases} u_{n+1} - u_n = \alpha\, h(v_{n+1} - v_n) + hv_n, \\ A(v_{n+1} - v_n) + \alpha\, hB(u_{n+1} - u_n) + hBu_n = 0. \end{cases} \tag{1.6}$$

i. Laat zien dat dit schema equivalent is met:

$$U_{n+1} = U_n + h\left[\alpha\,(-C)U_{n+1} + (1-\alpha)(-C)U_n\right]. \tag{1.7}$$

j^m. Als je de resultaten van **d** en **g** vergelijkt (in een plaatje) dan krijg je de indruk dat het mogelijk is Euler forward en Euler backward op een geschikte manier te middelen tot een semi-impiciet schema dat het veel beter doet dan het expliciete en het impliciete schema afzonderlijk. Probeer dit, d.w.z. zoek $0 < \alpha_{opt} < 1$ zo dat het α-schema behorende bij $\alpha = \alpha_{opt}$ een 'optimale' benadering geeft. Bepaal de konsistentie orde en geef een schatting voor de benodigde stapgrootte om $u(T)$ met een precisie van 0.0001 te benaderen.

k^m. Herhaal de voorgaande onderdelen voor nieuwe random matrices A en B. Onderzoek m.b.t. de eigenwaarden van $A^{-1}B$ in ieder geval de volgende gevallen:

1. beide reeel en positief,
2. beide reeel en negatief,
3. beide reeel, positief en negatief,
4. complex geconjugeerd met positief reeel deel,
5. complex geconjugeerd met negatief reeel deel.

Hangt α_{opt} van de differentiaalvergelijking af?

Beschouw de volgende schema's (we noemen deze schema's γ-schema's):

$$\begin{cases} u_{n+1} - u_n = hv_n, \\ A(v_{n+1} - v_n) + \gamma\, hB(u_{n+1} - u_n) + hBu_n = 0. \end{cases} \tag{1.8}$$

l^m. Wat is de overeenkomst met de α-schema's en wat zijn op grond hiervan redelijke waarden voor γ? Laat m.b.v. experimenten zien dat, uitgaande van Euler forward ($\gamma = 0$), elke halvering van de stapgrootte ongeveer hetzelfde effect heeft als een halvering van $1 - \gamma$, en dat dit verschijnsel ook optreedt als je begint bij een willekeurig ander γ-schema met $\gamma < 1$ (bekijk b.v. $\gamma = 0.2$ met $h = 0.005$ en $\gamma = 0.6$ met $h = 0.01$). Waarom kun je beter γ zo kiezen dat $1 - \gamma$ half zo groot wordt en niet de stapgrootte h halveren?

$\mathbf{m}^m$. Het is natuurlijk nog veel slimmer om meteen $\gamma = 1$ te kiezen. Beredeneer dat dit de optimale γ is. Voer nu wat experimenten uit met verschillende waarden van γ; zie je ook in je experimenten dat het het γ-schema nauwkeuriger wordt naarmate γ dichter bij 1 ligt? Bepaal ook de konsistentie orde van de γ-schema's.

n*. Laat zien dat de γ-schema's in termen van de U_n van de volgende vorm zijn:

$$U_{n+1} = U_n - h(C_1 + hC_2)U_n. \tag{1.9}$$

Bepaal C_1 en $C_2 = C_2(\gamma)$.

Merk op dat h hier kwadratisch in voorkomt, terwijl zelfs in de U_n formulering h lineair voorkomt in de Euler schema's en de α-schema's.

Onderzoek de eigenwaarden van $C_1 + xC_2(1)$ voor verschillende waarden $x > 0$ en vergelijk deze met de eigenwaarden van C. Wat stelt x voor? Wat is je conclusie m.b.t. de stabiliteit van γ-schema's? Besteed speciale aandacht aan de analytisch stabiele situatie. 'Kontroleer' je bevindingen door de komponent van de fout in de richting van de eigenvectoren van $C_1 + xC_2(1)$ te onderzoeken.