Tentamenvervangende Opdracht
Numerieke Gewone Differentiaalvergelijkingen

Schrijf een verslag in "artikel stijl". Gebruik daarbij de vragen die in onderstaande opgave geformuleerd zijn als richtlijn. De vraagstellingen zelf dienen in het verslag ook onderbouwd te worden. Het verslag is dus geen kollektie antwoorden op vragen ("tentamen stijl").

Probeer je argumenten theoretisch te onderbouwen. Als je argumenten berusten op aannamen die theoretisch niet of moeilijk te onderbouwen zijn, toon dan de redelijkheid van de aannamen experimenteel aan.

Samenwerken mag (maximaal twee personen). Iedereen blijft wel individueel verantwoordlijk voor het **hele** verslag (de discussie bij de individuele nabespreking kan het cijfer bepalen).

Aarzel niet om te overleggen met de docent (het schrijven van een verslag is geen tentamen: ook bij de voorbereiding op een tentamen kan je hulp vragen van de docent).

Voor dit vak zijn 4 studiepunten gereserveerd. Dat betekent 4 weken werk. Omdat je al een kleine week aan het vak besteed hebt met het volgen van colleges en werkcolleges, moet je voor het werken aan het verslag op 3 weken rekenen.

1. [Vervolg van de tweede computer opdracht)].
Beschouw, voor zekere positieve konstante $a, b \in \mathbb{R}$, de advektie-diffusievergelijking

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\,\frac{\partial u}{\partial x} + f(x,t)$$

en met begin- en randvoorwaarde als in (**??**). Na discretisatie in de plaatsrichting ontstaat een differentiaalvergelijking van de vorm

$$\vec{u}\,' = \left(\frac{a}{(\Delta x)^2}A + \frac{b}{\Delta x}B\right)\vec{u} + \vec{f}, \tag{0.1}$$

waarbij B de matrix-representant is van de gediscretiseerde advektie-term: we bekijken eenzijdige differenties

$$\frac{\partial u}{\partial x}(j\Delta x) = \frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} + \delta_j^x$$

en centrale differenties

$$\frac{\partial u}{\partial x}(j\Delta x) = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} + \delta_j^x.$$

In de experimenten nemen we f zodat $u^* = \sin x\,(1 - \cos t\, + \sin t)$ de exacte oplossing is en $a = 1$, $b = 102/\pi$. We discretiseren met $N = 20, 50, 100$.

a [Local mode analysis] De eigenwaarden en eigenvektoren zijn nu lastiger te bepalen dan in de tweede computeropdracht. Men gaat vaak als volgt te werk. Beschouw, voor $\xi = 0, \Delta x, 2\Delta x, \ldots, N\Delta x$, de vektoren $\vec{v}_\xi$ met j-de coördinaat $v_{\xi,j}$ $(j = 0, 1, 2, \ldots, N)$ gegeven door

$$v_{\xi,j} \equiv e^{2ij\xi} \qquad \left(i \equiv \sqrt{-1}\right).$$

(Het stelsel van de v_ℓ in c. van de tweede computeropdracht is het imaginaire deel van de $\vec{v}_\xi$ met $2\xi = \ell\Delta x$. De v_ξ vormen op $\mathbb{C}^{N+1}$ (j-coordinaat van $0, \ldots, N$) een orthogonaal stelsel.) Dan geldt, voor zekere λ_ξ en μ_ξ in $\mathbb{R}$

$$A\vec{v}_\xi = \lambda_\xi \vec{v}_\xi + \text{"randtermen"} \quad \text{en} \quad B\vec{v}_\xi = i\mu_\xi \vec{v}_\xi + \text{"randtermen"}.$$

Ga dit na en geef een uitdrukking voor λ_ξ en μ_ξ in termen van ξ. De "randtermen" worden in de analyse verder genegeerd. Bovendien laat men ξ gewoonlijk alle waarden in $[0, \pi]$ doorlopen. Deze benadering noemt men een *local mode analysis* (men werkt lokaal met Fourier modes).

b. We lossen (**??**) op met Euler forward. Bepaal $\Delta t_{\mathrm{f}} = \Delta t$ zo groot mogelijk zodat

$$\text{met} \quad \eta_\xi \equiv a\,\lambda_\xi + i\,b\,\Delta x\,\mu_\xi, \qquad \left|1 + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\eta_\xi\right| \leq 1 \quad \text{alle } \xi$$

(plot de kurve η_ξ in het complexe vlak). Zal de werkelijke stabiliteitsgrens voor Δt lager liggen? Ga experimenteel na hoeveel Δt_{f} afligt van die grens.

c. Met MATLAB kunnen we eigenwaarden berekenen. Vergelijk die eigenwaarden eens met η_ξ. Bepaal $\Delta t_{\mathrm{e}} = \Delta t$ zo groot mogelijk zo dat

$$\left|1 + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\mu\right| \leq 1 \quad \text{alle eigenwaarden } \mu \text{ van} \quad a\,A + b\,\Delta x\,B.$$

Het blijkt dat $\Delta t_{\mathrm{e}} > \Delta t_{\mathrm{f}}$. Toch heeft Δt_{f} een beter voorspellende waarde. Waarom is Δt_{e} zo slecht? (Hint: kijk naar het konditie getal van de eigenvektor basis.) Waarom is dit argument niet van toepassing op de local mode analysis?

d. We gaan na wat het effekt van impliciet smoothen is en passen Euler forward toe op

$$\vec{u}\,' = \frac{1}{(\Delta x)^2}\,(a\,A + b\,\Delta x\,B)\,S_{\mathrm{imp}}\vec{u} + \vec{f}, \tag{0.2}$$

waarbij

$$\vec{w} \equiv S_{\mathrm{imp}}\vec{u} \equiv \left(I + \frac{1}{4(\Delta x)^2}A^T A\right)^{-1}\vec{u}.$$

Local mode analysis leert dat we nu te maken hebben met

$$\widetilde{\eta}_\xi \equiv (a\,\lambda_\xi + i\,b\,\Delta x\,\mu_\xi)\left(1 + \frac{\lambda_\xi^2}{4(\Delta x)^2}\right)^{-1}$$

in plaats van η_ξ. Ga dat na. Voor de konsistentie is het van belang dat de η_ξ en $\widetilde{\eta}_\xi$ voor kleine $\xi = j\Delta x$ elkaar goed benaderen. Waarom? Is dat hier het geval? Vergelijk $\widetilde{\eta}_\xi$ ook eens met de eigenwaarden $\widetilde{\mu}$ van $(a\,A + b\,\Delta x\,B)S_{\mathrm{imp}}$. Bepaal met behulp van de local mode analysis de stabiliteitsgrens voor Δt. Test de resultaten experimenteel.

De "gesmoothde" variant $\vec{w}$ van $\vec{u}$ kan ook gezien worden als een benadering van u^* (Waarom)? Leidt $\vec{w}$ tot een betere benadering van u^* dan $\vec{u}$? Verklaar het eventuele verschil. In plaats van $\vec{u}$ te "smoothen" als in (**??**) zouden we ook de afgeleide kunnen "smoothen":

$$\vec{u}\,' = S_{\mathrm{imp}}\left(\frac{1}{(\Delta x)^2}\,(a\,A + b\,\Delta x\,B)\,\vec{u} + \vec{f}\right). \tag{0.3}$$

Hoe pak dit uit?

Omdat $A \approx (\Delta x)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ is

$$\vec{g} - S_{\mathrm{imp}}\vec{g} = \left(I + \frac{1}{4(\Delta x)^2}A^T A\right)^{-1}\frac{1}{4(\Delta x)^2}A^T A\vec{g} \approx \frac{1}{4}(\Delta x)^2\frac{\partial^4 \vec{g}}{\partial x^4}$$

voor voldoende gladde funkties g. Dit kan je gebruiken om een indruk te krijgen van het effect van "smoothen" op de lokale discretisatie fout.

e. Om te voorkomen dat de "eigenwaarden" η_ξ bij hoge frekwenties ($\xi \approx \pi$) door de impliciete smoother teveel naar 0 gedrukt worden voegen we ook nog zogenaamde "artificiële dissipatie" (expliciete smoother) toe. We lossen op

$$\vec{u}\,' = \frac{1}{(\Delta x)^2}\,(a\,A + b\,\Delta x\,B)\,S_{\mathrm{imp}}\vec{u} + S_{\mathrm{exp}}\vec{u} + \vec{f}, \quad \text{waarbij} \quad S_{\mathrm{exp}} \equiv \frac{\beta}{\Delta x}A^T A\,\vec{u}. \tag{0.4}$$

Bepaal β zo dat de eigenwaarden bij hoge frekwenties zo veel mogelijk van 0 wegblijven zonder stabiliteitsgrens te verleggen. Is de invloed op de konsistentie van deze artificiële dissipatie van belang? Test de resultaten experimenteel.

Tentamenvervangende Opdracht
Numerieke Gewone Differentiaalvergelijkingen

Schrijf een verslag in "artikel stijl". Gebruik daarbij de vragen die in onderstaande opgave geformuleerd zijn als richtlijn. De vraagstellingen zelf dienen in het verslag ook onderbouwd te worden. Het verslag is dus geen kollektie antwoorden op vragen ("tentamen stijl").

Probeer je argumenten theoretisch te onderbouwen. Als je argumenten berusten op aannamen die theoretisch niet of moeilijk te onderbouwen zijn, toon dan de redelijkheid van de aannamen experimenteel aan.

Samenwerken mag (maximaal twee personen). Iedereen blijft wel individueel verantwoordlijk voor het **hele** verslag (de discussie bij de individuele nabespreking kan het cijfer bepalen).

Aarzel niet om te overleggen met de docent (het schrijven van een verslag is geen tentamen: ook bij de voorbereiding op een tentamen kan je hulp vragen van de docent).

Voor dit vak zijn 4 studiepunten gereserveerd. Dat betekent 4 weken werk. Omdat je al een kleine week aan het vak besteed hebt met het volgen van colleges en werkcolleges, moet je voor het werken aan het verslag op 3 weken rekenen.

2. [Reaktie–diffusie vergelijking].

Beschouw de volgende reaktie–diffusie vergelijking.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} &=& 1 + u^2 v - 4.4\,u + \alpha \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} &=& 3.4\,u - u^2 v + \alpha \left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{cases}$$

voor $t \in [0, \infty)$ en $(x, y) \in \Omega \equiv [0, 1] \times [0, 1]$. Neem voor $\alpha = 2\,10^{-3}$.
Op de rand $\partial\Omega$ van Ω geldt

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{op} \quad \partial\Omega$$

en voor $t = 0$ (startwaarden) geldt

$$u(x, y, 0) = 0.5 + y, \quad v(x, y, 0) = 1 + 5x \qquad \text{voor alle} \quad (x, y) \in \Omega.$$

Diskretiseer in de ruimte richting de Laplace operator met de bekende 5-punts formule, met stapgroottes Δx en Δy, discretiseer $\frac{\partial u}{\partial n}$ met een eenzijdige eerste orde differentie. Voor het resulterende *semi–gediscretiseerde* probleem onderzoeken we welke multistep methoden geschikt zijn (deze taktiek voor het oplossen van tijdsafhankelijke partiële differentiaalvergelijkingen noemt men de *methode der lijnen*; de onbekende funkties in het semi-gediscretiseerde probleem zijn gedefiniëerd langs t-lijnen.)

Beschouw in eerste instantie de 1–dimensionale variant van het probleem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} &=& 1 + u^2 v - 4.4\,u + \alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} &=& 3.4\,u - u^2 v + \alpha \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{cases}$$

voor $t \in [0, \infty)$ en $x \in \Omega \equiv [0, 1]$.

Onderzoek experimenteel voor een zekere expliciete multistep methode (Euler forward, Adams–Bashford), met ruimtestapgrootte $\Delta x = 0.1$, voor welke tijdsstapgrootte Δt de numerieke oplosmethode stabiel is. Valt hier ook theoretisch wat over te zeggen? Hoe zal de toelaatbare Δt veranderen als Δx met een faktor 4 kleiner gemaakt wordt? Vindt je deze verwachting ook terug in de praktijk? Ga na waar het spectrum van de Jacobiaan in de gevonden oplossing ligt.

Ga na of het spektrum essentiëel (met het oog op een multistep toepassing) verandert onder verkleining van de ruimtestapgrootte.

Het semi–gediscretiseerde probleem kan ook opgelost worden met een impliciete multistep methode (met sterkere stabiliteits eigenschappen). Welke methode kies je en waarom? Vergelijk een expliciete methode met een geschikte impliciete methode, van dezelfde konsistentie orde. Aan welke methode geef je de voorkeur (let op de hoeveelheid rekenoperaties die verricht moeten worden om eenzelfde resultaat te boeken. Hangt je voorkeur nog af van de ruimtestapgrootte)?

Bespreek de mogelijkheid van een prediktor–korrektor techniek en stapgroottebesturing.

Hoe los je bij de impliciete methode de resulterende vergelijking op?

Toets je verwachtingen aan de praktijk.

Hoe verwacht je dat het een en ander uit zal pakken in het 2–dimensionale geval (het oorspronkelijk probleem)? Dit laatste geval hoef je niet in de praktijk te onderzoeken (de stelsels lineaire vergelijkingen waar je tegen aanloopt zijn niet zomaar efficiënt op te lossen; de theorie hiervoor komt uitgebreid aan de orde in het college "Numerieke Wiskunde C; Numerieke Lineaire Algebra").

Tentamenvervangende Opdracht
Numerieke Gewone Differentiaalvergelijkingen

Schrijf een verslag in "artikel stijl". Gebruik daarbij de vragen die in onderstaande opgave geformuleerd zijn als richtlijn. De vraagstellingen zelf dienen in het verslag ook onderbouwd te worden. Het verslag is dus geen kollektie antwoorden op vragen ("tentamen stijl").

Probeer je argumenten theoretisch te onderbouwen. Als je argumenten berusten op aannamen die theoretisch niet of moeilijk te onderbouwen zijn, toon dan de redelijkheid van de aannamen experimenteel aan.

Samenwerken mag (maximaal twee personen). Iedereen blijft wel individueel verantwoordlijk voor het **hele** verslag (de discussie bij de individuele nabespreking kan het cijfer bepalen).

Aarzel niet om te overleggen met de docent (het schrijven van een verslag is geen tentamen: ook bij de voorbereiding op een tentamen kan je hulp vragen van de docent).

Voor dit vak zijn 4 studiepunten gereserveerd. Dat betekent 4 weken werk. Omdat je al een kleine week aan het vak besteed hebt met het volgen van colleges en werkcolleges, moet je voor het werken aan het verslag op 3 weken rekenen.

3. [Konvektie–diffusie vergelijking].

Beschouw, voor $(v_1, v_2) \in \mathbf{R}^2$ en $\varepsilon \in (0, \infty)$, de volgende niet–stationaire konvektie–diffusie vergelijking.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{\varepsilon}\left(v_1 \frac{\partial u}{\partial x} + v_2 \frac{\partial u}{\partial y} - v_1 \sin t\right) + \cos t.$$

voor $t \in [0, \infty)$ en $(x, y) \in \Omega \equiv [0, 1] \times [0, 1]$.

Op de rand $\partial\Omega$ van Ω geldt

$$u(x, i, t) = x \sin t \quad \text{voor} \quad i = 0, 1, \quad \text{en} \quad u(0, y, t) = 0, \qquad u(1, y, t) = \sin t.$$

en voor $t = 0$ (startwaarden) geldt

$$u(x, y, 0) = 0 \quad \text{voor alle} \quad (x, y) \in \Omega$$

(zodat $u^*(x, y, t) = x \sin t$ de exacte oplossing is.) Diskretiseer in de ruimte richting de Laplace operator met de bekende 5-punts formule, met stapgroottes Δx en Δy, discretiseer de eerste orde afgeleide met symmetrische eerste orde differentie. Voor het resulterende *semi–gediscretiseerde* probleem onderzoeken we welke multistep methoden geschikt zijn (deze taktiek voor het oplossen van tijdsafhankelijke partiële differentiaalvergelijkingen noemt men de *methode der lijnen*; de onbekende funkties in het semi-gediscretiseerde probleem zijn gedefiniëerd langs t-lijnen.)

Beschouw in eerste instantie de 1–dimensionale variant van het probleem:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\varepsilon} v_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} - x \sin t\right) + cost.$$

voor $t \in [0, \infty)$ en $x \in \Omega \equiv [0, 1]$.

Onderzoek experimenteel voor een zekere expliciete multistep methode (Euler forward, Adams–Bashford), met ruimtestapgrootte $\Delta x = 0.1$, voor welke tijdsstapgrootte Δt de numerieke oplosmethode stabiel is. Hoe hangt de stabiliteit af van ε? Valt hier ook theoretisch wat over te zeggen? Hoe zal de toelaatbare Δt veranderen als, bij vaste ε, Δx met een faktor 2 kleiner gemaakt wordt? Vindt je deze verwachting ook terug in de praktijk? Ga na waar het spectrum van de Jacobiaan in de gevonden oplossing ligt. Ga na of het spektrum essentiëel (met het oog op een multistep toepassing) verandert onder verkleining van de ruimtestapgrootte.

Het semi–gediscretiseerde probleem kan ook opgelost worden met een impliciete multistep methode (met sterkere stabiliteits eigenschappen). Welke methode kies je en waarom? Vergelijk een expliciete methode met een geschikte impliciete methode, van dezelfde konsistentie orde. Aan welke methode geef je de voorkeur (let op de hoeveelheid rekenoperaties die verricht moeten worden om eenzelfde resultaat te boeken. Hangt je voorkeur nog af van de ruimtestapgrootte of ε)?

Hoe los je bij de impliciete methode de resulterende vergelijking op?

Toets je verwachtingen aan de praktijk.

Hoe verwacht je dat het een en ander uit zal pakken in het 2–dimensionale geval (het oorspronkelijk probleem)? Dit laatste geval hoef je niet in de praktijk te onderzoeken (de stelsels lineaire vergelijkingen waar je tegen aanloopt zijn niet zomaar efficiënt op te lossen; de theorie hiervoor komt uitgebreid aan de orde in het college "Numerieke Wiskunde C; Numerieke Lineaire Algebra").

grondsoort	κ_s	A	γ
zand	944	$1.175\,10^6$	4.474
klei	1.230	124.6	1.770
`test`	`1`	`1`	`2`

TABEL 0.1
Konstanten in de doorlaadbaarheids-coëfficiënt voor verschillende grondsoorten

Tentamenvervangende Opdracht
Numerieke Gewone Differentiaalvergelijkingen

Schrijf een verslag in "artikel stijl". Gebruik daarbij de vragen die in onderstaande opgave geformuleerd zijn als richtlijn. De vraagstellingen zelf dienen in het verslag ook onderbouwd te worden. Het verslag is dus geen kollektie antwoorden op vragen ("tentamen stijl").

Probeer je argumenten theoretisch te onderbouwen. Als je argumenten berusten op aannamen die theoretisch niet of moeilijk te onderbouwen zijn, toon dan de redelijkheid van de aannamen experimenteel aan.

Samenwerken mag (maximaal twee personen). Iedereen blijft wel individueel verantwoordlijk voor het **hele** verslag (de discussie bij de individuele nabespreking kan het cijfer bepalen).

Aarzel niet om te overleggen met de docent (het schrijven van een verslag is geen tentamen: ook bij de voorbereiding op een tentamen kan je hulp vragen van de docent).

Voor dit vak zijn 4 studiepunten gereserveerd. Dat betekent 4 weken werk. Omdat je al een kleine week aan het vak besteed hebt met het volgen van colleges en werkcolleges, moet je voor het werken aan het verslag op 3 weken rekenen.

4. [Grondwatervergelijking].

We meten de druk $u(t,x,y,z)$ van het grondwater op tijdstip t en plaats (x,y,z) in meters. Door drukverschillen gaat het grondwater stromen. De stroomsnelheid $\vec{v}(t,x,y,z)$ wordt ook bepaald door doorlaadbaarheid van de grondlaag. De doorlaadbaarheids-coëfficiënt κ (m^3/s m^2) hangt ook af van de druk (als de grond meer wordt samengedrukt zal de doorlaadbaarheid afnemen). Voor de snelheid geldt

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)^T = -\kappa\,\nabla\,(u+z) \equiv -\kappa\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} + 1\right)^T \tag{0.5}$$

(de term "+1" modelleert de invloed van de zwaartekracht). Experimenteel blijkt κ gegeven te worden door

$$\kappa(u) = \kappa_s\,\frac{A}{A + |u|^\gamma}, \tag{0.6}$$

waarbij κ_s, A en γ konstanten zijn die afhankelijk zijn van de grondsoort, A en γ dimensieloos. Per plaats zal de grondsoort anders zijn: κ zal dus via de "konstanten" afhangen van de plaats (in feite $\kappa(u,x,y,z)$ i.p.v. $\kappa(u)$, $\kappa_s(x,y,z)$ i.p.v. κ_s, etc.), maar dat hebben we gemakshalve niet aangegeven in (0.6). Experimentele waarden voor de konstanten zijn te vinden in tabel 0.1.

De divergentie van het snelheidsveld, $\nabla\cdot\vec{v}$ (zie (0.8)), vertelt hoeveel grondwater er lokaal bijkomt of afgaat. Dit kan gebeuren via putten en bronnen, door rivieren, neerslag, etc., maar ook doordat de grondwater absorbeert of weer loslaat. Dit laatste is afhankelijk van de waterdruk en de grondsoort. Experimenteel blijkt de absorptie-coëfficiënt q beschreven te kunnen worden door

$$q(u) = \frac{\alpha(\theta_s - \theta_r)}{\alpha + |u|^\beta} + \theta_r \tag{0.7}$$

grondsoort	α	β	θ_s	θ_r
zand	$1.611\,10^6$	3.960	0.287	0.075
klei	739.0	4.00	0.495	0.124
`test`	`1`	`2`	`2`	`1`

TABEL 0.2
Konstanten in de absorptie-coëfficiënt voor verschillende grondsoorten

met α, β, θ_s en θ_r grondsoort afhankelijke konstanten: θ_s is het maximale vochtgehalt, θ_r het minimale (waarom?). Zie tabel 0.2 voor experimenteel gevonden waarden. Ook hier hangen de "konstanten" weer of van de plaats en zouden we in feite $q(u, x, y, z)$ moeten schrijven i.p.v. $q(u)$.

De grondwatervergelijking ziet er dus als volgt uit

$$\nabla \cdot \vec{v} \equiv \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = Q + \frac{\partial q}{\partial t}, \tag{0.8}$$

waarbij $Q = Q(t, x, y, z)$ de bijdrage door putten, bronnen, rivieren en neerslag weergeeft.

Opmerkingen. De druk is nooit negatief: $u \geq 0$.

Als er geen grondwater is, stroomt er ook niets:
als $u(t, x, y, z) = 0$ dan $\vec{v}(t, x, y, z) = \vec{0}$.

De invloed van de zwaartekracht is verwerkt in de definitie van de snelheid (zie (0.5)). Door de grad ($\nabla\cdot$) in (0.8) raken we in (0.8) de invloed van de zwaartekracht weer kwijt. Een onderdringbare grondlaag aan de onderkant (zie (0.9)) laat echter de zwaartekracht weer "voelen" in de druk term (is het redelijk om te verwachten dat de zwaartekracht pas voelbaar is als er een ondoordringbare of slecht doordringbare grondlaag onder zit?).

In deze opgave bekijken we verder alleen het watertransport in de z-richting (voor $z \in [-Z, 0]$; Z is de diepte van de grondlaag). Formuleer het 1-dimensionale probleem.

Randvoorwaarden.

Bovenrand. We nemen aan dat er geen rivieren, bronnen of putten zijn. Water wordt toegevoegd door neerslag aan de bovenkant (in $z = 0$). De hoeveelheid regen wordt gegeven door $R(t)$ m^3 per dag per m^2 grondoppervlak: R is bekend. De waterdruk $u(t, 0)$ op tijdstip t in de bovenrand zal gelijk zijn aan de hoogte $h(t)$ van de regenplas: $u(t, 0) = h(t)$. De hoogte $h(t)$ verandert door toevoeging van regenwater en doordat grondwater de grond in stroomt: $\frac{d\,h}{dt}(t) = R(t) - \vec{v}(t, 0)\cdot\vec{n}$, met $\vec{n}$ de normaalvektor in het punt $z = 0$. Dus

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, 0) = R(t) - \vec{v}(t, 0) \cdot \vec{n}$$

Onderrand. We nemen aan dat er aan de onderkant (in $z = -Z$) een (vrijwel) onderdringbare laag zit: er stroomt daar (vrijwel) geen water weg. Dus (Neumann randvoorwaarde)

$$\vec{v}(t, -Z) \cdot \vec{n} = 0, \tag{0.9}$$

met $\vec{n}$ de normaalvektor in $z = -Z$ (of Robin randvoorwaarde $\vec{v}(t, -Z) \cdot \vec{n} = \delta\, u(t, -Z)$).

Diskretiseer in de z-richting met eenvoudige voorwaartse en terugwaartse differentie. Diskretiseer in de tijdsrichting met Euler forward. Onderzoek de stabiliteit. Bedenk dat we voor Euler forward een stabiliteitsrestriktie van de vorm $\Delta t/(\Delta)z^2 \leq \eta_{\text{CFL}}$ moeten verwachten waarbij η_{CFL} een konstante is, het zogenaamde **CFL-getal** (waarom?). Voor het CFL-getal voor het huidige probleem speelt $\max|1/\frac{\partial q}{\partial u}|$ een rol, waarbij het maximum genomen is over de relevante u-waarden (waarom? Hint: bedenk dat

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{\partial q}{\partial u} \quad).$$

Diskretiseer ook volgens een Euler backward benadering. Analyseer de stabiliteit en vergelijk de methode met die gebaseerd op Euler forward (let op de hoeveelheid werk). Moeten we de Euler backward benadering ook toepassen op κ (en op $\frac{\partial q}{\partial u}$) of kunnen we de waarde gebruiken uit het voorgaande tijdstip (Euler forward voor κ, als het ware)?

Tentamenvervangende Opdracht
Numeriek Oplossen van Gewone Differentiaalvergelijkingen

5. [Tentamen].

Stel een schriftelijk tentamen op over de behandelde stof waaraan kandidaten, met gebruikmaking van het diktaat, 3 à $3\frac{1}{2}$ uur kunnen werken.
(De essentiële onderdelen uit de theorie moeten allemaal min of meer aan de orde komen. Zorg er voor dat de kandidaat niet alleen technische vaardigheid kan demonstreren maar dat hij/zij ook theoretisch inzicht kan uiten. Vraag niet twee keer naar dezelfde techniek. Het tentamen is geen intelligentie-test: iemand die goed gestudeerd heeft en alles begrepen heeft verdient een acht of meer te halen. Iemand die bovendien kreatief met de stof kan omspringen verdient een hoger cijfer: moeilijkere vragen zijn dus wel geoorloofd en zelfs gewenst, maar overvraag niet.)

Lever bij het tentamen een uitwerking in van alle vraagstukken.
(Hou de uitwerkingen zo beknopt mogelijk. Als er meerdere oplossingen mogelijk zijn, die voor de hand liggen, geef die dan wel aan.)
Geef voor ieder onderdeel een punten waardering. Geef ook aan hoe eventuele gedeeltelijke antwoorden gehonoreerd zouden kunnen worden.

Tentamenvervangende Opdracht
Numerieke Gewone Differentiaalvergelijkingen

Schrijf een verslag in "artikel stijl". Gebruik daarbij de vragen die in onderstaande opgave geformuleerd zijn als richtlijn. De vraagstellingen zelf dienen in het verslag ook onderbouwd te worden. Het verslag is dus geen kollektie antwoorden op vragen ("tentamen stijl").

Probeer je argumenten theoretisch te onderbouwen. Als je argumenten berusten op aannamen die theoretisch niet of moeilijk te onderbouwen zijn, toon dan de redelijkheid van de aannamen experimenteel aan.

Samenwerken mag (maximaal twee personen). Iedereen blijft wel individueel verantwoordlijk voor het **hele** verslag (de discussie bij de individuele nabespreking kan het cijfer bepalen).

Aarzel niet om te overleggen met de docent (het schrijven van een verslag is geen tentamen: ook bij de voorbereiding op een tentamen kan je hulp vragen van de docent).

Voor dit vak zijn 4 studiepunten gereserveerd. Dat betekent 4 weken werk. Omdat je al een kleine week aan het vak besteed hebt met het volgen van colleges en werkcolleges, moet je voor het werken aan het verslag op 3 weken rekenen.

6. [ODE suite].

Werk het artikel "The MATLAB ODE suite" van L. F. Shampine and M. W. Reichelt (SIAM J. Sci. Comput. 18 (1997), pp. 1–22.) uit (met wat instruktieve numerieke voorbeelden).

Tentamenvervangende Opdracht
Numerieke Gewone Differentiaalvergelijkingen

Schrijf een verslag in "artikel stijl". Gebruik daarbij de vragen die in onderstaande opgave geformuleerd zijn als richtlijn. De vraagstellingen zelf dienen in het verslag ook onderbouwd te worden. Het verslag is dus geen kollektie antwoorden op vragen ("tentamen stijl").

Probeer je argumenten theoretisch te onderbouwen. Als je argumenten berusten op aannamen die theoretisch niet of moeilijk te onderbouwen zijn, toon dan de redelijkheid van de aannamen experimenteel aan.

Samenwerken mag (maximaal twee personen). Iedereen blijft wel individueel verantwoordlijk voor het **hele** verslag (de discussie bij de individuele nabespreking kan het cijfer bepalen).

Aarzel niet om te overleggen met de docent (het schrijven van een verslag is geen tentamen: ook bij de voorbereiding op een tentamen kan je hulp vragen van de docent).

Voor dit vak zijn 4 studiepunten gereserveerd. Dat betekent 4 weken werk. Omdat je al een kleine week aan het vak besteed hebt met het volgen van colleges en werkcolleges, moet je voor het werken aan het verslag op 3 weken rekenen.

7. [MATLAB codes].

Analyseer de MATLAB codes ode23.m en ode15s.m.