Themadag wiskunde en informatica 11 april 1992
Rijksuniversiteit Utrecht

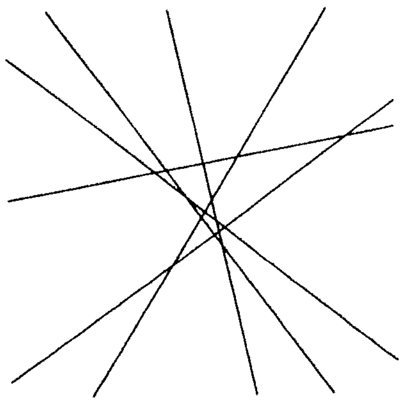
Lijnenspel*

Jan Stienstra

Mathematisch Instituut der Rijksuniversiteit te Utrecht

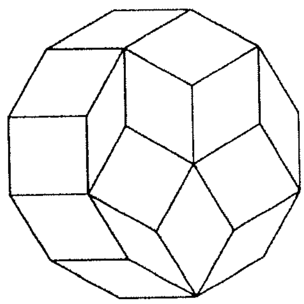
Postbus 80.010, 3508 TA Utrecht

Van lijnpatronen naar betegelde veelhoeken



figuur 1

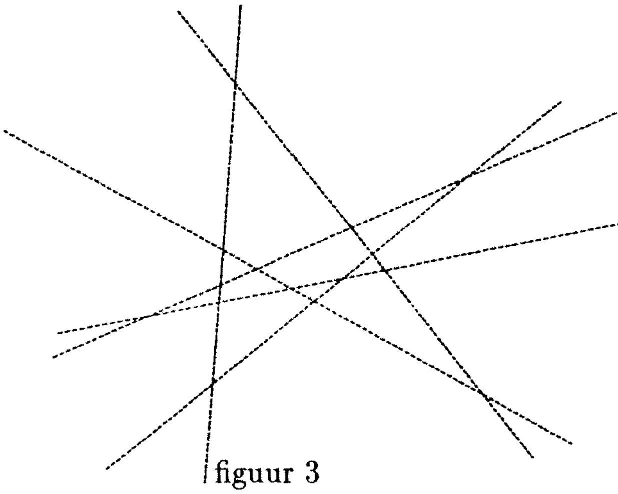
Wat is het verband tussen deze twee figuren ?



figuur 2

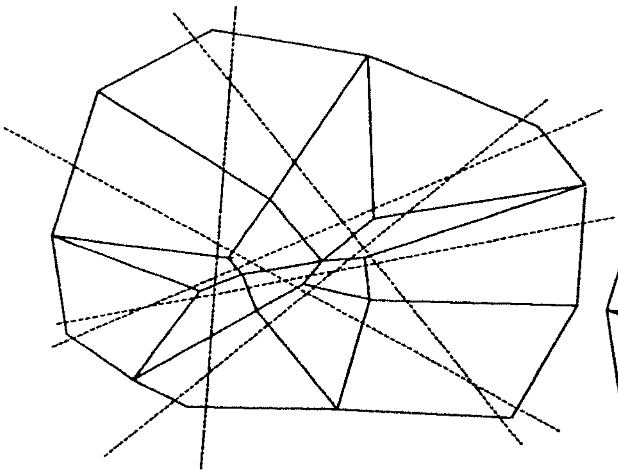
Teken figuur 1 eens met een zwart potlood na op een stuk papier. De lijnen, doorgetrokken tot aan de rand, verdelen het vlak in 22 gebieden. Wijs in elk gebied één punt aan en verbind vervolgens met een rood potlood elk van die punten met zijn buren; hier noemen we twee punten buren als de bijbehorende gebieden een zijde gemeenschappelijk hebben. De rode tekening

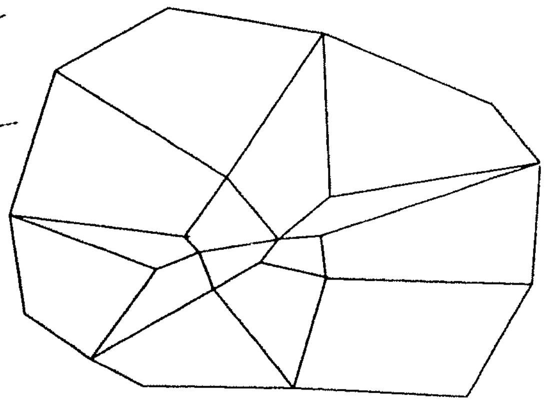
*tekst bij een voordracht op de Themadag van de Faculteit der Wiskunde en Informatica van de Rijksuniversiteit te Utrecht op 11 april 1992 bestaat uit vierhoeken die eigenlijk net zo aan elkaar vast zitten als de ruiten in figuur 2. *Laten we dit nog eens oefenen.*



figuur 3

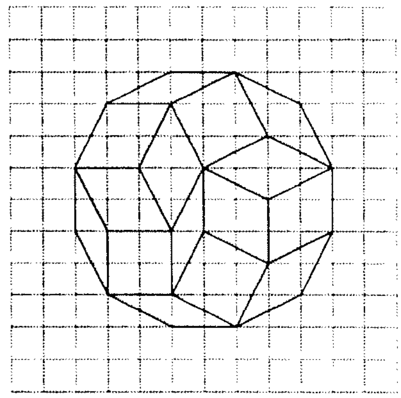
Teken zelf zes lijnen; zorg ervoor dat elk paar lijnen in de tekening een snijpunt heeft en dat nergens drie of meer lijnen door één punt gaan. Dan zie je weer 15 snijpunten en 22 gebieden. Wijs weer in elk gebied één punt aan en verbind met een rood potlood elk van die punten met zijn buren.





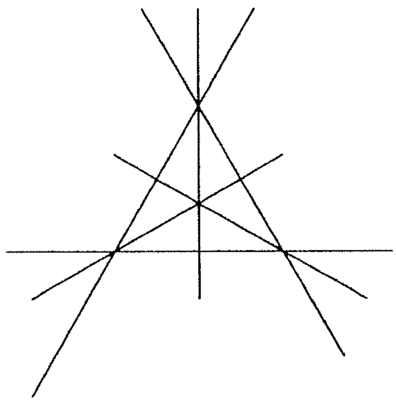
Het resultaat is nog een ruwe schets, maar de 15 vierhoeken en de manier waarop ze aan elkaar vastzitten zijn duidelijk te zien. Dit patroon van 15 vierhoeken kun je gemakkelijk omzetten in 15 ruiten, die op dezelfde manier aan elkaar zitten en die samen een bijna regelmatige twaalfhoek vullen.

Om een helemaal regelmatige twaalfhoek vol ruiten te krijgen (zoals in figuur 2) moet je vrij nauwkeurig meten. Er is echter een bijna regelmatige twaalfhoek die je op gewoon vierkantjespapier kunt tekenen en waarin alle hoekpunten van de ruiten die je voor je mooie plaatje nodig hebt, roosterpunten zijn op het vierkantjespapier. Nu hoef je alleen maar vierkantjes te tellen en niks meer te meten!

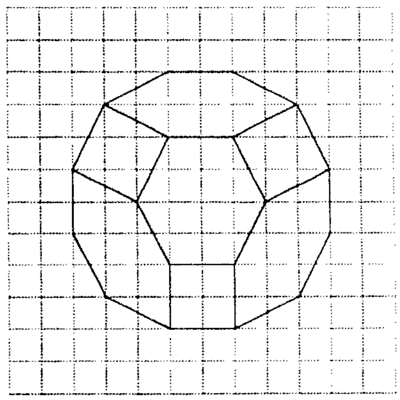


figuur 4

Eigenlijk is het helemaal niet nodig om te verbieden dat in de lijnentekening nergens drie of meer lijnen door één punt gaan. Wel is het nodig te eisen dat elk tweetal lijnen in de tekening een snijpunt heeft. De figuren 5 en 6 tonen een voorbeeld.

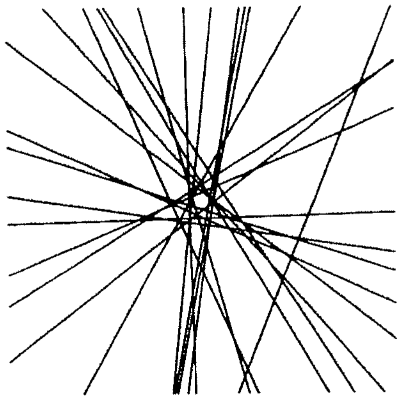


figuur 5

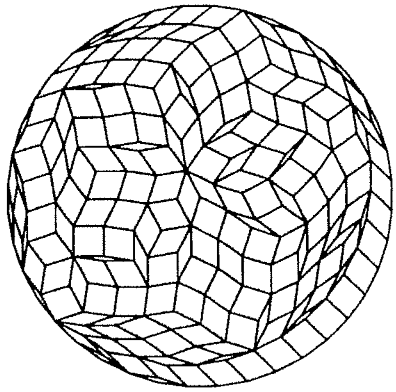


figuur 6

Meer dan zes lijnen mag ook, maar wordt al gauw te bewerkelijk voor handwerk. Zoals we verderop zullen zien kan dit werk ook door een computer worden uitgevoerd. De figuren 7 en 8 vertonen een met een computer geproduceerd voorbeeld met 20 lijnen.



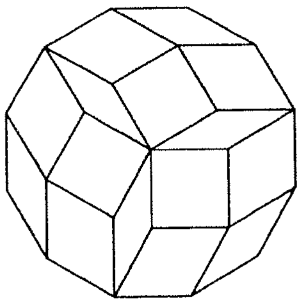
figuur 7



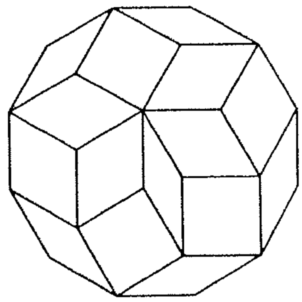
figuur 8

Van betegelde veelhoeken naar lijnpatronen

In het voorgaande hebben we eerst zes lijnen getekend en daarbij een met ruiten betegelde (regelmatige) twaalfhoek gemaakt. Algemener, bij N lijnen kunnen we zo een betegelde (regelmatige) $2N$-hoek maken. Soms kan het ook omgekeerd. *Deskundigen hebben vastgesteld dat voor* $N = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ *iedere met ruiten betegelde (regelmatige)* $2N$*-hoek afkomstig is van een tekening met* N *lijnen.*



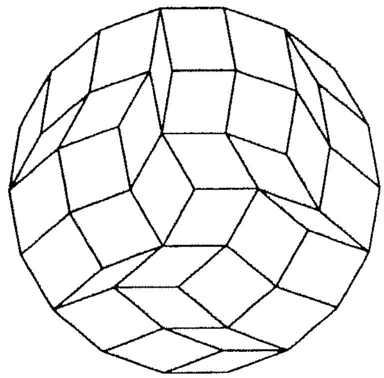
Probeer zelf maar eens bij de plaatjes hiernaast een lijnentekening te vinden



figuur 9a

figuur 9b

Diezelfde deskundigen zeggen dat het plaatje hiernaast *niet* kan horen bij een lijnentekening.



figuur 10

Hoeveel snijpunten? Hoeveel gebieden?

Een paar bladzijden terug staat: Teken zelf zes lijnen; zorg ervoor dat elk paar lijnen in de tekening een snijpunt heeft en dat nergens drie of meer lijnen door één punt gaan. Dan zie je weer 15 snijpunten en 22 gebieden. *Hier wordt nog voor jij je tekening hebt gemaakt, voorspeld dat er 15 snijpunten en 22 gebieden te zien zullen zijn. Hoe kan dat?*

Laten we eens een rechthoek met zo maar een aantal rechte lijnen in stukken verdelen. We interesseren ons nu verder alleen voor wat er binnen of op de randen van die rechthoek te zien is. Dan zien we

- snijpunten: er zijn snijpunten waar twee, of zelfs meer, van die lijnen elkaar snijden, en er zijn snijpunten waar een (of zelfs meer) van die lijnen een zijde van die rechthoek snijdt (snijden); ook zijn er nog de vier hoekpunten van de rechthoek, die we mee zullen tellen. *Zeg dat we in het totaal S snijpunten zien*
- lijnstukken: een lijnstuk is een stuk van die lijnen of van de rand van de rechthoek, dat tussen twee snijpunten ligt en dat zelf niet door snijpunten in kleinere stukken wordt gedeeld. *Zeg dat we in het totaal L lijnstukken zien*
- gebieden: een gebied is een deel van de rechthoek dat door lijnstukken

wordt omsloten en dat niet door lijnstukken in kleinere stukken wordt verdeeld. *Zeg dat we in het totaal G gebieden zien*

Een interessante stelling in de wiskunde zegt dat in zo'n geval altijd geldt

$$S - L + G = 1$$

Probeer het maar eens uit: twee snijdende lijnen op een rechthoekig vel papier. Als je nu niet net zo'n lijn door een hoek van het papier laat gaan, zijn er 9 snijpunten (1 op het papier, 4 op de rand en de 4 hoekpunten van het vel papier), 12 lijnstukken (4 op die lijnen en 8 op de rand), 4 gebieden. Inderdaad is: $9 - 12 + 4 = 1$! Tel het ook maar eens na in figuur 5.

Terug naar: "Teken zelf zes lijnen; zorg ervoor dat elk paar lijnen in de tekening een snijpunt heeft en dat nergens drie of meer lijnen door één punt gaan. Teken alles op een rechthoekig vel papier zo dat geen lijn door een hoek van het papier gaat en ook zo dat geen snijpunt van die lijnen op de rand van het papier ligt." *Hoeveel snijpunten zijn er nu?*

Ieder van die 6 lijnen snijdt de andere 5 lijnen, maar als je dat als 6×5 snijpunten telt tel je elk snijpunt dubbel. Het juiste aantal van dit soort snijpunten is dus $6 \times 5/2 = 15$. *Dit zijn de 15 waar we het eerder over hadden.* Voor de toepassing van de stelling moeten we nog meetellen: de 4 hoekpunten van het papier en voor elk van die 6 lijnen 2 snijpunten met de rand. *Voor de stelling moeten we dus rekenen met* $15 + 4 + 12 = 31$ *snijpunten.*

Op ieder van die 6 lijnen worden door de andere 5 lijnen en door de rand van het papier 6 lijnstukken uitgesneden. Verder snijden de 6 lijnen en de hoeken van het papier 16 lijnstukken uit op de rand. *Voor de stelling moeten we dus rekenen met* $6 \times 6 + 16 = 52$ *lijnstukken.*

Volgens de stelling zijn er nu $1 - 31 + 52 = 22$ *gebieden*

Wanneer je in de bovenstaande berekening nagaat wat de bijdrage van de rand van het papier is, dan merk je dat langs de rand snijpunten en lijnstukken elkaar netjes opvolgen en dat er (daarom) op de rand evenveel snijpunten als lijnstukken liggen. In de telling in de stelling worden de snijpunten met een + geteld en de lijnstukken met een −. *De netto bijdrage van de rand aan de telling in de stelling is dus 0.*

In het 6-lijnen-probleem hadden we het aantal gebieden daarom ook kunnen berekenen door $1 - 15 + 36 = 22$.

Wiskundigen proberen vaak om eenmaal verkregen resultaten te generaliseren. Laten wij dat hier ook proberen. Teken in gedachte N lijnen; zorg ervoor dat elk paar lijnen in de tekening een snijpunt heeft en dat nergens drie of meer lijnen door één punt gaan. Teken alles op een rechthoekig vel papier zo dat geen lijn door een hoek van het papier gaat en ook zo dat geen snijpunt van die lijnen op de rand van het papier ligt. Als we de snijpunten van die lijnen met de rand en de lijnstukken op de rand niet meetellen (volgens de vorige alinea hoeft dat immers niet meer), dan vinden we

$$\frac{N(N-1)}{2} \quad \text{snijpunten en} \quad N^2 \quad \text{lijnstukken}$$

en dus

$$1 - \frac{N(N-1)}{2} + N^2 = 1 + \frac{N(N+1)}{2} \quad \text{gebieden}$$

Tel maar na bij $N = 3$, bij $N = 4$, bij $N = 5, \ldots$

-0+ Tekenoverzichten

Om van figuur 1 naar figuur 2 te komen op de hiervoor beschreven manier hebben we behalve papier en potloden, vooral onze ogen en onze hersens gebruikt. Een computer heeft die middelen niet ter beschikking. *Echter het snijpatroon van de lijnen kan worden omgezet in een tekenoverzicht van* 15×6 *getallen* $0, +1, -1$, *dat weergeeft hoe de 15 snijpunten liggen t.o.v. de 6 lijnen. Daarmee kan een computer werken!*

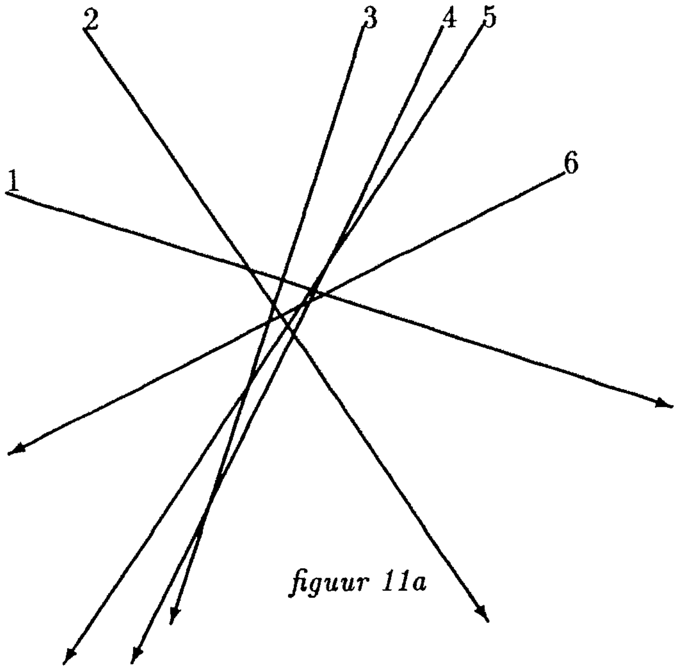
Zo'n tekenoverzicht maken we zelf als volgt. De zes lijnen snijden de rand van het papier in twaalf punten. Zet bij een van deze punten nummer 1 en nummer vervolgens de twaalf snijpunten 1,...,12 in de volgorde waarin je ze tegenkomt als je met de wijzers van de klok mee langs de rand loopt (voorbeeld: figuur 11b). Bij elke lijn staan nu (aan de uiteinden) twee getallen. Een die twee getallen is 1, 2, 3, 4, 5 of 6; het andere is 7, 8, 9, 10, 11 of 12; het verschil is steeds 6. De lijn met het uiteinde waar 1 bij staat noemen we nu lijn 1, de lijn met het uiteinde waar 2 bij staat noemen we nu lijn 2, enzovoort tot en met lijn 6. Op iedere lijn is ook een richting vastgelegd gaande van het uiteinde met het lage nummer naar het uiteinde met het hoge nummer (zie figuur 11a). Als we over zo'n lijn in de aangegeven richting lopen, zien we in het vlak punten die links van de lijn liggen, punten die rechts van de lijn liggen en punten die erop liggen. Voor ieder punt in het vlak kunnen we nu met een $+$, $-$ of 0 teken aangeven hoe het ligt ten opzichte van die lijn: $+$ betekent "links", $-$ betekent "rechts" en 0 betekent erop. We hebben zes lijnen en daarmee voor ieder punt in het vlak zes tekens: een punt met $+--+++$ ligt links van de lijnen 1, 4, 5, 6 en rechts van de lijnen 2, 3; een punt met $+--0++$ ligt links van de lijnen 1, 5, 6, rechts van de lijnen 2, 3 en op lijn 4; een rijtje tekens waarin twee nullen staan hoort bij het snijpunt van twee lijnen.

De lijst tekens van de 15 snijpunten noemen we het *absolute tekenoverzicht* van de lijnentekening. Figuur 11a laat een voorbeeld zien.

Er is nog een andere manier om tekenoverzichten te maken. Daarvoor hebben we een referentiepunt $\bullet$ nodig, dat niet op een van de lijnen mag liggen (zie figuur 11b). Voor elk punt in het vlak dat niet op een van de zes lijnen ligt kunnen we met zes $+/-$ tekens aangeven hoe het ligt t.o.v. de zes lijnen en het referentiepunt $\bullet$: $+--++-$ betekent dat het punt vergeleken met $\bullet$ aan dezelfde kant ligt van de lijnen 1, 4, 5 en aan de andere kant van de lijnen 2, 3, 6. Voor punten die op een of meer van de zes lijnen liggen kunnen we net zoiets doen, maar dan schrijven we een 0 i.p.v. een $\pm$-teken als het punt op de betreffende lijn ligt. De lijst met tekens van de 15 snijpunten is weer een tekenoverzicht van de lijnentekening. Omdat het tekenoverzicht dat op deze manier is gemaakt afhangt van de keuze van het referentiepunt, noemen we dit het *het relatieve tekenoverzicht t.o.v. het referentiepunt* $\bullet$. Figuur 11b laat een voorbeeld zien.

Het verband tussen het absolute tekenoverzicht en het relatieve tekenoverzicht t.o.v. $\bullet$ is eenvoudig te doorgronden: als, bijvoorbeeld, een punt Q relatieve tekens $+--++-$ heeft liggen $\bullet$ en Q aan dezelfde kant van de lijnen 1, 4, 5 en aan verschillende kanten van de lijnen 2, 3, 6; als $\bullet$ zelf, bijvoorbeeld, absolute tekens $++-+-+$ heeft, ligt $\bullet$ links van de lijnen 1, 2, 4, 6 en rechts van de lijnen 3, 5; in dit geval ligt Q dus links van de lijnen 1, 3, 4 en rechts van de lijnen 2, 5, 6; de absolute tekens van Q zijn dus $+-++--$. Kortom (zie ook figuur 11)

$$\textit{rel. tekens van } Q \times \textit{abs. tekens van } \bullet = \textit{abs. tekens van } Q$$



figuur 11a

absoluut tekenoverzicht

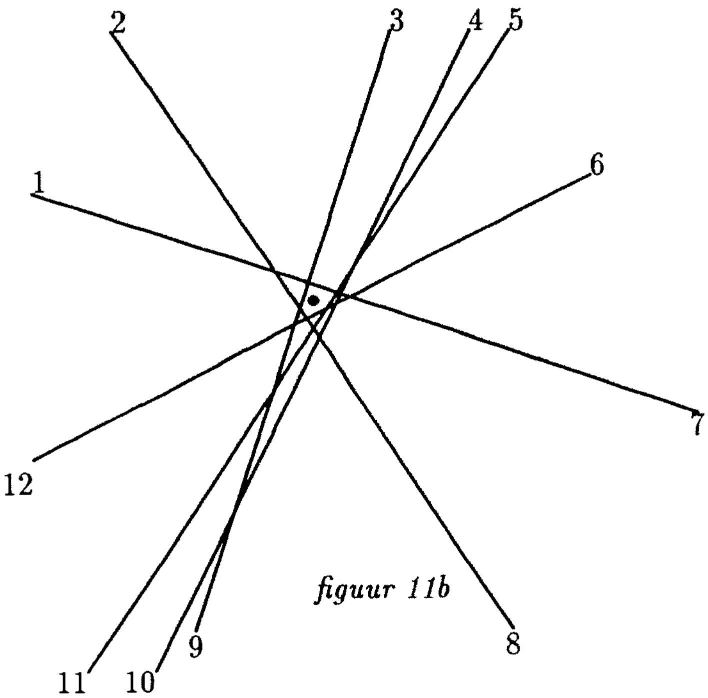
0	0	−	−	−	−
0	+	0	−	−	−
0	+	+	0	+	−
0	+	+	−	0	−
0	+	+	+	+	0
−	0	0	−	−	−
−	0	+	0	+	+
−	0	+	−	0	+
−	0	+	−	−	0
−	−	0	0	+	+
−	−	0	−	0	+
−	−	0	−	−	0
+	+	+	0	0	−
−	+	+	0	+	0
−	+	+	−	0	0

absolute tekens van •

−	+	+	−	−	−

relatief tekenoverzicht

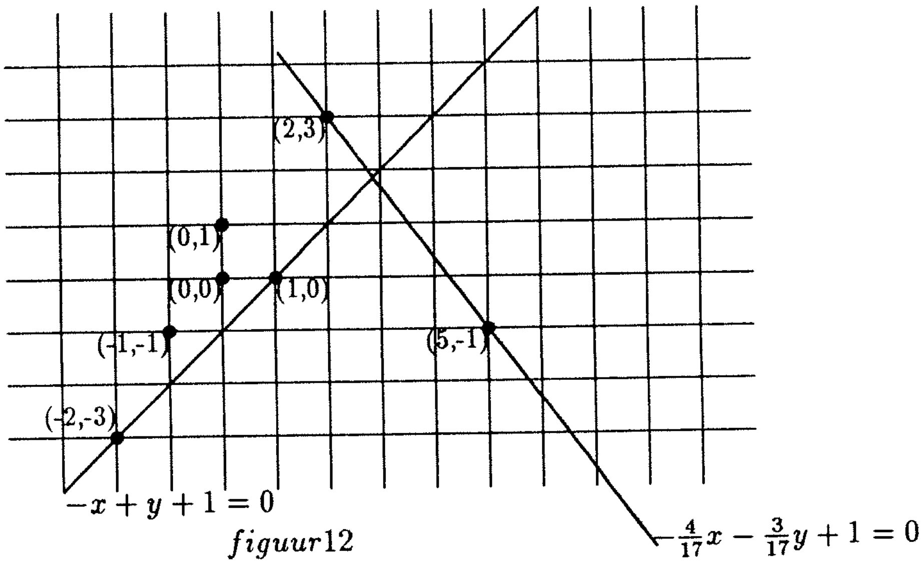
0	0	−	+	+	+
0	+	0	+	+	+
0	+	+	0	−	+
0	+	+	+	0	+
0	+	+	−	−	0
+	0	0	+	+	+
+	0	+	0	−	−
+	0	+	+	0	−
+	0	+	+	+	0
+	−	0	0	−	−
+	−	0	+	0	−
+	−	0	+	+	0
−	+	+	0	0	+
+	+	+	0	−	0
+	+	+	+	0	0



figuur 11b

Toch hebben wij weer onze ogen en onze hersens gebruikt om te *zien* of een punt aan dezelfde kant van een lijn ligt als het referentiepunt • of juist aan de andere kant. *Een computer kan zo'n tekenoverzicht* berekenen *door gebruik te maken van coördinaten, matrices en determinanten.* Dat gaat zo:

Coördinaten: We kiezen op een vel milimeter papier een vast punt: de *oorsprong.* De positie van een punt op het papier kan nu worden beschreven door aan te geven hoeveel hokjes horizontaal naar rechts en vervolgens hoeveel hokjes verticaal naar boven je moet gaan om van de oorsprong naar naar dat punt te komen. *We zeggen dat een punt coordinaten* (x, y) *heeft als je* x *hokjes naar rechts en* y *hokjes naar boven moeten gaan.* Hier zijn x en y getallen, die ook negatief mogen zijn: -1 naar rechts betekent 1 naar links, -1 naar boven is 1 naar beneden. In figuur 12 zie je een aantal punten met hun coördinaten.



*figuur*12

Een lijn op ons milimeter papier, die niet door de oorsprong gaat, kunnen we ook door twee coördinaten beschrijven: het blijkt namelijk dat er bij zo'n lijn twee getallen a en b zijn zó dat de (x, y)-coördinaten van alle punten op die lijn voldoen aan de vergelijking

$$ax + by + 1 = 0.$$

Zie figuur 12 voor voorbeelden.

Zo maar een punt, met coördinaten (x, y), dat niet op die lijn ligt, ligt aan dezelfde kant van die lijn als de oorsprong als

$$a\,x + b\,y + 1 > 0$$

en ligt aan de andere kant als

$$a\,x + b\,y + 1 < 0$$

Een computer kan, wanneer hij de coördinaten (a, b) van een lijn en de coördinaten (x, y) van een punt kent, gemakkelijk vaststellen of $a\,x + b\,y + 1$ nul is, of groter dan nul, of juist kleiner dan nul en hij kan zijn conclusie weergeven met een teken 0, + resp. −.

Kijken we nu eens naar het snijpunt van twee lijnen op ons milimeter papier, die niet door de oorsprong gaan. Zeg de ene lijn heeft coördinaten (a_1, b_1) en de andere heeft coördinaten (a_2, b_2). De coördinaten (x, y) van hun snijpunt voldoen dan aan twee vergelijkingen

$$\begin{aligned} a_1\,x + b_1\,y + 1 &= 0 \\ a_2\,x + b_2\,y + 1 &= 0 \end{aligned}$$

De enige oplossing van deze twee vergelijkingen is

$$x = \frac{b_1 - b_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad \text{en} \quad y = \frac{-a_1 + a_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

Laten we er nog een derde lijn, niet door de oorsprong, bij nemen. Zeg deze lijn heeft coördinaten (a_3, b_3). Om vast te stellen of het snijpunt van de eerste twee lijnen op de derde lijn ligt, of er niet op, maar aan dezelfde kant van de derde lijn als de oorsprong, of juist aan de andere kant, moet onze computer

$$a_3 \frac{b_1 - b_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} + b_3 \frac{-a_1 + a_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} + 1$$

berekenen. We kunnen dit getal ook schrijven als

$$\frac{a_3 b_1 - a_3 b_2 - a_1 b_3 + a_2 b_3 + a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

Iemand die al genoeg wiskunde kent, herkent hier boven de streep in

$$a_1 b_2 + a_2 b_3 + a_3 b_1 - a_3 b_2 - a_2 b_1 - a_1 b_3$$

de *determinant van de matrix*

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Iedereen herkent in de kolommen van deze matrix de coördinaten van de drie lijnen.

Veronderstel nu dat we een aantal lijnen hebben, die geen van allen door de oorsprong gaan, zo dat ieder tweetal lijnen op ons milimeter papier een snijpunt heeft en zo dat nergens drie of meer lijnen door één punt gaan. Veronderstel ook dat we de coördinaten van deze lijnen kennen, dan kunnen we met de bovenstaande rekenmethode voor elk drietal van deze lijnen bepalen hoe het snijpunt van de eerste twee ligt t.o.v. de derde lijn en de oorsprong. Zo kunnen we dus ook het *relatieve tekenoverzicht t.o.v. de oorsprong* maken bij een lijnentekening.

Om een absoluut tekenoverzicht te maken moeten we afspreken in welke richting we over de lijnen lopen. We willen aannemen dat geen van de lijnen horizontaal loopt (desnoods draaien we het plaatje een klein beetje om aan deze voorwaarde te voldoen). We spreken nu af dat de lijnen van boven naar beneden worden doorlopen (zoals in figuur 11a). In termen van de coördinaten $(a_1, b_1), \ldots, (a_6, b_6)$ van de zes lijnen is dan

$$\textit{absolute tekens van de oorsprong} =$$

$$(\textit{teken}(a_1), \textit{teken}(a_2), \textit{teken}(a_3), \textit{teken}(a_4), \textit{teken}(a_5), \textit{teken}(a_6))$$

waarbij we voor een getal a definiëren

$$\textit{teken}(a) = \begin{cases} - & \\ 0 & \text{als} \\ + & \end{cases} \begin{matrix} a < 0 \\ a = 0 \\ a > 0 \end{matrix}$$

Voor ons is deze methode niet erg geslaagd omdat we te langzaam rekenen. Voor een computer echter is het slechts secondenwerk.

Een terechte vraag is: hoe vindt de computer de coördinaten van een lijn? Het (ontwijkend) antwoord is: de lijnentekeningen bij dit verhaal zijn door een computer gemaakt, die de coordinaten opgegeven kreeg en er vervolgens de lijnen bij tekende. Die computer hoefde zelf dus geen coördinaten van lijnen te bepalen.

Van absoluut tekenoverzicht naar betegelde veelhoek

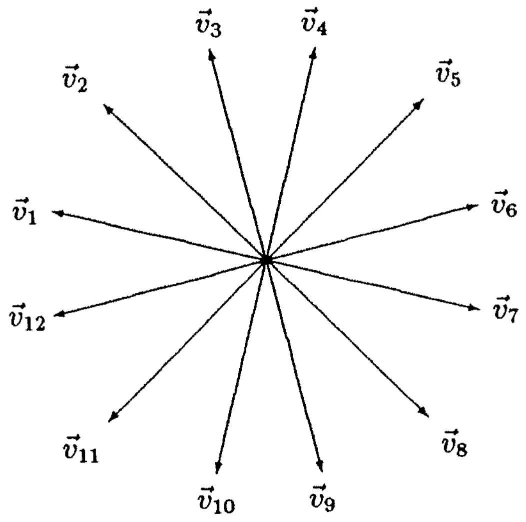
Wij en de computer hebben nu geleerd hoe we een lijnentekening kunnen vertalen in een absoluut tekenoverzicht. Voor onszelf hebben we een heel andere methode dan voor de computer, maar de uitkomst is hetzelfde. Wanneer we N lijnen hebben, zo dat ieder tweetal lijnen op ons papier een snijpunt heeft en zo dat nergens drie of meer lijnen door één punt gaan, dan bestaat dat tekenoverzicht uit $\frac{1}{2}N(N-1)$ rijen en N kolommen. De kolommen corresponderen met de lijnen en de rijen corresponderen met de snijpunten; het teken op de kruising van een rij en een kolom geeft aan hoe het betreffende snijpunt ligt ten opzichte van de betreffende lijn. In elke rij staan N tekens $0, +, -$, die we ook kunnen lezen als de getallen $0, +1, -1$. In elke rij staan precies twee nullen.

We gaan nu dat tekenoverzicht omzetten in een betegelde $2N$*-hoek.*

We tekenen een regelmatige $2N$-hoek en nummeren de hoekpunten $1, 2, 3, \ldots, 2N$, opeenvolgend, met de wijzers van de klok mee; begin maar ergens met nummer 1. Vanuit het middelpunt van deze regelmatige $2N$-hoek tekenen we een pijl naar elk hoekpunt; zo'n pijl begint in het middelpunt en eindigt in het hoekpunt. Wiskundigen en natuurkundigen zeggen meestal *vektor* in plaats van *pijl*. We hebben dus $2N$ vektoren : $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{2N}$ (zie figuur 13). Merk op dat deze vektoren voorkomen in paren die precies tegengestelde richtingen opwijzen: $\vec{v}_{i+N}$ is precies tegengesteld aan $\vec{v}_i$; men schrijft

$$\vec{v}_{i+N} = -\vec{v}_i \quad \text{voor} \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

Iedere rij van het absolute tekenoverzicht zal ons één ruit in de betegeling leveren. Zo'n ruit wordt vastgelegd door de plaats van zijn middelpunt en door de richting en de lengte van zijn zijden. Een rij van het tekenoverzicht zal fungeren als een rijtje coördinaten voor het middelpunt van die ruit, maar niet zo eenvoudig als voorheen met coördinaten die aangeven hoever je horizontaal respectievelijk verticaal moet lopen, maar wel met coördinaten die aangeven hoe je moet lopen ten opzichte van de vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_N$. Hoe dat gaat kan men snel zien aan een paar voorbeelden met $N = 6$.



figuur 13

Figuur 13 laat voor N=6 de 12 vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{12}$ zien.
$\vec{v}_7$ is precies tegengesteld aan $\vec{v}_1$:
$\vec{v}_7 = -\vec{v}_1$,
$\vec{v}_8$ is precies tegengesteld aan $\vec{v}_2$:
$\vec{v}_8 = -\vec{v}_2$,
enz.

Voorbeeld $(+1, +1, +1, 0, 0, -1)$ interpreteren we als:
loop 1 stap in de richting van $\vec{v}_1$
loop 1 stap in de richting van $\vec{v}_2$
loop 1 stap in de richting van $\vec{v}_3$
loop 0 stappen in de richting tegengesteld aan $\vec{v}_4$
loop 0 stappen in de richting van $\vec{v}_5$
loop 1 stap in de richting tegengesteld aan $\vec{v}_6$

in formulevorm kan men dit schrijven als $+1\cdot\vec{v}_1 + 1\cdot\vec{v}_2 + 1\cdot\vec{v}_3 + 0\cdot\vec{v}_4 + 0\cdot\vec{v}_5 - 1\cdot\vec{v}_6$; of korter als

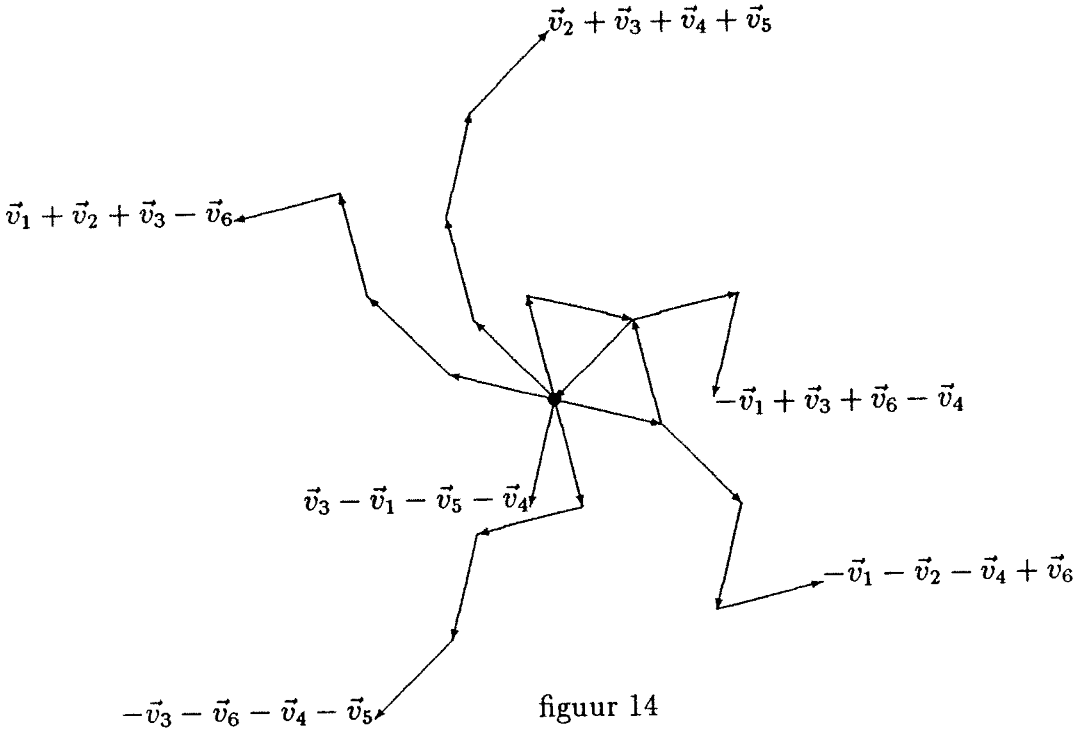
$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 - \vec{v}_6$$

Voorbeeld $(-1, 0, +1, -1, 0, +1)$ interpreteren we als:
loop 1 stap in de richting tegengesteld aan $\vec{v}_1$
loop 0 stappen in de richting van $\vec{v}_2$
loop 1 stap in de richting van $\vec{v}_3$
loop 1 stap in de richting tegengesteld aan $\vec{v}_4$
loop 0 stappen in de richting van $\vec{v}_5$
loop 1 stap in de richting van $\vec{v}_6$

in (korte) formulevorm kan men dit schrijven als

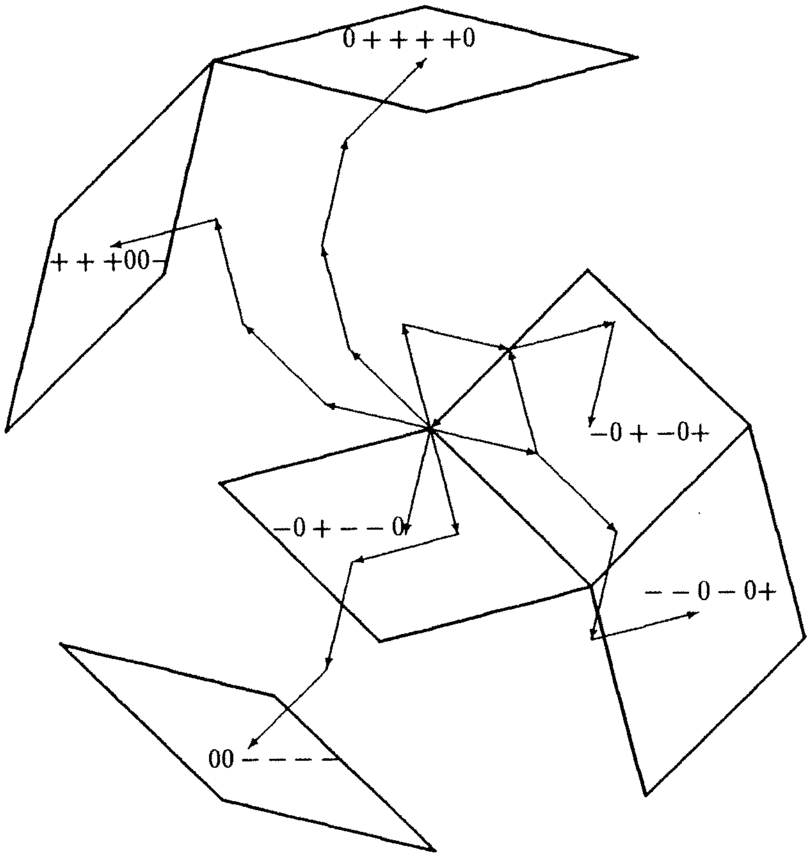
$$-\vec{v}_1 + \vec{v}_3 - \vec{v}_4 + \vec{v}_6$$

Deze en nog enkele voorbeelden zijn getekend in figuur 14.



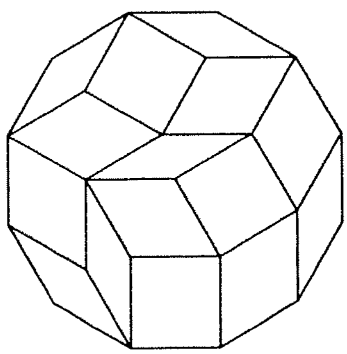
figuur 14

Iedere rij van het tekenoverzicht zal ons één ruit in de betegeling leveren. Zo'n ruit wordt vastgelegd door de plaats van zijn middelpunt en door de richting en de lengte van zijn zijden. Hierboven is uitgelegd hoe een rij van het tekenoverzicht het middelpunt van de bijbehorende ruit levert. Wat de richting en de lengte van de zijde betreft, dat is veel eenvoudiger uit te leggen: in zo'n rij van het tekenoverzicht staan precies twee nullen; zeg er staat een 0 op plaats i en een 0 op plaats j. Dan nemen we de zijden van de ruit evenwijdig aan en tweemaal zo groot als de vektoren $\vec{v}_i$ en $\vec{v}_j$. Figuur 15 laat enkele voorbeelden zien



figuur 15

Dit alles lijkt erg bewerkelijk. Voor ons is het dat ook. Een computer echter laat al heel snel bij het absolute tekenoverzicht van figuur 11a het plaatje hiernaast zien. Vergelijk figuur 16 ook met figuur 15.



figuur 16