5 Henri Poincaré en het ontstaan van de topologie

Ferdinand Verhulst

Universiteit van Utrecht

Voorwoord

Het ontstaan van de moderne topologie is onlosmakelijk verbonden met Henri Poincaré (1854-1912). Hij werd geboren in Nancy, de hoofdstad van Lotharingen, in een familie van ingenieurs, apothekers, medici en juristen. In Nancy bracht hij een gelukkige jeugd door, hij had geen problemen met school (enseignement secondaire en lycée). Wel klaagden zijn leraren soms dat zijn antwoorden niet duidelijk waren, hij vatte zijn oplossingen vaak samen in enkele zinnen omdat naar zijn mening de tussenstappen triviaal waren. Zijn interesses waren breed, pas rond zijn zestiende werd het min of meer duidelijk dat hij zich zou specialiseren in de wiskunde en natuurwetenschappen. Zijn hele leven lang behield hij echter een grote belangstelling voor filosofie, literatuur en andere kunstuitingen.

In 1873 ging Henri naar Parijs om te studeren aan de École Polytechnique, een van de 'grandes écoles' van Frankrijk. Na het behalen van het diploma van deze instelling in 1875, vervolgde hij zijn studie aan de École des Mines, eveneens een van de 'grandes écoles' . Daar voltooide hij zijn studie als mijningenieur in 1879 terwijl hij tevens in de wiskunde promoveerde aan de universiteit van Parijs (Sorbonne). Dat laatste had hij een beetje stil gehouden, zijn leermeesters aan de École des Mines zouden hebben gedacht dat hij zijn opleiding daar niet serieus genoeg nam.

Poincaré, 25 jaar oud, werkte toen inderdaad een korte tijd als mijningenieur in Vesoul en Ronchamps, werd echter al snel benoemd tot docent wiskundige analyse aan de universiteit van Caen in Normandië en in 1881 aan de Sorbonne in Parijs. Daar vervulde hij allerlei leeropdrachten, wiskunde, natuurkunde, sterrenkunde, waarschijnlijkheidsrekening, tot zijn

Figuur 5.1: Henri Poincaré, 35 jaar oud.

dood in 1912. Zijn grote talenten en zijn brede belangstelling leverden een groot aantal boeken en artikelen op met fundamentele bijdragen op al deze gebieden en de filosofie. Op het gebied van de grondslagen van de wiskunde kan hij voor een deel worden beschouwd als een voorloper van L.E.J. Brouwer. Hij benadrukte het belang van intuïtie, maar stelde ook dat een wiskundig object bestaat als er geen logische tegenstelling is in de definitie zelf of met bestaande stellingen. Een treffende uitspraak van Poincaré is: "Logica en intuïtie spelen elk een noodzakelijke rol in de wiskunde; de logica is het instrument van de bewijzen, terwijl intuïtie het instrument is van het uitvinden."

In dit hoofdstuk zullen we schetsen in wat voor problemen Henri Poincaré geïnteresseerd was in de periode 1880-1900 en hoe hij er toe kwam om de topologie te ontwikkelen. Meer details zijn te vinden in de biografie [FV].

5.1 Ideeën van voorlopers

Voorzover we weten was Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), zie fig. 5.2 de eerste die de term 'analysis situs' gebruikte. Rond 1900 kreeg de topologie die toen werd ontwikkeld in eerste instantie deze naam. Leibniz noemde analysis situs het gebied in de wiskunde waar wordt onderzocht

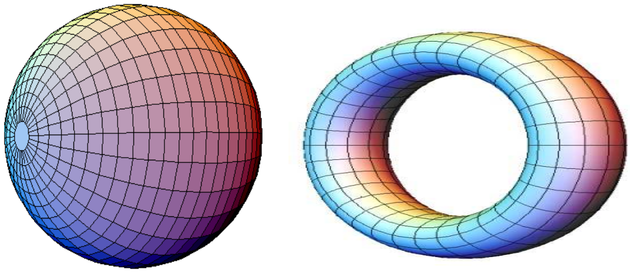
Figuur 5.2: Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

wat meetkundige objecten gemeenschappelijk hebben. Van hem is de uitspraak dat de rechte lijn een kromme is waarvan elk deel lijkt op het geheel.

Het eerste belangrijke resultaat danken we echter aan Leonhard Euler (1707-1783). Dat is de zogenaamde Euler karakteristiek χ (of veelvlak formule van Euler): beschouw een convex maar verder willekeurig veelvlak in $\mathbb{R}^3$ met V het aantal hoekpunten (vertices), E het aantal zijden (edges), F het aantal zijvlakken (faces), dan geldt voor χ dat dit getal een invariant is, namelijk

$$\chi = V - E + F = 2.$$

Na Euler ging men nadenken over eigenschappen van meer algemene gesloten oppervlakken zoals de bol of een torus, zie fig. 5.3. De Italiaan Enrico Betti (1823-1892) streefde er naar om eigenschappen van oppervlakken te karakteriseren in drie en meer dimensies. Zo kan een verschil tussen bol en torus worden aangegeven met het Betti getal P_1. Elke gesloten kromme op een bol separeert de bol in twee delen, dat wil zeggen dat je niet van een punt in het ene deel over de bol naar een punt in het andere deel kunt gaan zonder die gesloten kromme te snijden. Bij een torus kun je een gesloten kromme door het gat laten lopen, of juist om het gat, die de torus niet separeert. Voeg je zo een tweede kromme toe, dan separeren beide krommen wel. Het maximaal aantal gesloten krommen dat een oppervlak niet separeert is het Betti getal P_1, bij de bol is $P_1 = 0$. Bij de torus geldt



Figuur 5.3: Bol en torus; een gesloten kromme op de bol separeert deze in twee gebieden, bij de torus levert een gesloten kromme, bijvoorbeeld door het gat, deze separatie niet.

$P_1 = 1$; zie fig. 5.3.

Betti dacht na over de begrippen samenhang en rand van een oppervlak, hij generaliseerde deze begrippen en de Betti getallen voor meer dimensies. Wat de theorie van oppervlakken betreft was dat het zo ongeveer toen Poincaré in 1892 zijn eerste artikel over topologie publiceerde.

5.2 Poincaré en de meetkunde

Hoe kwam Poincaré er toe om na te denken over analysis situs (topologie), over "zaken die meetkundige objecten gemeenschappelijk hebben"?

Het eerste artikel van Poincaré in 1874, hij was nog student aan de École Polytechnique, ging over een klassiek meetkundig probleem. Meetkunde was een belangrijk onderwerp in zijn opleiding, maar belangrijker nog was dat zijn supervisors, onder anderen Gaston Darboux (1842-1917), benadrukten dat meetkunde en analyse elkaar aanvullen bij het verkrijgen van wiskundig inzicht. Wiskunde was voor hen geen vakgebied dat opgesplitst is in deelgebieden die omheind zijn door hoge muren. Voor sommige problemen kom je een heel eind met analyse, maar meetkunde kan daar een aanvullende, verhelderende kijk op leveren. Ook de algebra geeft vaak nieuwe inzichten.

We bekijken een aantal problemen waarmee Poincaré zich bezig hield, maar die niet direct de topologie betreffen, in de periode rond 1880 tot 1900.

Figuur 5.4: Gaston Darboux (1842-1917), een van de supervisors bij het proefschrift van Henri Poincaré.

Zijn behandeling van deze problemen wordt al gekenmerkt door aanzetten van topologische concepten.

5.2.1 Tweede orde differentiaalvergelijkingen

Poincaré's proefschrift (1879) had als onderwerp eerste orde partiële differentiaalvergelijkingen. Dat onderzoek leidde tot gewone differentiaalvergelijkingen met singuliere punten, waarden van de onafhankelijke variabele waar de coëfficiënten onbegrensd worden. Bijvoorbeeld $x = 0$ van de vergelijking:

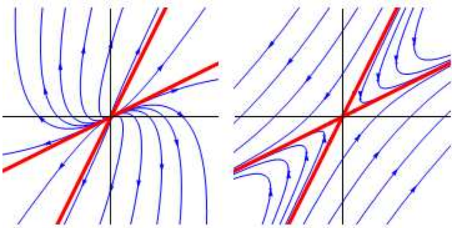
$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0.$$

In Poincaré's werk over automorfe functies komt dit thema opnieuw terug.

Zijn Mémoire over differentiaalvergelijkingen die in 1881-1882 verscheen is van blijvend belang gebleken. In de Mémoire voert hij de nu algemeen aanvaarde meetkundige klassifikatie in van evenwichtspunten van tweede orde differentiaalvergelijkingen (zadel-, spiraal-, knoop- en centrumpunt). Beschouw eens het tweede orde stelsel differentiaalvergelijkingen met Euclidische variabelen x, y:

$$\dot{x} = f(x, y),\ \dot{y} = g(x, y). \tag{5.1}$$

Zoals gebruikelijk staat $\dot{x}$ voor de afgeleide naar de tijd t. De rechterleden zijn voldoende glad (differentieerbaar). Evenwichtsoplossingen (x_0, y_0)



Figuur 5.5: Evenwichten voor vgl. (5.2); links een knoop in $(0,0)$, rechts een zadel.

voldoen aan:

$$f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0.$$

Voer nu de translatie $x - x_0 = u$, $y - y_0 = v$ uit, lineariseer in een omgeving van $u = v = 0$ en noem de variabelen weer x en y. We krijgen het stelsel met constante coëfficiënten:

$$\begin{cases} \dot{x} &= ax + by, \\ \dot{y} &= cx + dy. \end{cases} \tag{5.2}$$

Hoe zien de oplossingen van vgl. (5.2) er uit in een omgeving van $(0,0)$? Poincaré classificeerde de oplossingen en het evenwichtspunt $(0,0)$ als volgt. Beschouw de niet-singuliere matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

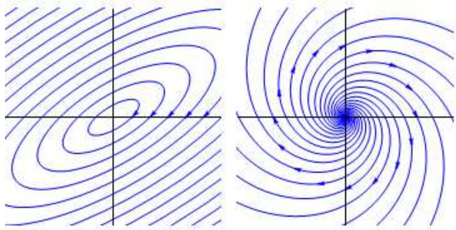
Bereken de eigenwaarden $\lambda_{1,2}$ van de matrix, er zijn dan vier standaard mogelijkheden:

1. λ_1 en λ_2 zijn reëel en met gelijk teken. Het evenwicht $(0,0)$ wordt een 'knoop' genoemd; zie fig. 5.5.

2. λ_1 en λ_2 zijn reëel en hebben verschillend teken. Het evenwicht $(0,0)$ wordt een 'zadel' genoemd; zie fig. 5.5.

3. λ_1 en λ_2 zijn complex (imaginair deel ongelijk nul) met reël deel ongelijk nul. Het evenwicht $(0,0)$ wordt een 'spiraalpunt' genoemd; zie fig. 5.6.

4. λ_1 en λ_2 zijn complex (imaginair deel ongelijk nul) met reël deel nul. Het evenwicht $(0,0)$ wordt een 'centrumpunt' genoemd; zie fig. 5.6.



Figuur 5.6: Evenwichten voor vgl. (5.2); links een centrumpunt in $(0, 0)$, rechts een spiraal.

Als de matrix singulier is, zijn een of twee eigenwaarden nul en hebben we een gedegenereerd evenwichtspunt. Opmerkelijk is dat de dynamica in een omgeving van een evenwichtspunt hiermee behalve analytisch ook meetkundig is gekarakteriseerd. Later bewees Poincaré dat het gedrag van de oplossingen in de buurt van een evenwichtspunt in het geval van knoop, zadel of spiraal, bijna gelijk is (een beetje vervormd) voor de oorspronkelijke, nietlineaire vergelijkingen (5.1).

In de Mémoire leidt Poincaré nog meer belangrijke stellingen af, speciaal de indexstelling. Deze zegt het volgende. Beschouw het fasevlak van de twee-dimensionale vergelijking (5.1). Construeer eens een enkelvoudige, maar verder willekeurige gesloten kromme K in het fasevlak. We doorlopen deze gesloten kromme K één keer in positieve richting; het quotiënt $f(x, y)/g(x, y)$ van de rechterleden van vgl. (5.1) zal dan h keer van $-\infty$ naar $+\infty$ springen, k keer van $+\infty$ naar $-\infty$. We noemen I met

$$I = \frac{h - k}{2}$$

de index van de gesloten kromme. Bij het doorlopen van de kromme K zal de vector $(f(x, y), g(x, y))$ over een hoek $2\pi I$ gedraaid zijn. De evenwichtspunten van de vergelijking corresponderen met de nulpunten van $f(x, y), g(x, y)$. Voor een gesloten kromme K waarop geen evenwichtspunt ligt concluderen we:

- Als in het inwendige van K geen evenwichtspunt ligt is zijn index $I = 0$.
- Als er precies één evenwichtspunt in het inwendige van K ligt geldt $I = -1$ als het een zadel is, $I = +1$ als het een knoop, centrum- of spiraalpunt is.

- Als het inwendige van K, N knopen bevat, F spiraalpunten en C zadels, dan is de index van K: $I = N + F - C$.
- De index van een gesloten oplossingskromme (dus niet willekeurig, maar corresponderend met een periodieke oplossing) is $I = +1$.

Uit het laatste resultaat volgt dat binnen een gesloten oplossingskromme altijd minstens één evenwichtspunt moet liggen, maar nooit alleen een zadel. Er geldt verder een relatie tussen het totaal aantal knopen, zadels en spiralen in het fasevlak, maar die relatie is afhankelijk van de aard van het fasevlak. In het boven geschetste geval is het fasevlak Euclidisch, maar het kan ook een bol of torus zijn, afhankelijk van de aard van het probleem. Dit zette Poincaré aan het denken over overeenkomsten en verschillen tussen allerlei soorten oppervlakken.

5.2.2 Automorfe functies

Behalve de theorie van dynamische systemen was er nog een andere aanloop voor topologische gedachten en ideeën bij Poincaré. In 1880, toen hij docent in Caen was, las hij een artikel van de Heidelbergse wiskundige Lazarus Immanuel Fuchs (1833-1902). Deze onderzocht complexwaardige oplossingen in de complexe variable z van de lineaire differentiaalvergelijking:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + P(z)\frac{dy}{dz} + Q(z)y = 0.$$

De functies $P(z)$ en $Q(z)$ hebben polen in geïsoleerde punten van het complexe vlak. We zagen eerder zo'n voorbeeld voor reële variabelen met $P = 1/x$, $Q = 1$. Een van de vragen in die tijd was, wat er met de onafhankelijke oplossingen $f(z)$ en $g(z)$ gebeurt als je in een gesloten kromme om een singulariteit heendraait. Bij Fuchs en Poincaré spelen ook de mogelijke invariantie eigenschappen voor transformaties van het quotiënt $f(z)/g(z)$ een belangrijke rol; die details doen er nu niet toe, ze behoren tot het terrein van de automorfe functies. Sinds Riemann (1826-1866) dacht men over singulariteiten (polen) van complexe functies na. Als je bijvoorbeeld de functie $\sqrt{z}$ neemt, in $z = 1$ begint en om $z = 0$ heendraait, krijg je bij terugkeer in $z = 1$ de waarde -1. Riemann had als oplossing het invoeren van bladen of oppervlakken waarop de functie na zo'n ronddraai gedefinieerd is. Zo vermijdt je de meerduidigheid, maar het is niet zo duidelijk hoe je je dat meetkundig moet voorstellen. Poincaré generaliseerde het werk van Fuchs door complexe functies te bekijken die invariant zijn onder een groep van analytische transformaties. Analytisch en algebraisch is dat wel duidelijk, het leidt tot een belangrijke uitbreiding van de speciale functies zoals de elliptische met de zogenaamde hypergeometrische, de Fuchse en zeta-Fuchse functies. De 26-jarige Poincaré liep vooraan in het ontwikkelen van deze resultaten, maar hij voelde zich hier nog steeds ongemakkelijk bij: hoe kon je de structuur van de oplossingen, de speciale functies die door de differentiaalvergelijkingen zijn gedefinieerd, in een omgeving van een singulier punt meetkundig karakteriseren? Poincaré was naast wiskundige ook mijningenieur en geïnteresseerd in geologie. In dezelfde tijd, in 1880, ging hij met een aantal geologen enkele dagen op expeditie in Normandië, een excursie waarbij hij zich natuurlijk niet met wiskunde kon bezighouden. In Coutances maakte de groep gebruik van een paarden-omnibus; toen Henri Poincaré op de treeplank stapte ervoer hij het volgende:

> Juist toen ik op de treeplank stapte kreeg ik het idee, hoewel geen enkele gedachte me daar toen op had voorbereid, dat de transformaties die ik had gebruikt om de Fuchse fincties te definiëren, precies die waren die je in de niet-Euclidische meetkunde vindt. Ik kon het niet verifiëren, daar had ik de tijd niet voor, ik ging door met het gesprek dat aan de gang was, maar ik voelde dadelijk absolute zekerheid. Toen ik terug kwam in Caen heb ik het op mijn gemak geverifieerd.

Dit leidde hem geheel onverwacht tot een verband tussen het gedrag van complexe functies in een omgeving van een singulariteit en de hyperbolische meetkunde. In de niet-Euclidische meetkunde van Lobachevsky zijn er transformaties die de afstand tussen objecten constant houden (isometrieën), dezelfde transformaties spelen een rol in de analyse van de Fuchse functies. Het werd de eerste toepassing van de niet-Euclidische meetkunde op een ander gebied van de wiskunde, het leidde bij hem tevens tot een overvloed van andere resultaten. Het is opnieuw een illustratie van de samenhang van analytische, algebraische en meetkundige inzichten.

5.2.3 Het Newtonse drielichamenprobleem

De dynamica in het Newtonse drielichamenprobleem wordt beschreven met differentiaalvergelijkingen. De oplossingen van deze vergelijkingen zijn te vinden op een Hamiltoniaans energie-oppervlak in de faseruimte dat singulariteiten vertoont; die singulariteiten corresponderen met botsingen en gedrag op oneindig. De faseruimte van het algemene drielichamenprobleem heeft 18 dimensies, de beweging op het energie-oppervlak is dus nog altijd 17-dimensionaal. Dit reusachtig aantal dimensies wordt verminderd door bijvoorbeeld aan te nemen dat de bewegingen van alle drie de lichamen in een vlak plaatsvinden, dan is de faseruimte 12-dimensionaal. Elk lichaam heeft in elke dimensie een positie en snelheid (afgeleide in de tijd), dat zijn vier variabelen per lichaam. Daarnaast wordt vaak aangenomen dat een van de lichamen zo weinig massa heeft dat deze de beweging van de andere twee lichamen niet beïnvloedt; denk aan de configuratie Zon-Planeet-Kunstmaan of Zon-Planeet-Asteroïde. Dat is het beperkte drielichamenprobleem.

We noemden 17 dimensies, maar dat is iets te veel. Behalve de energie, zijn er nog meer zulke oppervlakken die de beweging beperken, bijvoorbeeld de drie oppervlakken die corresponderen met de wet van behoud van hoekmoment (zulke behoudswetten worden ook wel 'integralen van beweging' genoemd). De oplossingen van het drielichamenprobleem zijn te vinden op de doorsnijdingen van deze oppervlakken met het energie-oppervlak. Om de bewegingen van de deeltjes beter te begrijpen, moet je je dus realiseren dat dit energie-oppervlak weer verder bladert in deeloppervlakken; een belangrijke vraag is dan of het energie-oppervlak helemaal kan worden opgesplitst in zulke oppervlakken en of je die complexe dynamica zo volledig kunt beschrijven. Voor het tweelichamenprobleem kan dit inderdaad, maar Poincaré heeft laten zien dat dit voor het drielichamenprobleem niet het geval is. Daar verstoort chaos de mooie meetkundige structuur.

Over het drielichamenprobleem dacht Poincaré al na in de periode 1885-1888 toen hij werkte aan de beroemde prijsvraag van de Zweedse koning Oscar II. Hij toont daar met berekeningen aan, dat in de omgeving van een instabiele periodieke oplossing er oneindig veel oplossingen zijn die niet op zo'n integraaloppervlak te vangen zijn. In de drie delen van zijn "Méthodes Nouvelles de la Mécanique Célèste" (1892-1899) ontwikkelde hij daarna systematisch de theorie van dynamische systemen waarin steeds meetkundige en analytische methoden elkaar afwisselen en aanvullen. In deel drie beschrijft Poincaré in detail hoe deze complexe dynamica, die we nu chaotisch noemen, tot stand komt. Die beschrijving van oplossingen in het drielichamenprobleem is heel beeldend, het is voor moderne onderzoekers niet te begrijpen hoe hij zonder computer tot dit inzicht kwam.

Meestal beoefende men de meetkunde in het vlak of in de drie-dimensionale ruimte. Het onderzoek aan het drielichamenprobleem maakte het noodzakelijk om na te denken over de structuur van oppervlakken in meerdimensionale ruimtes.

5.3 Poincaré en de Analysis Situs

Tegelijk met zijn werk aan dynamische systemen en automorfe functie, later parallel aan zijn werk in de mathematische fysica en de partiële differentiaalvergelijkingen, publiceert Poincaré in de jaren 1892-1905 zijn artikelen over analysis situs. Het eerste, grote artikel in 1895 beslaat 121 bladzijden in de Journal de l'École Polytechnique. Dit artikel en de vijf supplementen zijn in het Engels vertaald en van een inleiding voorzien door John Stillwell [St].

De artikelen zijn in discussiestijl geschreven, waarbij het onderwerp met behulp van allerlei overwegingen wordt ontwikkeld en dan in de latere supplementen wordt verhelderd en gecorrigeerd. Poincaré is in gesprek met de lezer. Dat is bepaald niet de klassieke manier van wiskunde publiceren, maar men moet bedenken dat de topologie hier voor het eerst bedacht wordt. Typerend is de gang van zaken over het Poincaré vermoeden. Losjes geformuleerd zegt dit dat elk enkelvoudig samenhangend, gesloten drie-dimensionaal oppervlak in $\mathbb{R}^4$ dat zonder gaten is, door continue deformatie (homeomorf) kan worden overgevoerd in een bol. Zijn formulering is enigzins anders, namelijk met behulp van de zogenaamde fundamentaalgroep en later met het begrip homotopie. Poincaré meent eerst dat dit resultaat vanzelf spreekt, pas in het vijfde supplement, in 1905, formuleert hij het als een probleem. In zijn eigen woorden:

> Considérons maintenant une variété V a trois dimensions ... Est-il possible que le groupe fondamental de V se réduise à la substitution identique, et que pourtant V ne soit pas simplement connexe?

Voor een twee-dimensionaal oppervlak in $\mathbb{R}^3$ werd een bewijs snel gevonden, we kunnen dit alleen deformeren naar een bol als het enkelvoudig samenhangend is. Voor $n \geq 5$ werd het in 1961 bewezen door Stephen Smale, voor $n = 4$ in 1982 door Michael Freedman. Het oorspronkelijke Poincaré vermoeden voor $n = 3$ werd in de jaren 2002-2003 bewezen door Grigori Perelman.
Het blijft interessant en wonderlijk dat de problematiek en de bewijzen voor $n = 3, n = 4$ en $n \geq 5$ zo verschillend zijn.

Bibliografie

[St] Henri Poincaré, Papers on topology, analysis situs and its five supplements, translated and introduced by John Stillwell, AMS and London Math. Soc., History of mathematics vol. 37, 2010.

[FV] Ferdinand Verhulst, Henri Poincaré, impatient genius, Springer, 2012.