

Wiskunde D
Modellen en Dynamische Systemen
versie februari 2010

Ferdinand Verhulst

2009

Het bestuderen van Dynamische Systemen begint met modelleren, waarbij zowel discrete als continue modellen gebruikt worden. Door het modelleren komen we tot relevante vragen die we kunnen beantwoorden met behulp van de wiskunde. In hoofdstuk 6 ("Een balletje opgooien") worden discrete en continue dynamische systemen beide gebruikt. Zo gaat het in de praktijk.

Naast de standaardstof over modelleren en wiskunde zijn er in dit boek onderwerpen die bij voldoende tijd en belangstelling ter keuze worden aangeboden. In de titels van deze paragrafen zijn ze aangegeven met 'Extra'. Het streven zou wel moeten zijn om een aantal van deze 'Extra' paragrafen te behandelen.

Een andere mogelijkheid tot uitbreiding en aanvulling van de stof is het toepassen van de applets van het Freudenthal Instituut:

<http://www.fi.uu.nl/wisweb/>

Als je toegang tot de website hebt gekregen, klik dan links op 'Applets' en dan rechtsboven op 'laat zien'. Kijk eens bij 'Discrete dynamische modellen' en bij 'Webgrafiek (voorheen chaos)'. Je kunt daarbij heel mooi experimenteren met de keuze van modellen.

Over eerdere versies van deze tekst zijn nuttige opmerkingen gemaakt door Taoufik Bakri en Thijs Ruijgrok. Ook bij cursussen voor leraren was dat het geval. De auteur staat open voor vragen en suggesties per email:

F.Verhulst@uu.nl

Voor leraren zijn uitgewerkte opgaven beschikbaar.

Inhoudsopgave

1	Modelleren van de werkelijkheid	5
1.1	Wat is modelleren?	5
1.2	De Grafische Rekenmachine als hulpmiddel	10
2	Discrete dynamische modellen	13
2.1	Ecologische tijdreeksen en meetgegevens	13
2.2	Discrete bevolkingsgroei volgens Malthus	15
2.3	De wiskunde van recursies	18
2.4	Webdynamica en evenwicht	21
2.5	Oplossing van een lineaire vergelijking	26
2.6	Geremde groei: de logist	27
2.7	Extra: De Logist en chaos	28
2.8	Oogststrategieën	34
3	Discrete economische modellen	37
3.1	Enkele economische variabelen	38
3.2	Economische vergelijkingen en wetten	39
3.3	Het basismodel voor economische groei	40
3.4	Verbetering van het basismodel	41
3.5	Extra: Conjunctuur	43
3.5.1	De varkensmarkt	44
3.5.2	Een eenvoudig conjunctuurmodel	45
3.5.3	Een verbeterd conjunctuurmodel	47
4	Meer opgaven	49

5	Continue dynamische systemen	53
5.1	Continue bevolkingsgroei volgens Malthus	53
5.2	Evenwichtoplossingen	55
5.3	Voorbeelden van DVs	58
5.4	Geremde groei	59
5.5	Oplossen met raaklijnen	60
5.6	Extra: Continue economische groei	63
5.7	Extra: methode van scheiding van veranderlijken.	66
5.8	De wetten van Newton	69
5.9	Harmonische trilling	72
5.10	Gedempte harmonische trilling	75
6	Een balletje opgooien	79
6.1	Beweging in de buurt van de Aarde	79
6.2	Het eenvoudigste model	81
6.3	Het model met wrijving	84
6.3.1	Extra: Algemener oplossen	87
6.3.2	Vallen en opgooien	89
6.4	Extra: Benadering met Newton	93
6.5	Stuiteren	101
6.6	Extra: Botsing met een trillende tafel	104
6.7	Vallen in een vloeistof: zinken	108

Hoofdstuk 1

Modelleren van de werkelijkheid

In dit hoofdstuk maken we kennis met het idee van ‘wiskundig model’ en we beginnen met enkele eenvoudige voorbeelden van modellering. In latere hoofdstukken worden deze modellen uitgebreid. Ook maken we enkele opmerkingen over het gebruik van de grafische rekenmachine.

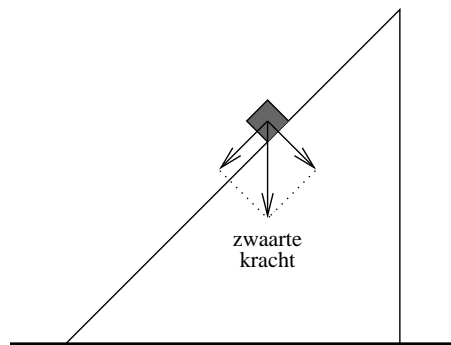
1.1 Wat is modelleren?



Figuur 1.1: Olifant op heuvel.

Een slecht gehumeurde olifant

Stel je voor dat je op vakantie bent in een tropisch gebied, bijvoorbeeld midden in Afrika. 's Morgens vroeg ga je wandelen, het heeft flink



Figuur 1.2: De olifant wordt voorgesteld door een vierkantje, de helling door een rechte lijn.

geregend die nacht en er hangen allerlei geuren die je in ons deel van de wereld niet ruikt. Plotseling verschijnt boven op een heuvel tussen het struikgewas een grote olifant. Hij trompettert, is duidelijk in een slecht humeur en maakt aanstalten om naar beneden te komen. Door de regen is de helling glad en de olifant glijdt meer dan dat hij loopt naar beneden. Wat gaat er door je heen?

Als je gevoel hebt voor modelleren, dan zie je bij die glijdende olifant in gedachten het volgende plaatje (fig. 1.2).

Dat plaatje is typerend voor modelleren. Je hebt de helling die natuurlijk kuilen en hobbels heeft, voorgesteld door een rechte lijn. De olifant met zijn imposante lijf is vervangen door een massapunt, voorgesteld door een vierkantje. De pijlen geven de richting van de krachten aan die werken. Die kracht is de zwaartekracht en we kunnen vergelijkingen opstellen waarin die een hoofdrol speelt. Met behulp van die vergelijkingen kunnen we de verplaatsing van het massapunt (olifant) berekenen en voorspellen.

Modelleren betekent dus vereenvoudigen en wel zoveel vereenvoudigen dat we het verschijnsel bijna niet meer herkennen. Wel hebben we het essentiële van de beweging van de olifant hiermee beschreven. Het trompetteren, de geuren van het oerwoud, de planten en kuilen op de helling laten we allemaal weg in onze modellering.

Laten we nog eens een ander voorbeeld bekijken. We gaan daarbij

meteen vergelijkingen opstellen.

Konijnen op een eiland

Stel eens dat een van onze goedbegroeide eilanden wordt vrij gemaakt van roofdieren (dat valt in werkelijkheid niet mee, want daar vallen ook roofvogels onder en menselijke jagers of automobilisten). We zetten daar wat geslachtsrijpe dieren uit die er goed passen, bijvoorbeeld konijnen, en zowel mannetjes als vrouwtjes. Het aantal dieren geven we aan met de letter N en we gebruiken een cijfer als index om het tijdstip aan te geven waarop er N dieren aanwezig zijn. Dus N_{10} is het aantal dieren op tijdstip 10, N_0 is het aantal dieren waarmee we beginnen op tijdstip 0.



De toename van de bevolking of populatie noemen we de populatiegroei. Het geboren worden en sterven zijn processen die natuurlijk niet vast liggen per individu maar alleen gemiddeld, de een leeft wat langer, de ander produceert minder jongen dan gemiddeld enzovoorts. Het is beter om per populatie, gegeven de omstandigheden (dat is in dit geval voldoende voedsel en voldoende ruimte) geboorte- en sterftegetallen g en s in te voeren. Bijvoorbeeld, als je N individuen in een bevolking hebt zullen er een tijdseenheid (denk aan een jaar) later gN geboren zijn, waarbij g een getal is dat constant kan zijn.

Dat is natuurlijk niet erg realistisch. Het aantal geboortes kan afhangen van de klimaatsomstandigheden (goede of slechte zomers en winters), de beschikbare hoeveelheid voedsel en andere omstandigheden. Als het bijvoorbeeld erg vol wordt zullen er wel minder geboren worden door voedsel- en ruimtegebrek. Maar zo eenvoudig is het model.

Verder zullen er ook een jaar later sN gestorven zijn, die konijnen le-

ven niet eeuwig. Als de getallen g en s bekend zijn en we weten met hoeveel N_0 we beginnen, dan berekenen we dus hoeveel konijnen we het volgende jaar hebben:

$$N_1 = N_0 + gN_0 - sN_0,$$

of

$$N_1 = (1 + g - s)N_0.$$

In het algemeen zal na $n + 1$ jaren (tijdseenheden) gelden

$$N_{n+1} = (1 + g - s)N_n.$$

Als we afkorten $r = (1 + g - s)$ krijgen we

$$N_{n+1} = rN_n,$$

r heet de groei-index. Natuurlijk worden g en s en dus r experimenteel bepaald, dat wil zeggen door waarneming. Als $g > s$ en dus $r > 1$, dan groeit de bevolking. Is $s > g$ dan daalt het aantal individuen.

Dit model is een van de eenvoudigste modellen die je kunt maken voor bevolkingsgroei. Het model zal in de werkelijkheid niet erg nauwkeurig zijn, je kunt namelijk zo'n konijnenpopulatie niet isoleren op een eiland. Toch geeft het model wel een essentieel element van bevolkingsgroei weer.

Het model geldt met enige redelijke precisie alleen onder laboratoriumomstandigheden, bijvoorbeeld voor een bacteriënkweek in een laboratoriumkolf, maar met constante getallen g en s ook dan slechts voor een beperkte tijd; een bevolking kan natuurlijk nooit onbeperkt blijven groeien.

Een balletje opgooien

We bekijken nog eens een ander verschijnsel dat we willen modelleren. We gooien op tijdstip $t = 0$ een balletje recht omhoog. Hoe hoog komt het en na hoeveel tijd belandt het weer op de grond? We schrijven geen mechanicavergelijkingen op (dat komt later) en geven meteen een formule waarin de antwoorden op de vragen bevat zijn. Als $h(t)$ de hoogte vanaf het grondniveau aangeeft als functie van de tijd t , geldt:

$$h(t) = v_0t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Hierbij is v_0 de beginsnelheid die we aan het balletje geven en g de gravitatieconstante.

Het gaat ons nu even niet om de antwoorden, maar om de belangrijkste aannames die bij de afleiding van de formule gemaakt zijn:

- De gravitatiekracht die het balletje laat terugkeren op de grond is constant. Dat is een heel goede benadering als we het balletje met de hand opgooien of zelfs met een geweer afschieten, maar zeker niet als we een raket gebruiken die het balletje tot een hoogte van 10 000 km brengt.
- Er werkt geen wrijving op het balletje tijdens zijn vlucht. Als het balletje dicht bij de Aarde in de atmosfeer blijft, klopt die aanname niet. Maar hij klopt beter voor een gladde metalen kogel dan voor een golfbal van dezelfde omvang. En de aanname klopt zeker niet voor een badmintonpluimpje.
- Het opgooien is precies verticaal zodat er geen horizontale beweging is. Dat is in de praktijk niet mogelijk, maar wel bij benadering.

In hoofdstuk 6 zullen we dit model afleiden en uitbreiden. Daar worden ook de aannames van het model uitvoerig besproken. Er blijken nog heel wat ingewikkelde verschijnselen bij op te treden.

In alle gevallen die we bespraken gaat het om verschijnselen uit vakgebieden buiten de wiskunde die zich lenen voor wiskundige beschrijving. De moeilijkheid is dan om deze zo te geven, dat een redelijk goede beschrijving van het verschijnsel tot stand komt - het model - waarbij dan bovendien ook nog een wiskundige behandeling mogelijk is die voldoende expliciet is. Het is soms mogelijk door het opschrijven van veel en gecompliceerde vergelijkingen de werkelijkheid goed te benaderen, het is dan echter meestal onmogelijk de vergelijkingen op te lossen. Het maken van een mathematisch model is altijd een compromis, een idealisering van de werkelijkheid.

Opgave 1.1.1 *Beschouw opnieuw de populatie van dieren in een geïsoleerde omgeving, bijvoorbeeld konijnen op een eiland. We breiden het model nu uit door een roofdier aan het model toe te voegen met aantal individuen R_n op tijdstip n . In het volgende stelsel vergelijkingen zijn r_1, r_2*

en a positieve constanten; de beginpopulaties N_0 en R_0 zijn gegeven. De veranderingen in de populaties worden beschreven door het stelsel:

$$\begin{aligned} N_{n+1} &= r_1 N_n - a R_n N_n, \\ R_{n+1} &= r_2 R_n + a R_n N_n. \end{aligned}$$

Welke aannames bevat dit model?

Opgave 1.1.2 Bekijk opnieuw het roof-prooidier model van opgave 1.1.1.

We voegen hier nog een verschijnsel aan toe: er zijn enkele mensen op het eiland die per tijdseenheid (jaar) een vast aantal konijnen V vangen voor consumptie. Stel de vergelijkingen op die bij dit model passen. Welke voorwaarde geldt voor V ?

Opgave 1.1.3 We maken een model voor de chemische vervuiling van een meer zoals bijvoorbeeld het IJsselmeer. Neem aan dat het meer een constante inhoud V heeft. Natuurlijk stroomt er water in van rivieren, er verdampt water, het regent en er stroomt water uit, maar we nemen aan dat al deze toe- en afnames elkaar in evenwicht houden. Eén van de rivieren is sterk vervuild met constante chemische concentratie c_r , de concentratie van chemicaliën in het meer geven we aan met c_n , waarbij $n = 0, 1, 2, \dots$ de tijdstappen aangeeft. Het meer zal op de plaats waar de rivier binnenstroomt het ergst vervuild zijn, maar we nemen voor het gemak aan dat de chemicaliën voortdurend door perfecte menging zich over het hele meer verspreiden. Per tijdseenheid stroomt een hoeveelheid v_r vervuild water het meer in, er stroomt ook v_r gemengd water uit.

a. Beredeneer dat voor de vergelijking voor de vuilconcentratie van het meer geldt:

$$c_{n+1} = c_n + \frac{c_r v_r}{V} - \frac{c_n v_n}{V}.$$

b. Als er meer rivieren zijn met slechts één vervuilde, dan stroomt er v_0 uit met $v_r < v_0$. Stel de differentievergelijking voor deze situatie op.

1.2 De Grafische Rekenmachine als hulpmiddel

De grafische rekenmachine (GR) is een prachtig instrument indien je de wiskunde goed begrijpt en het apparaat dan gebruikt om het gedrag van

een model in het verloop van de tijd te illustreren. Wiskunde gaat niet over rekenen en nog minder om te leren om in de juiste volgorde knoppen in te drukken. In de wiskunde gaat het om ideeën en verbanden (de wiskundige noemt dat "concepten en relaties tussen structuren"). Rekenmachines zijn wel goede hulpmiddelen om wiskunde experimenteel te beoefenen, al zijn ze dan geen onderdeel van de wiskunde. Het gebruik behoort bij een apart vak, informatica, te worden onderwezen.

Van de GR zijn een aantal types in omloop, een eenvoudige is de TI 30 (TI betekent Texas Instruments), de TI 83 doet al meer, de TI-nspire nog veel meer, enz. Indien je met Google de type aanduiding geeft, kun je de handleidingen laten verschijnen en eventueel downloaden.

Hier zijn wat aanwijzingen:

De volgende knoppen zijn het belangrijkste. Als er twee knoppen staan moet je die na elkaar intoetsen.

<i>ON</i>		het apparaat wordt aangezet
<i>2nd</i>	<i>ON</i>	het apparaat wordt uitgezet
<i>ENTER</i>		een berekening wordt uitgevoerd.

Om de TI-nspire uit te zetten moet je echter ctrl ON toetsen.

Dan zijn er een aantal knoppen die vanzelf spreken:

\div (delen), \times (vermenigvuldigen; om dit teken te onderscheiden van de letter x schrijven we in teksten meestal $*$), $-$ (aftrekken), $+$ (optellen). Nu kun je gaan rekenen, maar dat is niets bijzonders. Wat wel bijzonder is, is dat je berekeningen die steeds dezelfde formulevorm hebben, kunt vastleggen. Hier volgt een voorbeeld.

Voorbeeld 1.2.1 *Je brengt Eur 1000.- naar de spaarbank en die geeft 3.5 % rente welke na elk jaar wordt bijgeschreven. Laten we eens aannemen dat die rente ongewijzigd blijft. Hoeveel spaargeld heb je dan na vier jaren? Een omslachtige berekening gaat als volgt:*

*Na één jaar heb je $1000 + 0.035 * 1000 = 1035$ Euro,*

*na twee jaren $1035 + 0.035 * 1035 = 1071.23$ Euro, enz. Je voert dan steeds dezelfde soort berekening uit, namelijk 'spaarbedrag plus 0.035 maal spaarbedrag'. Met de GR gaat dat als volgt:*

Toets 1000 en dan ENTER.

*Toets 2nd ANS (na elkaar) +.035 * 2nd ANS.*

12 HOOFDSTUK 1. MODELLEREN VAN DE WERKELIJKHEID

Dat is je formule. Toen je 1000 intoetste en toen ENTER heb je 1000 als ANS (antwoord, van het Engelse answer) gedefinieerd. Als je nu na de formule ENTER toetst, vult de GR 1000 voor ANS in, want dat heb je hem eerst verteld. Als je dan nog eens ENTER toetst, gebruikt hij het nieuwe bedrag als ANS en levert het gespaarde bedrag na twee jaar, enz. Probeer het zelf maar. Je krijgt achtereenvolgens:

1035, 1071.23, 1108.72, 1147.52, enzovoort, waarbij we op twee decimalen hebben afgerond.

Dit soort serie berekeningen zullen we vaak maken.

Opgave 1.2.1 *Je brengt Eur 200.— naar een spaarbank die 3.4 % rente geeft, welke elk jaar wordt bijgeschreven. Hoeveel spaargeld heb je na 2 jaar?*

Je ontdekt dat een andere spaarbank 3.8 % rente geeft en je brengt het spaargeld naar deze bank. Hoeveel spaargeld heb je 3 jaar na deze verandering?

Aanwijzing bij de eerste berekening:

Zet de GR aan.

Toets 200 ENTER

Toets 2nd ANS +.034 2nd ANS.*

Toets ENTER

Toets ENTER

Opgave 1.2.2 *Op een eiland leven op tijdstip $t = 0$, 3000 konijnen met als enige vijand de mens. De konijnenpopulatie doet het goed en groeit met als tijdseenheid ‘1 jaar’, als we de invloed van de mens niet meerekenen, volgens*

$$N_{n+1} = rN_n, \quad N_0 = 3000, \quad r = 1.2.$$

Mensen vangen echter elk jaar V konijnen voor consumptie. De groei-vergelijking wordt dan

$$N_{n+1} = rN_n - V.$$

Er worden 500 konijnen per jaar gevangen (dus $V = 500$). Ga met de GR na of de konijnenpopulatie dan nog groeit of afneemt.

Hoofdstuk 2

Discrete dynamische modellen

“Als de Almachtige God mijn advies zou hebben gevraagd toen Hij met scheppen begon, zou ik Hem iets eenvoudigers hebben aangeraden.”

Alfonsus X (1221 - 1284)

koning van Castilië en Leon

Bevolkingen (populaties) kunnen bestaan uit mensen, dieren, planten, bacteriën, in feite uit alle wezens die zich voortplanten, leven en sterven. Het voorspellen van de groei of afname van populaties kan om velerlei redenen van belang zijn.

2.1 Ecologische tijdreeksen en meetgegevens

Bij het bestuderen van de groei van populaties maken we gebruik van meetgegevens. Er wordt bijvoorbeeld tarwe ingezaaid en we geven de opbrengst aan tarwe voor verschillende inzaaidichtheden (hoeveelheid graankorrels per m^2) of voor verschillende jaren. Bij planten kan dat tamelijk nauwkeurig en dat geldt in het algemeen voor landbouwexperimenten. Als we zo'n rijtje meetgegevens voor verschillende jaren hebben, heet dat een *tijdreeks*. We zullen zien dat een wiskundig model van een evolutieproces ook een tijdreeks levert.



Figuur 2.1: Twee walvissen (Orca's)

In de visserijbiologie is dat heel anders. Je kunt bijvoorbeeld de hoeveelheden visbroed (jongen) uitzetten in afhankelijkheid van de grootte van de paaipopulatie (totaal aantal vissen die jongen voortbrengen) voor IJslandse kabeljauw. De meetpunten zijn dan in feite ruwe schattingen, want je kunt het visbroed en de vissen in de zee niet nauwkeurig tellen. Hierbij moeten we bedenken, dat landbouwexperimenten onder zorgvuldig te controleren omstandigheden plaatsvinden. Bij het volgen van populaties in de visserijbiologie is er veel meer sprake van omgevingsvariaties, die invloed hebben op de natuurlijke populatiegroei. Dat schept onduidelijkheid. Denk maar eens aan de meningsverschillen die er bestaan over het aantal walvissen dat in de oceanen rondzwemt.

We concluderen, dat de meetgegevens, afhankelijk van hun aard en herkomst, in de populatiebiologie — dat is het deel van de biologie dat zich bezig houdt met groei en afname van de bevolking(en) bestaande uit één of meer soorten — aan grote onzekerheden kunnen blootstaan.

Dit alles verhindert ons echter niet om te proberen de verschijnselen te modelleren, dat wil zeggen een wiskundige beschrijving te vinden, die op aanvaardbare wijze de veranderingen van de variabelen weergeeft.

Discreet en continu

Je zult zowel discrete als continue dynamische systemen tegenkomen. ‘Discreet’ kun je zien als ‘stap voor stap’. Een discreet proces kun je stap voor stap volgen. Als je bijvoorbeeld weet dat er 86 chimpansees in een dierentuin leven, kun je de ontwikkeling van die populatie, geboren worden en sterven, per jaar volgen. Het continu volgen van de groei van deze populatie heeft helemaal geen zin, omdat er niet elk ogenblik een verandering is. Maar er zijn ook verschijnselen waarbij er *bijna* elk ogenblik een verandering is, en waarbij we toch met grote tijdstappen kijken wat er gebeurt. Volgens het Centraal Bureau voor de Statistiek komen er in deze tijd bijvoorbeeld ruim honderd Nederlanders per dag bij; hierbij is rekening gehouden met geboren worden, sterven, immigratie en emigratie. Dat lijkt dan bijna een continu proces. Voor de planning van de overheid is dat getal echter niet zo interessant, het bouwen van huizen, wegen en scholen speelt zich op een langere tijdschaal af. De groei van de Nederlandse bevolking kan beter in tijdstappen van een jaar worden gegeven, dus met een discreet model.

Een aantal verschijnselen kun je veel beter continu beschrijven. Een laboratoriumkweek van duizenden bacteriën ontwikkelt zich in enkele uren en gezien de snelle veranderingen is het veel praktischer om de groei van deze kweek continu te beschrijven. Een ander voorbeeld is het ‘lopen van een zandloper’. Natuurlijk valt elk zandkorreltje individueel, maar ze volgen elkaar zo snel op dat we het uitstromen van het fijne zand als een continu proces beschouwen.

2.2 Discrete bevolkingsgroei volgens Malthus

In de achttiende eeuw viel het Benjamin Franklin op, dat de totale bevolking van N-Amerika zich na min of meer vaste periodes verdubbelde. De Engelse dominee Malthus maakte berekeningen die een voorspelling over de bevolkingsgroei inhielden. We hebben de vergelijking hier boven al opgesteld, maar we doen het opnieuw om straks het verband tussen discrete en continue beschrijving te laten uitkomen. Malthus’

gedachtengang was als volgt.

Op het tijdstip t_0 bestaat de bevolking uit N_0 individuen. Het aantal individuen van deze bevolking is een functie van de tijd, laten we deze $N(t)$ noemen. Hoeveel individuen zijn er op het tijdstip $t = t_0 + \Delta t$? Per tijdsinterval worden er individuen geboren en sterven er; deze aantallen zullen evenredig zijn met het aantal dat er bij het begin van het tijdsinterval is en met de lengte van het tijdsinterval. Dit levert een toename $g N(t_0)\Delta t$ (geboorte-index g die de fractie aangeeft die uit de bevolking N_0 in de tijd Δt wordt geboren). Als bijvoorbeeld de populatie op tijdstip 0 in totaal 100 individuen telt en $g = 1/10$, dan worden er $100 \times 1/10 = 10$ jongen geboren in een jaar. Er is tegelijkertijd een afname $s N(t_0)\Delta t$ (sterfte-index s , eveneens een bijbehorende fractie van individuen die sterven), zodat

$$N(t_0 + \Delta t) = N(t_0) + g N(t_0)\Delta t - s N(t_0)\Delta t$$

Met $k = g - s$, vinden we hier uit

$$N(t_0 + \Delta t) = N(t_0) + k N(t_0)\Delta t. \quad (2.1)$$

Indien k positief is, spreekt men van een geboorte-overschot in de periode van t_0 tot $t_0 + \Delta t$. De grootte k hoeft niet konstant te zijn en moet in elk tijdsinterval opnieuw door waarneming bepaald worden. Om voorspellingen te kunnen doen op langere termijn, moeten we meer aannames maken. Stel, dat de omstandigheden van deze individuen zich gedurende enige tijd niet wijzigen, zodat we k konstant kunnen nemen. In dat geval geldt vgl. (2.1) niet alleen in de periode van t_0 tot $t_0 + \Delta t$, maar bijvoorbeeld voor $t \geq t_0$. Het wiskundig model, dat de bevolkingsgroei beschrijft wordt dan gegeven door

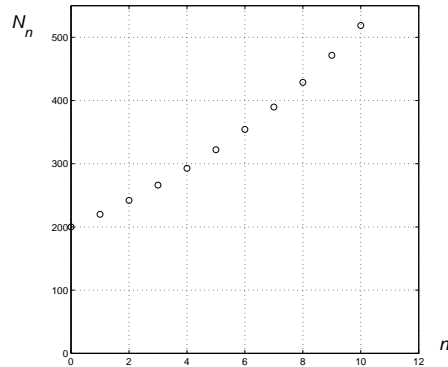
$$N(t + \Delta t) = N(t) + k N(t)\Delta t, \quad t \geq t_0 \quad (2.2)$$

$$N(t_0) = N_0.$$

Indien we $\Delta t = 1$ kiezen, $1 + k = r$ stellen en $t + 1$ als index $n + 1$ schrijven, hebben we de vergelijking uit §1.1 terug:

$$N_{n+1} = rN_n, \quad N_0 \text{ gegeven.} \quad (2.3)$$

Vgl. (2.3) wordt differentievergelijking met beginwaarde genoemd, r noemden we de groei-index. Dit is een voorbeeld van een dynamisch systeem. De oplossing beschrijft hoe het systeem zich in de tijd



Figuur 2.2: Groei van een bevolking volgens de vergelijking $N_{n+1} = rN_n$ met $r = 1.1$ en $N_0 = 200$.

gedraagt en deze vinden we door herhaald invullen, ook wel *iteratie* genoemd. Iteratie is dan het rekenproces waarbij $N_0 \rightarrow N_1, N_1 \rightarrow N_2$, enzovoort. Er geldt:

$$\begin{aligned} N_1 &= rN_0, \\ N_2 &= rN_1 \\ &= r^2N_0 \end{aligned}$$

en na n tijdsintervallen zal gelden:

$$N_n = r^n N_0. \quad (2.4)$$

Resultaat (2.4) noemen we de *explíciete oplossing* van de differentievergelijking. Vaak kunnen we die niet in zo'n eenvoudige formulevorm vinden. In dat geval zijn we tevreden met de getallenrij N_0, N_1, N_2, \dots en die wordt ook *oplossing* genoemd of ook wel *tijdreeks*. Een beetje verwarrend al die namen, maar zo gaat het in de praktijk.

Opmerkingen over taalgebruik

In sommige delen van de wiskunde wordt vergelijking (2.3) een *recursie* genoemd in plaats van differentievergelijking, maar dat is minder gebruikelijk in de theorie van dynamische systemen. Wel gebruikelijk is het om de differentievergelijking in termen van 'afbeeldingen' te behandelen. Dat begrip ken je waarschijnlijk nog niet, maar als dat wel het geval is vermelden we nog het volgende:

Vgl. (2.3) definieert voor de verzameling van positieve getallen plus nul

(\mathbb{R}^+) de afbeelding $N_n \mapsto N_{n+1}$. De boven beschreven iteratie correspondeert met het herhaald toepassen van de afbeelding.

Je zult er helaas aan moeten wennen dat niet alle wiskundigen hetzelfde taalgebruik hebben.

Opgave 2.2.1 *Beschouw een plantenpopulatie op een wei. Neem weer $\Delta t = 1$ en $t_0 = 0$.*

a. *Uit schattingen volgt dat $r = 0.9$. Gaat het goed met deze plantenpopulatie? Hoeveel tijdstappen zijn er nodig om van $N_0 = 1000$ naar $N = 100$ te gaan?*

b. *We verbeteren de omstandigheden voor deze plant en schatten dat nu geldt $r = 1.2$. Neem $N_0 = 100$; na hoeveel stappen verdubbelt de populatie naar $N = 200$? Na hoeveel stappen is er weer een verdubbeling (van 200 naar 400)?*

Opgave 2.2.2 a. *Ga na, dat de bevolking verdubbeld is na een tijdsduur van $\ln 2 / \ln r$ tijdsintervallen (naar boven afgerond op een geheel getal) en dat deze tijdsduur onafhankelijk is van de begintoestand N_0 en het begintijdstip t_0 .*

b. *Om de verdubbelingstijd te berekenen kun je de formule (2.4) gebruiken met behulp van de GR. Voer dit als volgt uit:*

toets 100 ENTER

*toets 1.2 * 2nd ANS ENTER toets herhaaldelijk ENTER en vergelijk de verdubbelingstijd met het antwoord dat je onder a. kreeg.*

Opgave 2.2.3 *Zet alle aannames die tot vergelijking (2.3) hebben geleid nog eens op een rijtje.*

2.3 De wiskunde van recursies

In de vorige paragrafen hebben we kennis gemaakt met ééndimensionale recursies (differentievergelijkingen). Deze hebben de vorm

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Soms gebruiken we in plaats van de letter n de letter t als volgt:

$$x(t+1) = f(x(t)).$$

Aan verschillende notaties moet je wennen. Een voorbeeld van een recursie is:

$$x_{n+1} = r x_n,$$

met $r \in \mathbb{R}$. Deze beschrijft bevolkingsgroei, maar ook heel andere processen zoals rentegroei van een kapitaal. Dat is het interessante van de wiskunde.

Door herhaald invullen vinden we: $x_0 = x_0$, $x_1 = r x_0$, $x_2 = r^2 x_0$, \dots . In het algemeen geldt:

$$x_n = r^n x_0$$

De bovenstaande formule is de expliciete oplossing van de recursie. Het komt maar zelden voor dat je een expliciete oplossing voor een recursie kunt vinden.

Een iets ingewikkelder voorbeeld van een recursie is

$$x_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}} x_n.$$

Het is niet moeilijk om een aantal termen op te schrijven. We vinden met $x_0 = 1$:

$$x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3^2} \frac{1}{3} = \frac{2}{27}, x_3 = \frac{3}{3^3} \frac{2}{27} = \frac{6}{729}.$$

In dit geval kun je de algemene oplossing raden, maar daarvoor kun je beter de termen niet uitwerken. We schrijven:

$$x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3^2} \frac{1}{3} = \frac{2}{3^3}, x_3 = \frac{3 \cdot 2}{3^6}, x_4 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3^{10}}.$$

Kun je de oplossing voor x_n raden?

Vaak blijkt de rij getallen naar een vaste waarde te gaan naar mate we meer termen uitrekenen (n neemt toe). Bijvoorbeeld in de recursie $x_{n+1} = r x_n$ met $r = 0.1$ en $x_0 = 1$ vinden we: $x_1 = 0.1$, $x_2 = 0.01$, $x_3 = 0.001$, \dots . De waarden van x_n komen steeds dichterbij 0 te liggen.

Als de rij x_n steeds dichterbij een vaste waarde $c \in \mathbb{R}$ nadert voor toenemende n , zeggen we dat de rij x_n convergeert en dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c.$$

Het is nuttig om twee standaardlimieten te kennen. Als je een getal r tussen -1 en $+1$ kwadrateert ontstaat een kleiner getal, als je tot de derde macht verheft een nog kleiner getal, enzovoort. Immers, elke keer als je tot een hogere macht verheft, vermenigvuldig je met het getal r dat kleiner dan 1 is. We drukken dit uit als

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0, \quad \text{als } |r| < 1.$$

Het tweede voorbeeld is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0, \quad \text{als } p > 0 \text{ (} p \text{ een vast getal).}$$

Hiermee kunnen we bijvoorbeeld $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{2n^2-n}$ bepalen, want als we teller en noemer door n^2 delen, krijgen we

$$\frac{n^2+1}{2n^2-n} = \frac{1+1/n^2}{2-1/n},$$

en dan is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{2n^2-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+1/n^2}{2-1/n} = \frac{1+\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n^2}{2-\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n} = \frac{1}{2}$$

Som- en quotiëntregels

Bij de laatste berekening hebben we twee rekenregels gebruikt die erg nuttig zijn. Neem aan dat er twee rijen f_n en g_n zijn met $n = 1, 2, \dots$ waarvoor de limieten voor $n \rightarrow \infty$ bestaan.

De somregel voor limieten luidt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n + g_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n + \lim_{n \rightarrow \infty} g_n.$$

De quotiëntregel voor limieten luidt: indien $g_n \neq 0, n = 1, 2, \dots$ dan geldt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{g_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} f_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} g_n}.$$

Opgave 2.3.1 Geef de oplossing van de vergelijking

$$x_{n+1} = x_n + 3 \text{ met } x_0 = 1$$

in de vorm van een getallenrij en ook met een expliciete formule.

Opgave 2.3.2 Neem de recursie

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n + 1}$$

a. Gebruik je GR om de eerste zes waarden van x_n te bepalen. Doe dit voor $x_0 = 0.1$, $x_0 = 1$ en $x_0 = 10$.

b. We gaan ervan uit dat $x_0 \neq -1$ en dat de limiet voor $n \rightarrow \infty$ bestaat. Laat zien dat deze limietwaarde nadert naar $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

Opgave 2.3.3 Ga na of de volgende rijen convergeren en bereken zo mogelijk de limiet voor $n \rightarrow \infty$.

a.

$$x_n = \frac{n+1}{n^2+4}, n = 1, 2, \dots$$

b.

$$x_n = \frac{a^n}{2a^n + b^n}, n = 1, 2, \dots$$

Onderscheid de vier gevallen $|\frac{b}{a}| < 1$, $\frac{b}{a} = 1$, $\frac{b}{a} = -1$ en $|\frac{b}{a}| > 1$

Opgave 2.3.4 Bereken de limiet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\alpha}{n}$$

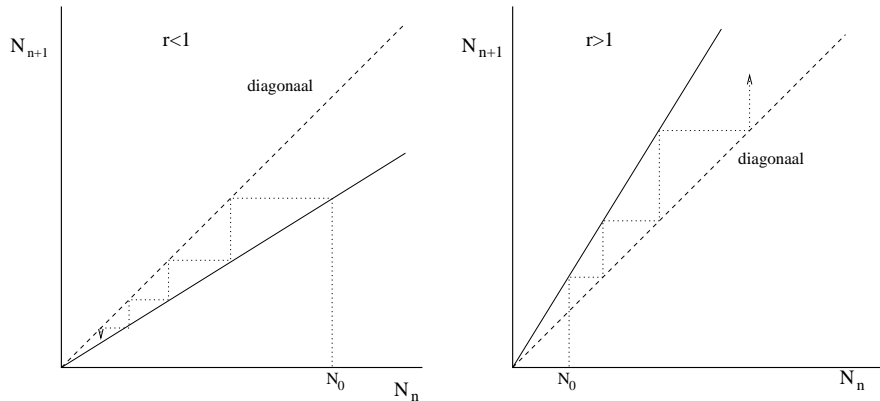
als $\alpha = \pi$. Wat is het antwoord indien α een willekeurig getal is?

2.4 Webdynamica en evenwicht

Het werkt verhelderend om het iteratieproces grafisch voor te stellen in zogenaamde ‘webdynamica’. Het tekenen van webdynamica werkt heel algemeen maar we behandelen deze eerst voor de Malthus-vergelijking

$$N_{n+1} = rN_n,$$

zie fig. 2.3. Beschouw de grafieken van $N_{n+1} = rN_n$ en van $N_{n+1} = N_n$ (de diagonaal in het N_{n+1}, N_n -vlak). Startend in een punt N_0 van de N_n -as trekken we een verticale lijn, die de grafiek van $N_{n+1} = rN_n$ snijdt in (N_0, N_1) met $N_1 = rN_0$. Spiegelen om de diagonaal levert weer de waarde N_1 , nu op de N_n -as. Hier starten we opnieuw om $N_2 = rN_1$ te vinden enz.



Figuur 2.3: Iteratieproces voor de Malthusvergelijking geïllustreerd voor $r < 1$ (afname) en $r > 1$ (groei).

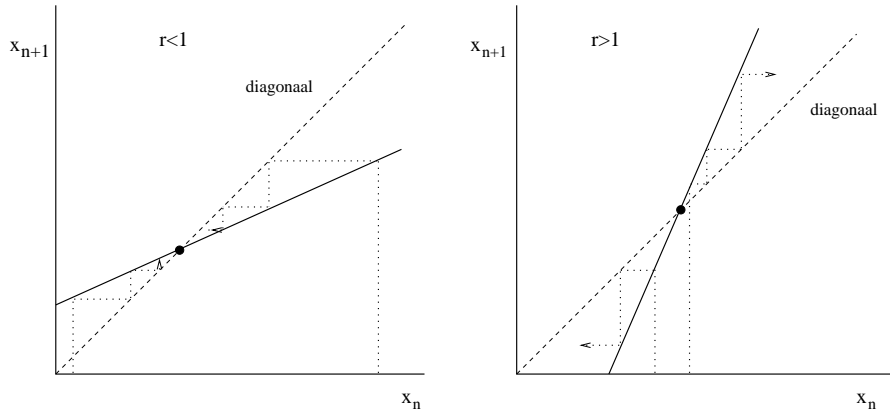
In dit geval is er één *evenwichtsooplossing*: $N = 0$. Dat wil zeggen, voor $N_0 = 0$ geldt dat bij elke n geldt $N_n = 0$. Een evenwichtsooplossing ligt altijd op een snijpunt met de diagonaal. Op de diagonaal geldt immers $N_{n+1} = N_n$.

Als $0 < r < 1$, dan neemt de bevolkingsgrootte af en we hebben de eigenschap dat $\lim_{n \rightarrow \infty} N_n = 0$ voor elke $N_0 > 0$. In het geval $r > 1$ neemt N_n toe met elke stap en verwijdt zich van de evenwichtsooplossing. In het geval $0 < r < 1$ is de evenwichtsooplossing $N = 0$ aantrekkend; $N = 0$ heet een attractor. We zeggen dan ook wel dat deze oplossing *stabiel* is. Als $r > 1$ heet $N = 0$ afstotend en dan heet deze oplossing *instabiel*.

Laten we nog eens enkele voorbeelden bekijken van lineaire vergelijkingen van de vorm

$$x_{n+1} = rx_n + b.$$

We geven de uitleg in het onderschrift, zie fig. 2.4. Je kunt de vergelijking links zien als het model van een krimpende bevolking waar jaarlijks door immigratie (grootte b) een positief evenwicht ontstaat. Rechts hebben we een groeiende bevolking, maar ondanks de constante emigratie (grootte b) blijft de bevolking toenemen.



Figuur 2.4: Iteratieproces voor twee lineaire vergelijkingen van de vorm $x_{n+1} = rx_n + b$. Links geldt $r < 1$ en $b > 0$. Rechts geldt $r > 1$ en $b < 0$. Het evenwichtspunt ligt op het snijpunt van diagonaal en grafiek. Links is het stabiel, rechts instabiel.

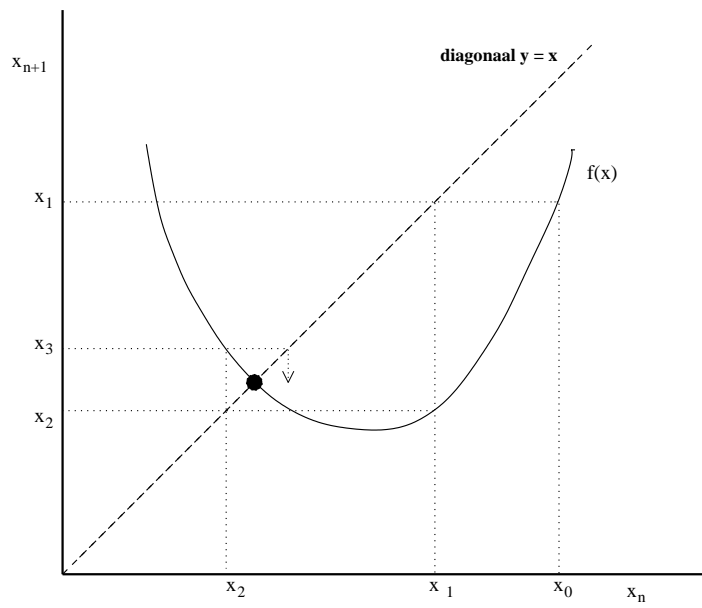
Dat proces van webgrafiek geldt heel algemeen en we laten dit zien voor de algemene ééndimensionale differentievergelijking

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (2.5)$$

met $f(x)$ een continue functie waarbij we de tijdstappen weer gelijk aan één gekozen hebben.

Een oplossing van vgl. (2.5) komt weer tot stand door een iteratieproces. Startend met x_0 krijgen we $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2), \dots$. De rij $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ heet de oplossing van vgl. (2.5) startend in x_0 . Het herhaald invullen van waarden x_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ heet iteratie. Hierbij is wel vereist, dat het beeld x_{n+1} van x_n opnieuw in het domein van $f(x)$ ligt. Zo niet, dan breekt vanaf dat tijdstip de rij af en bestaat de oplossing tot dat tijdstip en niet later.

Vaak noteert men de elementen van de rij x_0, x_1, x_2, \dots als $f^n(x_0)$,



Figuur 2.5: Iteratieproces volgens vgl. (2.5) geïllustreerd voor een keuze van $f(x)$.

$n = 1, 2, \dots$. Dit betekent niet “ $f(x_0)$ tot de macht n ”, maar de afbeelding f n -maal toegepast, dus $f(f(f \cdots (f(x_0)) \cdots))$.

Het is duidelijk, dat een snijpunt van de grafieken van de diagonaal $y = x$ en $y = f(x)$ een *evenwichtspunt* is van vgl. (2.5), voor zo'n punt geldt immers:

$$x = f(x).$$

Startend in dit snijpunt levert steeds weer dezelfde waarde; dit heet ook wel een dekpunt van de afbeelding f .

Indien we op deze wijze grafisch te werk gaan, ontstaan webachtige figuren, vandaar de naam ‘webdynamica’. Naar sommige evenwichtspunten naderen we als n toeneemt, terwijl we ons van andere evenwichtspunten verwijderen.

De begrippen stabiliteit en instabiliteit kunnen we ook voor meer algemene vergelijkingen definiëren. Als $x = p$ een evenwichtsooplossing is van de vergelijking $x_{n+1} = f(x_n)$, dan is deze oplossing stabiel als alle oplossingen die dicht bij $x = p$ beginnen uiteindelijk naar $x = p$ toelopen. De oplossing heet instabiel als alle oplossingen uiteindelijk weglopen. Dit lijkt een vage definitie, maar gelukkig is er een simpele manier om te bepalen of een evenwichtspunt stabiel is of instabiel. Daarvoor heb je de afgeleide $f'(p)$ van de functie $f(x)$ in p nodig:

Stabiliteitscriterium

Als $f(p) = p$ en $|f'(p)| < 1$, dan is $x = p$ een stabiel evenwichtspunt.

Als $|f'(p)| > 1$, dan is $x = p$ instabiel.

De reden waarom je stabiliteit zo kan bepalen is niet zo moeilijk. Als je de grafieken van $f(x)$ en $y = x$ in een plaatje tekent, dan snijden deze elkaar in $x = p$. Als je dit snijpunt met een vergrootglas bekijkt (het gaat makkelijker met de GR), dan zie je dat als je steeds dichterbij $x = p$ komt, de grafiek van $f(x)$ steeds meer op een rechte lijn gaat lijken. De richtingscoëfficiënt van deze lijn is $f'(p)$. Het plaatje lijkt dan in een omgeving van p precies op fig. 2.3 of fig. 2.4 met $r = f'(p)$. Als $f'(p) > 1$ of $f'(p) < -1$, zal de oplossing steeds verder van $x = p$ weglopen en als $-1 < f'(p) < 1$ zullen alle oplossingen naar $x = p$ gaan.

Het zal je zijn opgevallen dat we geen uitspraak over de stabiliteit van

$x = p$ kunnen doen als $f'(p) = 1$ of $f'(p) = -1$. In zo'n geval moet de vergelijking met andere methoden worden aangepakt, maar daar zullen we hier niet verder op ingaan.

2.5 Oplossing van een lineaire vergelijking

De meeste differentievergelijkingen zijn niet exact op te lossen. Met een exacte oplossing bedoelen we een formule zoals in (2.4). De bekendste manier om zo'n vergelijking toch te bestuderen is de methode van de webdynamica uit de vorige paragraaf.

Er is echter een categorie vergelijkingen waarvoor we wel een oplossing kunnen opschrijven. Dit zijn de lineaire vergelijkingen met constante coëfficiënten. Zo'n vergelijking heeft de vorm

$$x_{n+1} = a x_n + b, \quad x_0 \text{ gegeven.} \quad (2.6)$$

Een speciaal geval is het model van Malthus, waarbij $b = 0$.

Dit type vergelijkingen komt in de praktijk vaak voor, dus komt het mooi uit dat we de oplossing kunnen opschrijven.

Voor de eerste paar termen van de reeks krijgen we: x_0 , $x_1 = ax_0 + b$, $x_2 = ax_1 + b = a(ax_0 + b) + b = a^2x_0 + ab + b$, $x_3 = a^3x_0 + a^2b + ab + b$, enzovoort. De conclusie is dat:

$$x_n = a^n x_0 + b(1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}). \quad (2.7)$$

Deze uitdrukking kan worden vereenvoudigd, dat doen we in de volgende opgave.

Opgave 2.5.1 *Laat zien dat als $a \neq 1$, geldt*

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} = \frac{1 - a^n}{1 - a}.$$

De som aan de linkerkant van deze vergelijking heet de meetkundige reeks.

Uit de voorafgaande opgave kun je zien dat als $a \neq 1$, de oplossing van vgl. (2.6) geschreven kan worden als

$$x_n = a^n x_0 + b \left(\frac{1 - a^n}{1 - a} \right).$$

Opgave 2.5.2 *Wat is de oplossing van vgl. (2.6) als $a = 1$? En als $a = -1$?*

Opgave 2.5.3 *Wat zijn de dekpunten van vgl. (2.6)? Voor welke waarden van a zijn de dekpunten stabiel? Vergelijk het resultaat met de webdynamica in fig. 2.4 van de vorige paragraaf.*

Opgave 2.5.4 *Laat met behulp van de expliciete oplossing van vgl. (2.6) zien dat als $|a| < 1$, alle oplossingen naar het dekpunt gaan als $n \rightarrow \infty$.*

Opgave 2.5.5 *Een werknemer heeft een salaris S_n dat per jaar met 10 % stijgt. Helaas stijgen de kosten K_n van ziekte- en andere verzekeringen met 20 % per jaar in prijs.*

a. Noem het beginsalaris $S_0 (> 0)$ en de beginkosten $K_0 (> 0)$. Hoe verandert de verhouding van kosten en salaris in de loop van de tijd?

b. Stel dat $K_0/S_0 = 1/10$. Hoeveel jaren zijn dan nodig om de verzekeringskosten de helft van het salaris te laten bedragen?

2.6 Geremde groei: de logist

De groei van een bevolking wordt natuurlijk mede bepaald door de beschikbare hoeveelheid ruimte en voedsel. Dat wordt snel duidelijk als men een bacteriënkweek maakt in een laboratorium, maar ook indien men de groei van een mensenbevolking bestudeert op een eiland. Bijvoorbeeld op het tamelijk geïsoleerde Schotse eiland St Kilda hebben nooit meer dan een paar honderd mensen een moeizaam bestaan kunnen hebben. In 1838 stelde de Belgische wiskundige P.F. Verhulst voor om het model van Malthus als volgt uit te breiden.

Beschouw opnieuw de vergelijking :

$$N_{n+1} = N_n + rN_n, \quad N_0 \text{ gegeven.}$$

Het ligt dan voor de hand om de groeifactor r niet constant te nemen, maar voor r een functie van N te kiezen die afneemt als N toeneemt. Dus als de bevolking (te) groot wordt, neemt de groei af. Een eenvoudige keuze is

$$r = r_0 - \frac{r_0}{K}N_n.$$

De constante r_0 heet in de populatiebiologie de intrinsieke groei-index, K heet de draagcapaciteit. Merk op dat als N_n de waarde K aanneemt, de groei-index r nul wordt, dus meer dan K individuen is niet mogelijk. De vergelijking die de bevolkingsgroei beschrijft wordt hiermee

$$N_{n+1} = N_n + r_0 \left(1 - \frac{N_n}{K}\right) N_n, \quad N_0 \text{ gegeven.} \quad (2.8)$$

Door een zogenaamde *schaaltransformatie* van de vorm $N = \beta x$ met β een geschikte constante, kunnen we de twee constanten in de vergelijking terugbrengen tot één. Substitutie van $N_{n+1} = \beta x_{n+1}$, $N_n = \beta x_n$ levert voor de vergelijking na deling door β

$$x_{n+1} = x_n + r_0 \left(1 - \frac{\beta}{K} x_n\right) x_n.$$

We kiezen

$$\beta = \frac{K(1 + r_0)}{r_0}$$

en dit levert

$$x_{n+1} = x_n + r_0 x_n - (r_0 + 1) x_n^2.$$

Met $a = r_0 + 1$ wordt dan de vergelijking voor de variabele x_n (de herschaalde N_n):

$$x_{n+1} = a x_n (1 - x_n), \quad x_0 \text{ gegeven.} \quad (2.9)$$

de keuze van β noemen we ‘geschikt’ omdat vgl. (2.9) voor x_n eenvoudiger oogt dan de vergelijking voor N_n terwijl ze toch uit elkaar af te leiden zijn. Door de keuze van β geldt dat $0 \leq x \leq 1$. Vgl. (2.9) wordt, behalve naar de opsteller, ook wel de logistische vergelijking, logist of kwadratische vergelijking genoemd.

Voor ééndimensionale vergelijkingen zoals vgl. (2.9) is het goed mogelijk om de dynamica van de oplossingen grafisch te volgen.

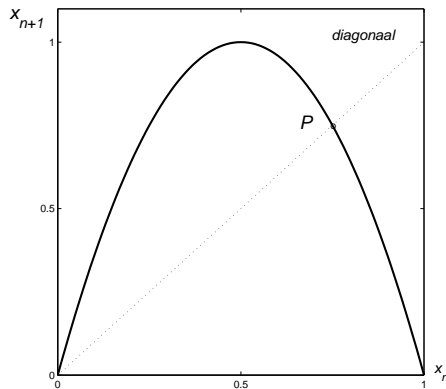
2.7 Extra: De Logist en chaos

We gaan nu bekijken wat voor opmerkelijke verschijnselen de dynamica van de logist vertoont. We zullen zien dat als we a laten toenemen,

er meer en meer periodieke oplossingen blijken te bestaan en dat er tenslotte chaos ontstaat. Vgl. (2.9), de logist, is van de vorm

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

met $f(x) = a x(1 - x)$. De grootheid x is hier een populatiedichtheid, het definitiegebied is $0 \leq x \leq 1$. We hebben immers $x = N/\beta$ waarbij β evenredig is met het maximale aantal individuen K (de draagcapaciteit).



Figuur 2.6: De kwadratische afbeelding of logist voor $a = 4$; het maximum is de waarde 1. Het punt P is een evenwichtspunt.

Eerst merken we op dat het maximum van $f(x) = a x(1 - x)$ wordt aangenomen voor $x = \frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2}) = a/4$.

Dus indien $0 \leq a \leq 4$, dan blijft x_n in het definitiegebied voor alle waarden van n . Beschouw de vergelijking $x = a x(1 - x)$. Voor $0 \leq a \leq 1$ is er slechts één evenwichtspunt: $x = 0$.

Indien $1 < a \leq 4$, dan zijn er twee evenwichtspunten, zie fig. (2.6):

$$x = p_1 = 0 \quad \text{en} \quad x = p_2 = \frac{a - 1}{a}$$

We beschouwen de attractie-eigenschappen van deze evenwichtsooplossingen. Er geldt

$$f'(x) = a(1 - 2x)$$

zodat $f'(0) = a$ en $f'(\frac{a-1}{a}) = 2 - a$.

We concluderen, dat als $0 < a < 1$, $x = 0$ (dat is p_1) aantrekkend is. Bij

$a = 1$ ontstaat een tweede evenwichtoplossing, die van $x = 0$ aftakt. Voor $1 < a < 4$ geldt dat $x = 0$ (p_1) afstotend is, voor $1 < a < 3$ geldt dat p_2 aantrekkend is, voor $3 < a < 4$ afstotend. Oppervlakkige toepassing van de grafische methode suggereert, dat indien we starten met $0 < x_0 < 1$, de oplossingen van vgl. (2.10) voor $1 < a < 3$ en $n \rightarrow \infty$ naar $x = p_2$ naderen. In een omgeving van p_2 nemen de oplossingen successievelijk waarden groter en kleiner dan p_2 aan. Men noemt dit gedrag oscillerend. Dit is echter niet het geval als $3 < a < 4$, er zijn bijvoorbeeld periodieke oplossingen. We definiëren deze als volgt.

Definitie

Het punt x_0 heet periodiek punt van vgl. (2.10) met periode k indien $f^k(x_0) = x_0$ voor zekere $k \in \mathbb{N}$. De rij $x_0, f(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0)$ heet periodieke oplossing.

Opmerking.

Een evenwichtspunt wordt ook wel periode 1 oplossing genoemd. Een periode 2 oplossing x_0, x_1 is een oplossing waarbij je na één iteratie van x_0 naar x_1 gaat en bij de volgend iteratie weer in x_0 terecht komt (met $x_0 \neq x_1$).

Indien een punt periode k heeft, dan heeft het ook periode $2k, 3k$, enz. Anderzijds, indien een *continue* afbeelding een periodiek punt bezit, dan bestaat er een minimale periode. Deze zullen we hier *de* periode noemen. In fig. 2.7 zijn evenwichtspunten en periodieke oplossingen weergegeven voor verschillende waarden van a .

Berekeningen over hogere orde periodieke oplossingen (periodieke oplossingen met grote periode) worden al snel ingewikkeld. Bedenk dat

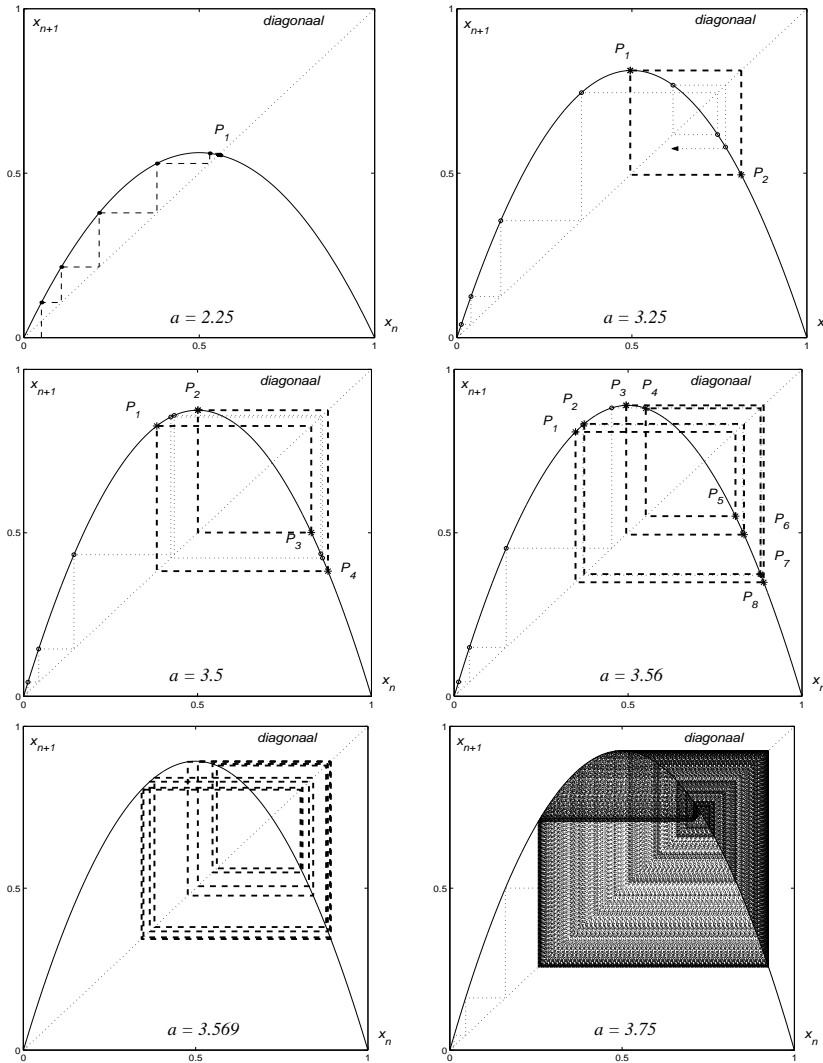
$$f^2(x) = a a x(1-x)[1-a x(1-x)]$$

Een punt met periode 2 voldoet aan de vergelijking

$$f^2(x_0) = x_0,$$

die van de vierde graad is. Eén oplossing is $x_0 = 0$; indien $a > 1$, is een tweede oplossing de x -waarde van p_2 . Uitdelen van deze twee wortels levert een kwadratische vergelijking, die 0, 1 of 2 reële wortels heeft.

Opgave 2.7.1 *a. Ga de berekeningen in de theorie van deze paragraaf na, dat als $1 < a < 3$, de evenwichtoplossing p_2 aantrekkend is, voor*



Figuur 2.7: De kwadratische afbeelding voor zes waarden van a . Linksboven $a = 2.25$; behalve $x = 0$ (instabiel) is er nog een evenwichtoplossing, P_1 , en deze is stabiel. In de volgende figuren geldt $a > 3$ zodat ook deze evenwichtoplossing instabiel is. Rechtsboven $a = 3.25$; er bestaat een periode 2 oplossing welke stabiel is. Linksmidden $a = 3.5$; de periode 2 oplossing is instabiel, maar er bestaat een stabiele periode 4 oplossing. Rechtsmidden $a = 3.56$; er is een stabiele periode 8 oplossing (daarbij horen de x -coördinaten van de punten P_1, P_2, \dots, P_8). Linksonder $a = 3.569$; nu is er een stabiele periode 16 oplossing. Rechtsonder $a = 3.75$; we zijn voorbij het punt a^* en er heerst chaos.

$3 < a < 4$ afstotend.

b. *Illustreer dit met de GR. Dus kies eerst bijvoorbeeld $a = 2$ en enkele beginwaarden x_0 ; kijk dan of de oplossingen in de richting van p_2 gaan. Dezelfde procedure voor bijvoorbeeld $a = 3.5$.*

Deze berekeningen zijn natuurlijk alleen maar illustraties, het wiskundige bewijs is in de paragraaf gegeven.

Opgave 2.7.2 *Ga na dat bij de vergelijking $x_{n+1} = f(x_n)$ voor een periode 2 oplossing met startpunt x_0 geldt*

$$x_0 = f(f(x_0)).$$

Opgave 2.7.3 a. *Beschouw de lineaire differentievergelijking*

$$x_{n+1} = \frac{3}{2}x_n - 20, \quad x_n \geq 0$$

met $n = 0, 1, 2, \dots$. Heeft de vergelijking een evenwichtsooplossing en zo ja, bepaal deze? Heeft de vergelijking een periode 2 oplossing?

b. *Is de evenwichtsooplossing aantrekkend? Ga dit ook na met de GR voor startwaarden $x_0 = 20$, $x_0 = 50$.*

Opgave 2.7.4 *Beschouw de lineaire differentievergelijking*

$$x_{n+1} = ax_n + b, \quad x_n \geq 0,$$

met $n = 0, 1, 2, \dots$ en a en b constanten. Onder welke voorwaarden bestaat er een evenwichtsooplossing? Dezelfde vraag voor een periode 2 oplossing.

Bij periode 3 is de vergelijking die we moeten oplossen van graad 8. Men kan nagaan, dat indien men de parameter a laat oplopen naar $a^* = 3.569946 \dots$, er oneindig veel periodieke punten bijkomen met steeds een verdubbelde periode: 4, 8, 16, \dots . Bij elke nieuwe periodieke oplossing is deze, als hij ontstaan is, aantrekkend, terwijl de voorafgaande periodieke oplossingen blijven bestaan, maar afstotend zijn geworden. Het zal duidelijk zijn, dat in een omgeving van $a = a^*$, de dynamica van de oplossingen van differentievergelijking (2.10) tamelijk complex is.

Als de periode k niet te groot is kunnen we deze periodieke punten ook grafisch vinden zoals in fig 2.5. Merk echter op, dat niet bij iedere

k een periodiek punt bestaat met minimale periode k . De logist vgl. (2.10) is rijk aan verschijnselen, maar wat we tot nu toe zagen blijkt pas het begin te zijn van de beschrijving. Behalve dekpunten, periodieke punten en punten die na herhaalde afbeelding in de limiet naar dekpunten of periodieke oplossingen toegaan, zijn er ook *aperiodieke* punten of *zwerfpunten*.

Definitie

Een punt x_0 heet aperiodiek voor vgl. (2.10) met $0 < a \leq 4$ indien er geen natuurlijk getal $k \in \mathbb{N}$ is te vinden, waarvoor $\lim_{m \rightarrow \infty} f^{mk}(x_0)$ bestaat. In dat geval heet de afbeelding f chaotisch.

Het is natuurlijk merkwaardig, dat het begrip aperiodiek is gedefinieerd met betrekking tot een speciale vergelijking (2.10). Onze kennis van verschijnselen als aperiodiciteit en chaos is echter nog zo beperkt, dat we deze begrippen bij elk probleemgebied waar deze zich voordoen, opnieuw definiëren.

Het blijkt dat, voor bepaalde waarden van a , de vgl. (2.10) niet alleen oneindig veel periodieke punten bezit, maar ook oneindig veel aperiodieke punten. Het is zeer verrassend, dat dergelijke ingewikkelde verschijnselen reeds bij een eerste orde, kwadratische vergelijking zijn te constateren. Meer hier over is te vinden in Zebra 16 over ‘Chaos en Orde’.

Opgave 2.7.5 *In Zebra 16 wordt aangetoond dat de logist, vgl. (2.10), chaotische oplossingen heeft indien $a = 4$. Experimenteer eens met de GR voor $a = 3.5$ en $a = 4$. Kies x_0 , bijvoorbeeld $x_0 = 0.6$. Realiseer je dat als de oplossingen chaotisch zijn, naburige oplossingen ‘hevig uit elkaar lopen’. Dat betekent dat de afrondingsfout die de GR maakt, al bij tien keer ENTER onzin levert.*

Opgave 2.7.6 *Ga naar de website wisweb en kies de Applet Webgrafiek. Je hebt de keuze uit de functies $f(x) = a \sin x$, $x^2 + a$ en $ax(1-x)$ (de logist). Experimenteer met verschillende waarden van de parameter a en probeer de aard van de periodieke oplossingen vast stellen, dat wil zeggen de periode en de stabiliteit.*

2.8 Oogststrategieën

We kunnen ook modellen maken, waarbij in een populatie naast de natuurlijke geboorte- en sterfteprocessen, door andere effecten individuen “ontstaan” en “verdwijnen”. Bijvoorbeeld door emigratie of vangst.

We bespreken nu de situatie, waarbij door gericht vangen, afschieten of hoe dan ook, individuen uit de populatie worden verwijderd. Voorbeelden zijn de vangst van walvissen of haringen, insectenbestrijding, de jacht op herten.

Model 1: de overheid stelt regels

Beschouw het vangen van haring in de Noordzee. Er is sprake van stevige overbevissing, er worden regelmatig door de Europese Unie quota ingesteld om te grote reductie van de haringstand (en andere vissoorten) te voorkomen. Er zijn verder voorschriften over de tijd van het jaar waarin gevangen wordt en de minimumgrootte van de te vangen vis. Deze laatste effecten verwaarlozen we nu. Door de bevissing zal de haringpopulatie sterk gereduceerd worden en volgens Malthus groeien als $N_{n+1} = r N_n$ met $r > 1$. In het n^{de} jaar wordt de toegelaten vangst vastgesteld: v_n . De vergelijking wordt met gegeven N_0 :

$$N_{n+1} = r N_n - v_n. \quad (2.11)$$

Indien we de populatie konstant op N_0 willen houden, kiezen we v_n vast: $v_n = v_0$. We eisen

$$N_1 = r N_0 - v_0 = N_0,$$

zodat $v_0 = (r - 1)N_0$. In de praktijk gaat dit niet zo precies, omdat zowel r als N_0 op schattingen berusten met grote onzekerheden. We kunnen beter $v_0 < (r - 1)N_0$ kiezen en, bij eventueel sterkere groei dan verwacht, de vangst v later bijstellen. De vergelijking met constante vangst bestudeerden we al in §2.5 in de vorm van vgl. (2.6), de oplossing is daar gegeven.

Model 2: de overheid stelt strenge regels

De situatie ligt anders indien de populatiegrootte dichter ligt bij de maximale grootte, de draagcapaciteit van een gebied. Gebruikmakend van de logistische vergelijking krijgen we

$$x_{n+1} = a x_n(1 - x_n) - v_n \quad (2.12)$$

met x een geschaalde dichtheid als in §2.6 en v_n eveneens geschaalde vangsthoeveelheden. Deze vergelijking kan bijvoorbeeld gebruikt worden bij de beschrijving van populatiegroei van herten of everzwijnen op een beperkt gebied zoals de Veluwe, waarbij voor de jacht jaarlijks quota worden vastgesteld.

Indien $0 < a < 1$, dan sterft de populatie uit en als $a > 4$, dan kan de dichtheid x groter dan 1 worden; kies dus $1 < a < 4$. We moeten nu de vangststrategie nader specificeren. Willen we de vangst op lange termijn maximaliseren of willen we gewoon de populatiegrootte constant houden? We kunnen geen *verantwoorde strategiekeuze* maken voordat we iets meer van de oplossingen (de dynamica) van het probleem begrijpen.

Opgave 2.8.1 *a. We kiezen in vgl. (2.12) v_n constant, $v_n = v_0$ voor alle n en $a > 0$. Ga na dat er alleen evenwichtspunten zijn als $(a - 1)^2 - 4av_0 \geq 0$ en dat deze dan gegeven worden door:*

$$p_{1,2} = \frac{a-1}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{a-1}{2a}\right)^2 - \frac{v_0}{a}} \quad (2.13)$$

b. Wat zou er gebeuren als $(a - 1)^2 - 4av_0 < 0$? Experimenteer eens met bijvoorbeeld $a = 3, v_0 = 1$.

Opgave 2.8.2 *Zoals eerder is aangegeven kunnen we voor een vergelijking van het type $x_{n+1} = f(x_n)$ de attractie-eigenschappen vaststellen door de afgeleide in de evenwichtspunten te berekenen: $f'(x) = a(1 - 2x)$. Laat zien dat als de evenwichtspunten bestaan, dit leidt tot de afgeleiden:*

$$f'(p_1) = 1 + \sqrt{(a-1)^2 - 4v_0a} \quad , \quad f'(p_2) = 1 - \sqrt{(a-1)^2 - 4v_0a}$$

Opgave 2.8.3 *Ga na, dat voor $v_0 = 0$ de resultaten uit de vorige paragraaf worden teruggevonden.*

Opgave 2.8.4 *Ga na dat p_1 altijd afstotend is.*

Opgave 2.8.5 *Laat zien dat er waarden van a en v_0 zijn waarvoor p_2 ook afstotend is.*

Opgave 2.8.6 *Schets voor een aantal waarden van a en v_0 het webdiagram van de functie $f(x) = ax(1-x) - v_0$. Merk op dat deze functie niets anders is dan een naar beneden verschoven versie van de logistische functie $ax(1-x)$. Voor de “zuivere”logist, dus met $v_0 = 0$, zijn er waarden van a waarvoor de populatie chaotisch in de tijd verandert.*

Model 3: de vissers doen wat ze willen

Een andere vangststrategie, als tot nu beschreven, komt tot stand als de vangst evenredig is met de aanwezige populatiegrootte. “Men vangt in verhouding tot wat men aantreft”. Mogelijk was dit het geval bij de walvisvangst tot de jaren '70 van de vorige eeuw. In plaats van de vangstvergelijking (2.12) krijgen we nu

$$x_{n+1} = a x_n(1 - x_n) - b x_n \quad (2.14)$$

met $a, b > 0$ waarbij b het resultaat van de vangstinspanning aangeeft. De behandeling gaat bijna geheel als in de vorige paragraaf; voor de dichtheid x geldt weer $0 \leq x \leq 1$. Mogelijke evenwichtspunten zijn

$$p_1 = 0, \quad p_2 = \frac{a - 1 - b}{a}$$

Het evenwicht p_2 kan worden gerealiseerd op het interval $(0, 1)$ als $a > 1 + b$. Zo niet, dan sterft de populatie op den duur uit (dit model gold waarschijnlijk een tijd lang bij de walvisvangst, maar men is tijdig gestopt). Daar $f'(p_2) = 2 - a + b$, is p_2 een attractor indien $1 + b < a < 3 + b$.

Hoofdstuk 3

Discrete economische modellen

Bij het bestuderen van economische groeimodellen zullen we gebruik maken van een aantal begrippen uit de macro-economie. Allereerst geven we een korte toelichting op deze begrippen, vervolgens analyseren we een aantal modellen.

In de macro-economie houden we ons bezig met de grote lijnen van het economisch proces in de wereld of een land als geheel. We houden ons hier niet bezig met detailproblemen als de prijzen van de veeteeltproducten in de Europese Unie of de werkgelegenheid in de metaalnijverheid in Noord-Brabant, maar met grootheden als het *globale* prijsniveau en de *globale* werkgelegenheid in de wereld.

In de eenvoudige modellen die we hier zullen bestuderen zal er steeds slechts sprake zijn van één productiesector; bovendien beschouwen we slechts de economie van een afgesloten gemeenschap, met andere woorden er is geen import en export. Gesloten economiën met één productiesector heten in de economie veelal “national income models”.

Het is hierbij interessant om op te merken, dat zelfs deze eenvoudige modellen van recente datum zijn. Mechanicamodellen stammen uit de 16e en 17e eeuw, populatiedynamica is begonnen rond 1900. De eerste modellen ter beschrijving van de groei van kapitaal in een gesloten economie zijn ontwikkeld door R.F. Harrod en E.D. Domar in de jaren 1940-50. Economie is een jonge wetenschap.



3.1 Enkele economische variabelen

De variabelen en grootheden die een rol spelen zijn de volgende:

- Y : nationaal inkomen (ook wel genoemd: nationaal product), dat is de totale hoeveelheid geld die per jaar door overheid en bevolking aan goederen, diensten, etc. wordt uitgegeven.
- C : consumptie; de totale hoeveelheid geld die per jaar door de bevolking voor privégebruik aan goederen en diensten wordt uitgegeven.
- K : kapitaal, dat is het geheel van materieel dat noodzakelijk is voor de productie, in geld uitgedrukt (bijv. fabrieksgebouwen en terreinen, machinerie, winkels, maar ook voorraden gedeeltelijk en geheel gereedgekomen goederen).
- I : investeringen: de hoeveelheid geld die per jaar besteed wordt aan uitbreiding en instandhouden van het kapitaal.
- N : de totale beroepsbevolking.

We zullen ook het begrip *conjunctuur* tegenkomen. Daarmee worden de schommelingen van het nationaal inkomen rond de lange termijn trend bedoeld. Het nationaal inkomen Y is een maat voor de welvaart van een land, maar een betere maat is Y/N , het nationaal inkomen per hoofd van de beroepsbevolking.

3.2 Economische vergelijkingen en wetten

Bij onze beschouwingen zullen wij uitgaan van een aantal economische vergelijkingen, waaronder wij minstens twee types kunnen onderscheiden.

Ten eerste de evenwichtsvergelijking. Deze kan worden afgeleid uit de definitie van de gebruikte grootheden. In veel modellen geldt bijvoorbeeld

$$Y = C + I.$$

Deze vergelijking brengt tot uiting dat het nationaal inkomen Y op twee manieren besteed wordt : door consumptie C en door investeringen I .

Bij het opstellen van de benodigde modelvergelijkingen wordt veelal uitgegaan van dergelijke identiteiten.

Ten tweede de empirische gedragsvergelijking, die is ontstaan door observatie van het economisch gebeuren. Bijvoorbeeld: het nationaal inkomen Y zal evenredig zijn met de aanwezige productiemiddelen K .

De vergelijkingen van het eerste type zijn dus een rechtstreeks gevolg van de door ons ingevoerde begrippen en definities binnen het gekozen model. Het tweede type vergelijkingen heeft het karakter van een economische wetmatigheid die empirisch is vastgesteld. Naar zulke wetmatigheden zijn economen altijd op zoek.

Een waarschuwing is hier op zijn plaats. Wiskundigen (en ook natuurkundigen) zijn er aan gewend dat de modellen die ze bestuderen een hoge mate van realiteitswaarde bezitten: ze lijken tamelijk goed op de werkelijkheid. Dat is in de economie niet het geval en de modellen daar gaan vaak over een deel van de totale economie en dan ook vaak over een relatief korte tijdsperiode. Er zijn nu eenmaal vaak veranderingen in de wereld door politieke en sociale gebeurtenissen, plotselinge natuurrampen, oorlog enzovoort. De gebruikte modellen moeten dan vaak aangepast worden en de berekeningen opnieuw uitgevoerd. Een exercitie als “wat gebeurt er in het model als de tijd naar oneindig loopt?” is vaak een aardige wiskundige opgave, maar economisch heeft dat weinig betekenis.

3.3 Het basismodel voor economische groei

We beschouwen een economie bepaald door de grootheden: Y (nationaal inkomen), C (consumptie), K (hoeveelheid kapitaalgoederen) en I (investering in kapitaalgoederen). Ook speelt de omvang van de beroepsbevolking (N) een rol.

We nemen aan, dat op elk tijdstip de volgende evenwichtsrelatie geldt:

$$Y = C + I. \quad (3.1)$$

Verder nemen we aan, dat consumptie en investeringen lineair evenredig zijn met het nationaal inkomen:

$$I = sY; \quad C = (1 - s)Y \quad \text{met } 0 < s < 1. \quad (3.2)$$

De groei van de kapitaalgoederen van tijdstip n naar tijdstip $n + 1$ wordt beschreven door

$$K_{n+1} = K_n + I_n - \delta K_n, \quad (3.3)$$

waarbij $\delta > 0$ de factor is die bepaalt hoe de hoeveelheid kapitaalgoederen afneemt door slijtage, zoekraken, enzovoort.

We nemen aan, dat de produktie en daarmee het nationaal inkomen evenredig is met de hoeveelheid kapitaalgoederen K . Een eenvoudige aanname is dat de produktie recht evenredig is met K zodat

$$Y_n = \beta K_n,$$

met β een positieve constante. Dan geldt met vgl. (3.1, 3.2, 3.3)

$$\begin{aligned} Y_{n+1} &= \beta K_{n+1}, \\ &= \beta K_n + \beta I_n - \beta \delta K_n, \\ &= Y_n + \beta s Y_n - \delta Y_n, \\ &= (1 + \beta s - \delta) Y_n. \end{aligned}$$

Dus

$$Y_{n+1} = (1 + \beta s - \delta) Y_n. \quad (3.4)$$

Dit is een groeivergelijking van het type dat behandeld is in hoofdstuk 2.1. Het nationaal inkomen groeit als

$$1 + \beta s - \delta > 1 \rightarrow \beta s > \delta.$$

Er is dus groei van het nationaal inkomen als de productiviteit, bepaald door β , en de spaarfactor (investeringen, bepaald door s) groot genoeg zijn. Dat wil overigens niet zeggen dat de welvaart dan toeneemt. Daarvoor moet je dat inkomen per hoofd van de bevolking uitrekenen, dat wil zeggen Y_n/N_n . Neem aan dat de bevolking groeit volgens het model van Malthus: $N_{n+1} = rN_n, r \geq 0$. Als we vgl. (3.4) links en rechts door N_{n+1} delen, krijgen we

$$\frac{Y_{n+1}}{N_{n+1}} = (1 + \beta s - \delta) \frac{Y_n}{N_{n+1}},$$

zodat

$$\frac{Y_{n+1}}{N_{n+1}} = \frac{(1 + \beta s - \delta) Y_n}{r N_n}. \quad (3.5)$$

Opgave 3.3.1 *Beschouw het nationaal inkomen van een welvarende wereld. Er wordt flink geïnvesteerd, $s = 0.5$, we nemen $\beta = 1$. De produktiemiddelen (kapitaal) worden tamelijk snel afgedankt, we kiezen $\delta = 0.3$ en $Y_0 = 100$ (de geldeenheid geven we niet aan, het kan bijvoorbeeld 100 miljard zijn). We gaan de GR gebruiken.*

a. *Bereken de ontwikkeling van de economie voor $n = 1, \dots, 5$.*

b. *Als de bevolkingsgrootte gelijk blijft, geldt $r = 1$ en is Y_n een maat voor de welvaart; het nationaal inkomen per hoofd van de bevolking is Y_n/N_0 .*

Stel nu dat $r = 1.1$, de bevolking groeit. Groeit de welvaart Y_n/N_n ?

c. *Bij bevolkingsgroei en gebrek aan geld om te investeren wordt de bevolking steeds minder welvarend. Dat is de situatie waarin ontwikkelingslanden verkeren. Neem $\delta = 0.3, Y_0 = 100, s = 0.1, \beta = 1$ en $r = 1.1$. Groeit de welvaart?*

3.4 Verbetering van het basismodel

Om de productiefunctie lineair (recht evenredig) met het kapitaal te nemen is wel wat eenvoudig. Soms levert een investering in kapitaalgoederen een geweldige verbetering op van de productie. Denk bijvoorbeeld aan de productie van kranten waarbij lang geleden alle letters stuk voor stuk werden gezet en toen de overgang naar snelle, digitale zetmachines waar nu de kranten mee gedrukt worden. Een productiefunctie als $Y = \beta K^2$ of $Y = \beta K^3$ is in zo'n overgangstijd meer op zijn plaats.

Anderzijds zal vaak een vergroting van kapitaalgoederen minder dan een recht evenredige vergroting van de productie met zich mee brengen. Meer kapitaalgoederen brengt namelijk ook andere complicaties met zich mee: beheer en onderhoud waarvoor apart personeel nodig is, een personeelsfunctionaris of boekhouder als er meer personeel komt. Het verschijnsel dat vergroting van het kapitaal (productiemiddelen) *minder* dan recht evenredig de productie vergroot, wordt in de economie *de wet van de verminderde meeropbrengst* genoemd. De productiefunctie die dit beschrijft is bijvoorbeeld van de vorm

$$Y = \beta K^{\frac{1}{2}}.$$

In het algemeen stellen we

$$Y = \beta K^{\alpha},$$

waarbij $\alpha > 1$ geldt in een periode van zeer voordelige investeringen en - meer gebruikelijk - $0 < \alpha < 1$ als de wet van de verminderde meeropbrengst geldt. We krijgen dus met vgl. (3.1, 3.2, 3.3)

$$\begin{aligned} Y_{n+1} &= \beta K_{n+1}^{\alpha}, \\ &= \beta(K_n + I_n - \delta K_n)^{\alpha}, \\ &= \beta \left(\left(\frac{Y_n}{\beta} \right)^{\frac{1}{\alpha}} + sY_n - \delta \left(\frac{Y_n}{\beta} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right)^{\alpha}, \\ &= \left(Y_n^{\frac{1}{\alpha}} + s\beta^{\frac{1}{\alpha}} Y_n - \delta Y_n^{\frac{1}{\alpha}} \right)^{\alpha}. \end{aligned}$$

Dat ziet er ingewikkeld uit. Als bijvoorbeeld $\alpha = 1/2$ dan geldt

$$Y_{n+1} = (Y_n^2 - \delta Y_n^2 + s\beta^2 Y_n)^{\frac{1}{2}}.$$

Indien $\alpha = 2$ geldt

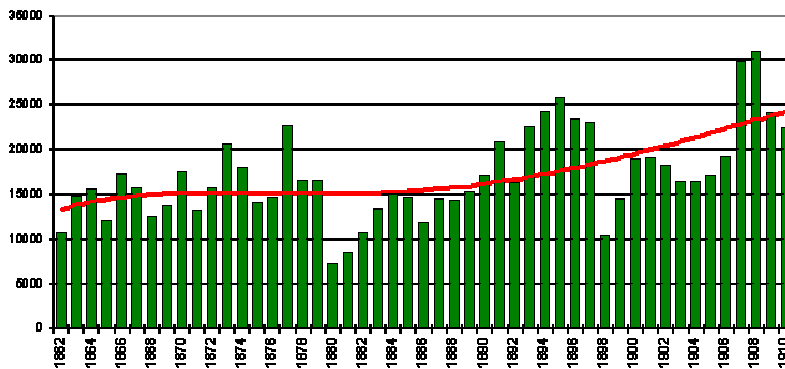
$$Y_{n+1} = (1 - \delta)^2 Y_n + 2(1 - \delta)s\beta^{\frac{1}{2}} Y_n^{\frac{3}{2}} + s^2 \beta Y_n^2.$$

Opgave 3.4.1 *Vergelijk de groei van het nationaal inkomen bij het basismodel en het verbeterde basismodel voor $\alpha = 0.9$ en $\alpha = 1.1$. Kies $Y_0 = 100$, $\delta = 0.1$, $s = 0.5$, $\beta = 1$. Bereken de ontwikkeling in deze drie gevallen voor $n = 1, \dots, 5$.*

3.5 Extra: Conjunctuur

De welvaart is de afgelopen honderd jaar in grote delen van de wereld sterk toegenomen, maar dat betekent echter niet dat de toename van de welvaart gelijkmatig is geweest. Perioden van versnelling en vertraging van de welvaartstoename hebben zich afwisselend voorgedaan. Soms was er weinig werkloosheid en werd er veel verdiend, in andere jaren ging het minder goed.

Onder *conjunctuur* verstaat men deze min of meer regelmatige afwisseling van op- en neergang in het economische leven, zoals deze weerspiegeld wordt in nationaal inkomen, prijzen, en dergelijke economische grootheden. Het betreft hierbij schommelingen rond de langdurige trend van de economische ontwikkeling.



Figuur 3.1: Verkoop van varkens op de markt van Leuven, België.

De hier genoemde schommelingen worden in de economie conjunctuurgolven genoemd. Het taalgebruik wijkt af van de overeenkomstige terminologie in de mechanica, waar schommelingen van grootheden die alleen van de tijd afhangen trillingen worden genoemd. De bekendste golfbeweging van de conjunctuur is de *juglar* (genoemd naar J.C. Juglar), die een duur van 6 á 10 jaren heeft. Er kan ook een lange golfbeweging worden onderscheiden met een duur van 40 á 60 jaren; één van de ontdekkers is N. Kondratieff. De verschillende theoriën over conjunctuurgolven zijn in de economie nog erg omstreden, maar natuurlijk erg interessant.

Het begrip conjunctuur en conjunctuurgolf hebben we nogal vaag

omschreven. Een preciezer beschrijving vindt eigenlijk plaats door het analyseren van conjunctuurmodellen. We bekijken er enkele eenvoudige.

3.5.1 De varkensmarkt

De verklaring voor het ontstaan van conjunctuurgolven wordt gezocht in de werking van de markteconomie, met name in het niet uitkomen van de verwachtingen van consumenten en investeerders. Stel de conjunctuur bevindt zich in opgaande beweging, er wordt meer geïnvesteerd omdat de verwachtingen hoger gesteld zijn. Hierdoor neemt de hoeveelheid kapitaalgoederen toe, maar bij te grote toename zal het rendement dalen. De verwachtingen worden hierdoor negatief beïnvloed, de investeringen nemen af en tevens de consumptieve bestedingen. Na enige tijd is de voorraad van kapitaalgoederen te sterk afgenomen en zullen de ondernemers opnieuw tot investering over moeten gaan. De conjunctuur kan zich weer in opgaande lijn bewegen. Een bekend voorbeeld uit de economie is de zogenaamde ‘varkensmarkt’.



Als de prijzen van varkens hoog zijn, gaan de fokkers hun capaciteit voor varkens uitbreiden om meer varkens op de markt te kunnen brengen. Dat proces duurt echter wel een jaar en omdat veel fokkers zo reageren, zullen er veel varkens op de markt komen zodat de prijs zal dalen. Dan krimpen de fokkers hun capaciteit in, het volgende jaar

komen er minder varkens op de markt en de prijzen stijgen. Op dat moment herhaalt het verhaal zich zodat de prijzen jaarlijks op en neer gaan.

Natuurlijk geldt dit ook voor alle andere producten waarbij je per jaar op de marktontwikkeling kunt inspelen, zoals aardappelen, fruit enzovoort.

3.5.2 Een eenvoudig conjunctuurmodel

We zetten nu een concreet model op. De economische grootheden nationaal inkomen Y , de investeringen I en consumptie C beschouwen we als discrete grootheden die van de tijd n afhangen (tijdseenheid bijvoorbeeld 1 jaar). Veronderstel, de evenwichtsvergelijking geldt op elk tijdstip:

$$Y_n = C_n + I_n \quad (3.6)$$

De overheid neemt geen speciale maatregelen om de investeringen te bevorderen; stel als eenvoudig geval, dat de investeringen constant zijn:

$$I_n = I_0, \quad 0 < I_0 < Y_n. \quad (3.7)$$

De consumenten besteden hun geld allereerst aan het meest noodzakelijke zoals voedsel, onderdak en verwarming. Dat levert een basisbesteding, zeg C_0 . Houden ze in een bepaalde periode geld over, dan zullen ze in de volgende periode wat meer besteden. Op deze manier geldt

$$C_n = cY_{n-1} + C_0, \quad 0 < C_0 < C_n < Y_n, \quad 0 < c < 1. \quad (3.8)$$

De factor c is kleiner dan 1 omdat maar een deel van het nationaal inkomen Y_n aan consumptie kan worden besteed; c heet de *marginale consumptiequote*.

De gezinnen passen dus hun bestedingen aan met een vertraging van een tijdsperiode (als ze verstandig zijn). Substitutie van vgl. (3.7) en vgl. (3.8) in (3.6):

$$Y_{n+1} = C_{n+1} + I_{n+1}$$

levert de eerste orde differentievergelijking

$$Y_{n+1} = C_0 + I_0 + cY_n. \quad (3.9)$$

Als op tijdstip $n = 0$, Y_0 (begintoestand) is gegeven, dan geldt

$$\begin{aligned} Y_1 &= C_0 + I_0 + cY_0, \\ Y_2 &= C_0 + I_0 + cY_1, \\ &= (C_0 + I_0)(1 + c) + c^2Y_0. \end{aligned}$$

Reken zelf Y_3 uit. We raden dan de uitdrukking voor algemene n :

$$Y_n = (C_0 + I_0)(1 + c + c^2 + \dots + c^n) + c^nY_0.$$

We gebruikten al eerder dat geldt

$$1 + c + c^2 + \dots + c^n = \frac{1 - c^{n+1}}{1 - c}$$

en vinden dan voor het gedrag van het nationaal inkomen met de tijd:

$$Y_n = (C_0 + I_0) \frac{1 - c^{n+1}}{1 - c} + c^{n+1}Y_0. \quad (3.10)$$

Omdat $0 < c < 1$ zal c^n op den duur steeds kleiner worden en naar nul naderen. Dan geldt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = \frac{C_0 + I_0}{1 - c}.$$

Het nationaal inkomen gaat naar een vaste waarde en de conjunctuurgolf dempt op den duur uit. Zo gaat het natuurlijk niet in een echte economie, maar dat hoeft ons niet te verbazen omdat de aannames van dit model wel erg eenvoudig zijn, namelijk c constant en de investeringen constant (I_0). Dat wil zeggen dat de ondernemers hun gedrag niet aanpassen terwijl de consumenten dat wel doen. Bovendien geldt elk economisch model slechts voor enige tijd en heeft het geen zin om n naar ∞ te laten naderen.

Opgave 3.5.1 Kies voor de constanten $c = 0.1$, $C_0 = 90$, $I_0 = 10$, $Y_0 = 100$. Bereken Y_n voor $n = 0, \dots, 5$ voor dit eenvoudige conjunctuurmodel.

3.5.3 Een verbeterd conjunctuurmodel

We kunnen het conjunctuurmodel verbeteren. Neem weer aan dat vgl. (3.6) geldt: $Y_n = C_n + I_n$, eveneens dat het consumptiegedrag zich aanpast bij het nationaal inkomen volgens vgl. (3.8). Een nieuw element is nu dat de ondernemers hun investeringen baseren op de af- of toename van de resultaten van hun ondernemen. Als het nationaal inkomen constant is, investeren ze I_0 .

Als $Y_{n-1} - Y_{n-2} > 0$ (toename), dan investeren ze meer.

Als $Y_{n-1} - Y_{n-2} < 0$ (afname), dan investeren ze minder.

Dit gedrag wordt weergegeven door de vergelijking

$$I_n = I_0 + a(Y_{n-1} - Y_{n-2}) \quad (3.11)$$

met $a > 0, I_n \geq 0$. We kunnen nu voor dit model de vergelijking voor het verloop van het nationaal inkomen opstellen:

$$\begin{aligned} Y_{n+1} &= C_{n+1} + I_{n+1}, \\ &= C_0 + cY_n + I_0 + a(Y_n - Y_{n-1}), \\ &= C_0 + I_0 + (a + c)Y_n - aY_{n-1}. \end{aligned}$$

Omdat de ondernemers zich op de afgelopen twee periodes baseren, kunnen we niet volstaan met Y_0 als gegeven te beschouwen, ook Y_1 moet bekend zijn. We rekenen Y_2 uit:

$$Y_2 = C_0 + I_0 + (a + c)Y_1 - aY_0.$$

Voor Y_3 geldt:

$$\begin{aligned} Y_3 &= C_0 + I_0 + (a + c)Y_2 - aY_1, \\ &= C_0 + I_0 + (a + c)(C_0 + I_0) + (a + c)^2Y_1 - a(a + c)Y_0 - aY_1. \end{aligned}$$

Het is mogelijk om de vergelijking voor Y_n op te lossen, maar veel zin heeft dat niet. Economische modellen gelden altijd maar voor een beperkte tijd, omdat de omstandigheden nogal snel veranderen.

Opgave 3.5.2 Kies dezelfde waarden voor de constanten C_0, I_0, Y_0 als in opgave 3.5.1 en $a = 0.1$. Kies nu eerst $Y_1 = 90$ en dan $Y_1 = 110$; bereken Y_n voor $n = 2, 3, 4, 5$. Vergelijk het verloop van het nationaal inkomen met het model uit opgave 3.5.1. Ga door experimenteren met de GR na of het resultaat erg afhankelijk is van de keuze van Y_1 ?

Hoofdstuk 4

Meer opgaven

Opgave 4.0.3 Zoals we al zagen in §1.2, is de toename van spaargeld door rente eenvoudig te modelleren. Begin met een inleg S_0 , in jaar n bedraagt het spaargeld S_n . Stel de rente is r (bij 4% rente geldt dus $r = 0.04$). Dan geldt bij jaarlijkse rentebijschrijving

$$\begin{aligned} S_1 &= S_0 + rS_0, \\ S_2 &= S_0 + rS_0 + r(S_0 + rS_0) = (1 + 2r + r^2)S_0, \\ &= (1 + r)^2 S_0. \end{aligned}$$

De tijdseenheid 1 is hier een jaar. Je herkent dezelfde toename als bij bevolkingsgroei in §2.2. Dus

$$S_n = (1 + r)^n S_0.$$

De verdubbeling van je spaargeld ligt weer vast, leid hiervoor de formule af:

$$\text{verdubbelingstijd} : \ln 2 / \ln(1 + r) \text{ afgerond op een jaar.}$$

Bereken de verdubbelingstijd bij 3.5% rente.

Opgave 4.0.4 Als je geld leent van de bank, betaal je altijd meer rente dan je krijgt bij sparen. Bovendien brengen banken graag de rente per 3 maanden in rekening of zelfs per maand. Bereken de (echte) betaalde rente over een vast bedrag S_0 tegen een rente r die elke maand geïnd wordt. Met "echt" is bedoeld de rente op jaarbasis.

Opgave 4.0.5 *Iemand die 20 jaar oud is wil door sparen op zijn 30e Eur 10 000 op zijn rekening hebben. Hij brengt elk jaar een vast bedrag naar de bank, de rente is 4%. Hoeveel geld moet hij elk jaar inleggen?*

Opgave 4.0.6 *Opgaven over limieten.*
Bereken de volgende limieten als deze bestaan:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} 5^{-n}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{4^n}\right), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 - \frac{7}{3^n}\right), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{4}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 6n}{2n}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2n} + 10^{-n}\right), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^3 - 7n^2 + 11}{2n^3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ met } a_n &= 3 \text{ als } n \text{ oneven is,} \\ a_n &= 3 + \frac{1}{n^2} \text{ als } n \text{ even is,} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ met } a_n &= 1 \text{ als } n \text{ oneven is,} \\ a_n &= -1 \text{ als } n \text{ even is.} \end{aligned}$$

Opgave 4.0.7 *Bekijk eens de differentievergelijking*

$$x_{n+1} = 1.5x_n - 30, \quad x_0 = 40.$$

Zie het als een diersoort die gehouden wordt, waarbij er elk jaar (tijds-eenheid 1) 30 dieren verkocht worden. Kan het bedrijf deze handelspraktijk volhouden?

Stel dat er per jaar een vast aantal dieren verkocht wordt. Hoeveel dieren kunnen maximaal per jaar worden verkocht terwijl het bedrijf kan voortbestaan?

Opgave 4.0.8 *Op de Veluwe leven herten. Ze hebben geen natuurlijke vijanden zodat deze populatie elk jaar de draagcapaciteit van de Veluwe behoorlijk opvult. In de winter is de draagcapaciteit kleiner, namelijk 700; in de zomer is deze 1000. Bijvoederen in de winter levert een steeds grotere populatie, zodat gekozen is voor jaarlijks afschieten van een aantal exemplaren in november. We gebruiken het model van Malthus met $r = 1.5$. In jaar 0 wordt het aantal herten in november op $N_0 = 700$ gebracht. Hoeveel moeten er worden afgeschoten in november van jaar 1, en van jaar 2?*

Het jagen op dieren blijkt veel protesten op te leveren en wil men dus minimaliseren. Anderzijds wil men een zo groot mogelijk aantal herten op de Veluwe laten leven. Wat zou je keuze van N_0 kunnen zijn om beide doelen zoveel mogelijk te verenigen?

Opgave 4.0.9 *Beschouw een populatie waarvan de groei wordt beschreven door de vergelijking*

$$x_{n+1} = -x_n^2 + 2x_n - c.$$

Het getal $c \geq 0$ geeft aan hoeveel exemplaren van de populatie per tijdseenheid worden weggevangen. Stel dat c nog gekozen kan worden, maar dan constant is. Voor welke waarden van c bestaat er een (positieve) evenwichtoplossing? Ga na of deze stabiel is.

Opgave 4.0.10 *Bij opgave 1.1.3 stelden we de vergelijking op voor verandering van de (chemische) vuilconcentratie in een meer door het binnenstromen van een vervuilde rivier. De vergelijking is*

$$c_{n+1} = c_n + \frac{c_r v_r}{V} - \frac{c_n v_r}{V}.$$

a. *Deze vergelijking is van de vorm 2.6, we hebben de oplossing daarvan gegeven. Hoe luidt de oplossing in dit geval bij gegeven c_0 ? Ga na welke waarde de concentratie aanneemt in de limiet voor $n \rightarrow \infty$.*

b. *Beschouw de situatie waarbij de doorstroming zo is, dat $v_r/V = 1/10$. Stel we beginnen met vervuiling van het meer c_0 en de vervuiling door de rivier groeit naar $100c_0$. Dan verandert de milieuwetgeving en wordt de vervuiling radicaal gestopt. Na hoeveel tijdseenheden is de vervuiling van het meer weer terug op c_0 ?*

Hoofdstuk 5

Continue dynamische systemen

Er zijn een heleboel verschijnselen die je het beste met discrete tijdstappen kunt bestuderen. Dat is bijvoorbeeld het geval als je de groei van een populatie zoals herten bekijkt die alleen nakomelingen in het voorjaar produceert en bovendien van beperkte grootte is. Er zijn andere processen waarbij dit niet zo praktisch is. Om bij populatiegroei te blijven, denk aan de groei van duizenden bacteriën in een laboratoriumkolf die zich heel snel vermenigvuldigen. Of aan de mensenbevolking van Z-Amerika, ongeveer 300 miljoen inwoners, terwijl er ‘elk ogenblik’ mensen sterven en geboren worden. Op een heel ander gebied: als je een bal opgooit, dan veranderen de hoogte en de snelheid van de bal tijdens het vliegen natuurlijk op een continue manier. Voor dergelijke verschijnselen ligt een continue beschrijving, dat wil zeggen een beschrijving waarbij de grootheden continu in de tijd veranderen, veel meer voor de hand. We beginnen weer met het voorbeeld van bevolkingsgroei.

5.1 Continue bevolkingsgroei volgens Malthus

Het model van Malthus, dat gegeven is door de vgl. (2.1) met beginvoorwaarde, wordt wel een discreet model genoemd omdat we de groei van de bevolking met vaste tijdstappen ($\Delta t > 0$) volgen. Indien de bevolking groot genoeg is, verandert het aantal individuen voortdurend

met kleine tijdstappen (er worden bijna voortdurend individuen geboren) en ligt het meer voor de hand een continue beschrijving te geven. Daartoe schrijven we de vergelijking als

$$\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = k N(t).$$

Omdat de tijdstappen nu heel klein zijn, nemen we de limiet voor $\Delta t \rightarrow 0$ en leggen dezelfde beginwaarde op. Het nemen van de limiet voor $\Delta t \rightarrow 0$ is de reden om de nader te bepalen constante α te gebruiken in plaats van k ; α geeft de *ogenblikkelijke* aangroeiing aan, k de aangroeiings-index over een *vaste tijdseenheid*. Dat zijn natuurlijk twee verschillende dingen. Limiet nemen levert de vergelijking

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N, \quad N(t_0) = N_0. \quad (5.1)$$

Dit is een differentiaalvergelijking met begin(voor)waarde; de oplossing is (ga na door invullen)

$$N(t) = N_0 e^{\alpha(t-t_0)}.$$

Indien we eisen, dat het discrete en het continue model dezelfde bevolkingsgroei leveren, moet op tijdstip $t = t_0 + n\Delta t$ de uitkomst van beide vergelijkingen gelijk zijn, zodat we met vgl. (2.4) vinden

$$(1 + k \Delta t)^m N_0 = N_0 e^{\alpha n \Delta t}$$

of

$$\alpha = \frac{\ln(1 + k \Delta t)}{\Delta t}$$

We zien dat α niet van het aantal tijdstappen n afhangt, maar wel, zoals te verwachten is, van de tijdstap Δt .

- Opgave 5.1.1** a. *We verwachten dat $\alpha < k$; is dat begrijpelijk?*
 b. *Neem eens tijdstappen $\Delta t = 1$. Vergelijk met de GR α en k .*

Opgave 5.1.2 *Een ruwe schatting van de groei van de wereldbevolking en die van Nederland is te vinden in de volgende lijst:*

	1750	1800	1920	1960	1987	2004
<i>wereldbevolking</i> <i>in miljarden</i>	0.5	1	2	3	5	6
<i>voor Nederland</i> <i>in miljoenen</i>	1.9	2	6.7	11.4	14.5	16

Is deze groei in overeenstemming met het continue model van Malthus? Hoe luidt de voorspelling voor de grootte van de wereldbevolking in het jaar 2004 uitgaande van de situatie in de tijd van Malthus (1800). Dezelfde vraag voor de bevolking van Nederland.

De vergelijking van Malthus, $dN/dt = \alpha N$, is een voorbeeld van een eerste orde differentiaalvergelijking; we korten dat af DV. ‘Eerste orde’ komt van het feit dat in de vergelijking alleen een eerste afgeleide voorkomt. In het algemeen zal een eerste orde DV van de vorm

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

zijn. Of nog algemener

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x).$$

5.2 Evenwichtsoplossingen

Een oplossing van een DV als $dx/dt = f(t, x)$ is een differentieerbare functie die, als je deze links en rechts in de vergelijking invult, een gelijkheid oplevert. Kijk eens naar de vergelijking

$$\frac{dx}{dt} = (1 + 2t)x.$$

De functie

$$x(t) = e^{t+t^2}$$

levert bij differentiëren

$$\frac{dx}{dt} = (1 + 2t)e^{t+t^2}$$

en bij invullen rechts hetzelfde. In dit geval kun je de functie zelfs met een willekeurige constante c vermenigvuldigen en dan is dat ook een oplossing:

$$x(t) = ce^{t+t^2}.$$

De DV heeft dus eigenlijk oneindig veel oplossingen die allemaal een beetje op elkaar lijken. Daarom wordt dat vaak een *familie* van oplossingen genoemd.

We bekijken nu eerst of er een speciaal soort oplossingen bestaan, namelijk diegene die constant in de tijd zijn: evenwichtsoptlossingen.

Bij differentievergelijkingen van de vorm $x_{n+1} = f(x_n)$, vonden we evenwichtsoptlossingen door te zoeken naar oplossingen van de vergelijking

$$x_0 = f(x_0).$$

Dat betekent immers dat als je x_0 in het rechterlid invult, er weer x_0 uitkomt. Bij DVs geldt iets dergelijks. Bekijk eens de vergelijking

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

en stel dat $f(x)$ een nulpunt x_0 heeft, dus

$$f(x_0) = 0.$$

Dan is $x(t) = x_0$ een oplossing van de DV. Als je immers de constante x_0 naar de tijd differentieert, staat er in het linkerlid van de DV ook nul. Bij de vergelijking van Malthus is dat $N = 0$.

Omdat in de vergelijking

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x(t) = x_0$$

een constante oplossing is, noemt men dat een evenwichtsoptlossing. Het is een functie die constant is in de tijd. Bij deze waarde van x_0 houden alle termen van de DV zich kennelijk met elkaar in evenwicht, zodat er ‘niets verandert’. We geven nog een voorbeeld: bekijk de vergelijking

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - 4.$$

Het rechterlid heeft nulpunten ± 2 , dus $x(t) = +2$ en $x(t) = -2$ zijn evenwichtoplossingen van de vergelijking.

Als de vergelijking van de vorm

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

is, zullen er alleen bij uitzondering evenwichtoplossingen bestaan. Neem bijvoorbeeld de vergelijking

$$\frac{dx}{dt} = x + t.$$

deze heeft rechterlid nul als $x = -t$, maar als je dat differentieert, zie je dat het geen oplossing is.

Opgave 5.2.1 *Bepaal de evenwichtoplossing(en) van de vergelijking*

$$\frac{dx}{dt} = x(x + 6).$$

Opgave 5.2.2 *Bepaal de evenwichtoplossing(en) van de vergelijking*

$$\frac{dx}{dt} = x(x^2 - 1).$$

Opgave 5.2.3 *Laat zien dat de vergelijking $dx/dt = x + t$ de oplossing heeft*

$$x(t) = ce^t - t - 1,$$

met c een willekeurige constante.

Opgave 5.2.4 *Kun je een voorbeeld van een vergelijking van de vorm $dx/dt = f(t, x)$ verzinnen, waarbij er wel een evenwichtoplossing bestaat?*

In het vervolg zullen we voor dx/dt ook vaak \dot{x} schrijven. Die afkorting is van Newton afkomstig, je spreekt \dot{x} uit als ‘fluxie x ’. De vergelijking $dx/dt = x + t$ krijgt dan de gedaante $\dot{x} = x + t$.

Als er een tweede afgeleide in de vergelijking staat, zet je gewoon twee puntjes, dus $d^2x/dt^2 = \ddot{x}$. Bij nog hogere afgeleiden is dat natuurlijk niet meer zo praktisch.

5.3 Voorbeelden van DVs

We zagen al een paar voorbeelden van DVs. Hier volgen er nog enkele.

Voorbeeld 5.3.1 *Bekijk de DV*

$$\frac{dx}{dt} = -tx.$$

Een familie van oplossingen is

$$ce^{-\frac{1}{2}t^2}$$

met c een willekeurige constante. Immers, differentiëren levert

$$ce^{-\frac{1}{2}t^2} \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2}t^2 \right) = ce^{-\frac{1}{2}t^2} (-t).$$

Invullen rechts levert dezelfde uitdrukking.

Voorbeeld 5.3.2 *Bekijk de DV*

$$\frac{dx}{dt} = x + \cos t.$$

Een familie van oplossingen is

$$ce^t + \frac{1}{2}(\sin t - \cos t)$$

met c een willekeurige constante. Dat ziet er al wat ingewikkelder uit. Controle door differentiëren levert

$$ce^t + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} \cos t \right) = ce^t + \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t.$$

Invullen rechts levert dezelfde uitdrukking.

Opgave 5.3.1 *Ga voor de volgende DVs na dat de erbij gegeven functies oplossingen zijn. De letter c stelt steeds een willekeurige constante voor.*

- $dx/dt = kx$, ce^{kt} (k een gegeven constante).
- $dx/dt = -t^2x$, $ce^{-\frac{1}{3}t^3}$.
- $dx/dt = -2x + 1$, $ce^{-2t} + \frac{1}{2}$.
- $dx/dt = x + t^2 - 1$, $ce^t - t^2 - 2t - 1$.
- Voor $t > 0$: $dx/dt = \frac{3}{t}x + t^4$, $ct^3 + \frac{1}{2}t^5$.

5.4 Geremde groei

In §5.1 hebben we de continue versie van bevolkingsgroei volgens Malthus afgeleid. Het gedrag van de oplossingen in discrete en continue beschrijving bleek goed overeen te stemmen, voor veel vergelijkingen is deze overeenstemming echter afwezig. Als voorbeeld beschouwen we de logistische vergelijking (2.8):

$$N(t + \Delta t) = N(t) + r_0 \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) N(t) \Delta t$$

en als we voor het gemak $K = 1$ kiezen

$$N(t + \Delta t) - N(t) = r_0 N(t) (1 - N(t)) \Delta t \quad (5.2)$$

Met $K = 1$ is N meer een bevolkingsdichtheid dan een aantal. Delen door Δt en de limiet nemen voor $\Delta t \rightarrow 0$ levert

$$\frac{dN}{dt} = aN(1 - N) \quad , \quad N(0) = N_0. \quad (5.3)$$

Zoals in §5.1 hebben we de parameter r_0 vervangen (door a) om aan te geven dat deze parameters verschillende waardes zullen hebben. We kunnen de oplossingen van vgl. (5.3) berekenen, de methode behandelen we hier niet. We vinden

$$N(t) = \frac{N_0}{N_0 + (1 - N_0)e^{-at}} \quad (5.4)$$

Dit kun je door differentiëren nagaan. Het relatief eenvoudige exponentiële gedrag van deze oplossingen staat in grote tegenstelling tot het gecompliceerde gedrag van de oplossingen van de logistische differentievergelijking die we in §2.7 hebben beschreven. We moeten echter wel bedenken, dat een continue beschrijving alleen zin heeft als de geboorten en sterfteprocessen in benadering continu plaatsvinden.

Opgave 5.4.1 *a. Bepaal de evenwichtsoptlossingen van vgl. (5.3).*

b. De stabiliteit van deze oplossingen is afhankelijk van de constante a in vgl. (5.3). Ga dat na met de formules voor de oplossingen.

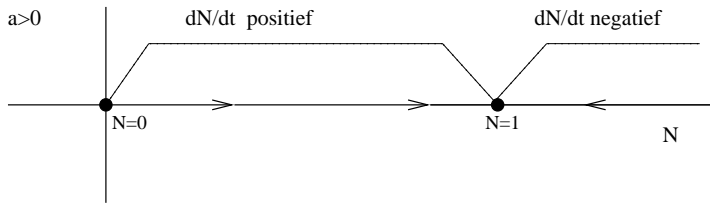
Het belangrijke probleem van de stabiliteit van de evenwichtsoptlossingen kan ook worden opgelost zonder dat je de oplossingsformule kent.

Dat gaat met het teken van het rechterlid, als dx/dt (of dN/dt) positief is, dan groeit de oplossing, als dx/dt negatief is, neemt de oplossing af. Bekijk daartoe fig. 5.1 en de uitleg in het onderschrift.

Opgave 5.4.2 *Pas dit toe op de vergelijking*

$$\frac{dx}{dt} = 2(x+1)x(x-1).$$

- Geef de evenwichtsooplossingen van de vergelijking.
- Bepaal de stabiliteit van de evenwichtsooplossingen.



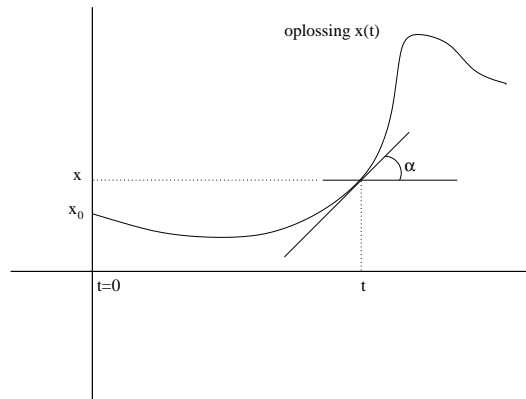
Figuur 5.1: Evenwichtsooplossingen van vgl. (5.3) zijn $N = 0$ en $N = 1$. Indien $a > 0$ geldt voor $0 < N < 1$ dat $dN/dt > 0$, dus N neemt toe met de tijd. Indien $N > 1$ geldt $dN/dt < 0$, dus N neemt dan af met de tijd. Als $a > 0$, dan is $N = 0$ instabiel en $N = 1$ stabiel.

5.5 Oplossen met raaklijnen

We bekijken weer een eerste orde DV

$$\dot{x} = f(t, x)$$

en we stellen vast, dat op elk tijdstip t en voor elke waarde van x waar een oplossing doorheen gaat, een raaklijn aan de oplossingen kan worden toegevoegd; de oplossing is immers differentieerbaar. Uit de vergelijking volgt, dat bij het punt (t, x) een raaklijn behoort met helling gegeven door $f(t, x)$ (= tangens van de hellingshoek α met de positieve t -as), zie fig. 5.2. Dat kunnen we met elk punt doen van het t, x -vlak waar een oplossing bestaat. Als we zo aan elk punt een raaklijn toevoegen, dan ontstaat het *raaklijnenveld* of ook wel genoemd *lijnelementenveld*. Als je de raaklijnen in een groot aantal punten schetst,



Figuur 5.2: De oplossing van de DV $dx/dt = f(t, x)$ die gaat door x_0 als $t = 0$. In het punt (t, x) geldt $\tan \alpha = f(t, x)$.

krijg je een indruk van de loop en richting van de oplossingen. Als de raaklijnen bijvoorbeeld voor toenemende t een steeds grotere hellingshoek hebben, zullen de oplossingen met t stijgen. In fig. 5.3 is dat het geval; je kunt het onderschrift bekijken voor een uitleg.

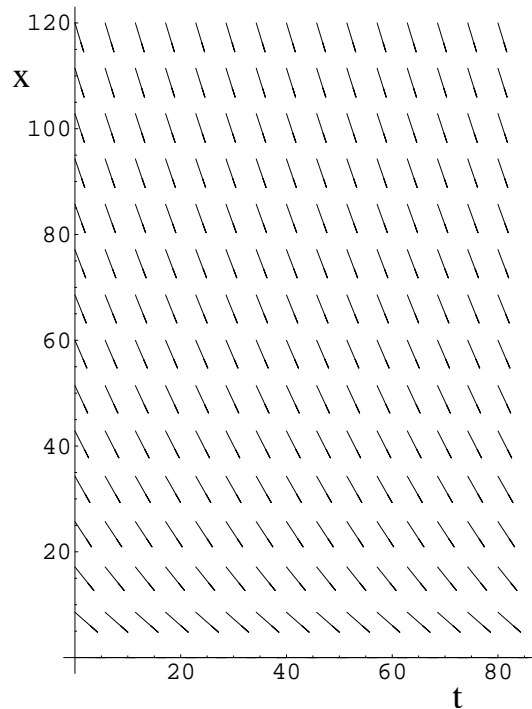
Voorbeeld 5.5.1 *Bekijk eens de DV*

$$\frac{dx}{dt} = tx^2.$$

De helling in elk punt (t, x) aan de oplossing die door dit punt gaat is gelijk aan tx^2 . Bijvoorbeeld in $(t, x) = (0, 1)$ is deze 0, in $(1, 1)$ is de helling 1. Bereken zelf de helling in de punten $t = 1, x = -3, -2, -1, 1, 2, 3$ en schets de corresponderende raaklijnen van de oplossingen door deze punten.

Je kunt ook vragen stellen als: waar lopen de oplossingen horizontaal? Dat is het geval als $dx/dt = 0$ dus als de oplossingen de lijnen, gegeven door $tx^2 = 0$ snijden. Dat zijn precies de assen $t = 0$ en $x = 0$. Of: waar worden de hellingen steeds stijler? Dat laatste is het geval als t en/of x grote waarden aannemen (als t grote waarden aanneemt, moet $x \neq 0$ gelden en evenzo als x groot is, moet $t \neq 0$ zijn). Op deze manier kunnen we met behulp van het raaklijnenveld van alles over de oplossingen te weten komen.

Probeer zelf de oplossingen van deze vergelijking te schetsen.



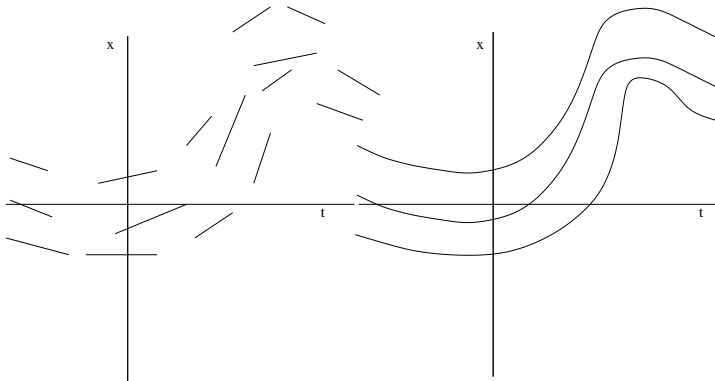
Figuur 5.3: Lijnelementenveld voor de differentiaalvergelijking $dx/dt = -0.30\sqrt{x}$. We tekenen de raaklijnen voor $t > 0$ en $x > 0$. Omdat het rechterlid t niet bevat, zullen de raaklijnen bij vaste x evenwijdig zijn. Hoe groter x is, hoe stijler de oplossing zal lopen.

In fig. 5.4 geven we links een raaklijnenveld (zonder de DV te geven) en rechts enkele geschetste oplossingen. Dit geval is wel wat moeilijker dan het gedrag van de oplossingen in fig. 5.3.

Opgave 5.5.1 *Schets het raaklijnenveld van de Malthusvergelijking $\dot{N} = 2N$ en daarna een aantal bijbehorende oplossingen.*

Opgave 5.5.2 *Bij geremde groei hebben we de vergelijking $\dot{N} = aN(1-N)$ opgesteld. Schets het raaklijnenveld als $a = 3$ en daarna een aantal bijbehorende oplossingen.*

Opgave 5.5.3 *Schets het raaklijnenveld voor de volgende DV's:*



Figuur 5.4: Links het raaklijnenveld van een DV van de vorm $dx/dt = f(t, x)$, rechts enkele oplossingen. De methode is redelijk eenvoudig te begrijpen, maar toch niet zo simpel om toe te passen.

- a. $dx/dt = x^2 - t$.
- b. $dx/dt = x(1 - x^2)$.
- c. $dx/dt = x(1 - t^2)$.
- d. $dx/dt = x(t - x)$.
- e. $dx/dt = t(x - 2t)$.
- f. $dx/dt = x^2 - t^2$.
- g. $dx/dt = 2t^2 - x$.

5.6 Extra: Continue economische groei

We beschouwen, net als in hoofdstuk 3 een economie bepaald door de grootheden:

- Y nationaal inkomen
- C consumptie
- K hoeveelheid kapitaalgoederen
- I investering in kapitaalgoederen
- N omvang van de beroepsbevolking.

We nemen weer aan, dat de volgende evenwichtsrelatie geldt:

$$Y = C + I.$$

En ook, zoals in hoofdstuk 3, dat consumptie en investeringen lineair evenredig zijn met het nationaal inkomen:

$$I = sY; \quad C = (1 - s)Y \quad \text{met } 0 < s < 1.$$

De groei van de kapitaalgoederen werd beschreven door vgl. (3.3) in een iets andere vorm:

$$K(t + \Delta t) = K(t) + (I(t) - \delta K(t))\Delta t,$$

waarbij $\delta > 0$ de factor is die bepaalt hoe de hoeveelheid kapitaalgoederen afneemt door slijtage, zoekraken, enzovoort. In vgl. (3.3) komt Δt verborgen voor omdat we daar $\Delta t = 1$ gesteld hebben. We hebben nu n vervangen door de continue variable tijd t , brengen $K(t)$ naar links, en delen door Δt , zodat

$$\frac{K(t + \Delta t) - K(t)}{\Delta t} = I(t) - \delta K(t),$$

De limiet nemen voor $\Delta t \rightarrow 0$ levert dan de vergelijking

$$\frac{dK}{dt} = I - \delta K. \quad (5.5)$$

We nemen natuurlijk ook weer aan, dat de produktie per werknemer evenredig is met de hoeveelheid kapitaalgoederen (machines en dergelijke) die een werknemer kan gebruiken:

$$Y = \beta K.$$

In vgl. (5.5) vullen we dan in $I = sY = s\beta K$ en krijgen dan de vergelijking

$$\frac{dK}{dt} = (s\beta - \delta)K. \quad (5.6)$$

Opgave 5.6.1 *Laat zien dat als het beginkapitaal $K_0 > 0$ is, de oplossing van vgl. (5.6) luidt*

$$K(t) = K_0 e^{(s\beta - \delta)t}.$$

Er geldt weer dat er economische groei is indien $s\beta - \delta > 0$. Het nationaal inkomen is immers evenredig met K . Net als in hoofdstuk 3 betekent dit niet dat de welvaart groeit. Dan moet het nationaal inkomen per hoofd van de bevolking toenemen. Dat wil zeggen Y/N neemt toe, betekent dat de welvaart toeneemt. We stellen daarvoor ook de DV op.

We veronderstellen weer dat de beroepsbevolking de toename volgt van de natuurlijke groei van de totale bevolking volgens het model van Malthus. Dus geldt

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N. \quad (5.7)$$

α is de groeiindex.

Voor de welvaart willen we weten hoe groot het nationaal inkomen per hoofd van de bevolking y is:

$$y = \frac{Y}{N}$$

Omdat $Y = \beta K$ geldt

$$y = \beta \frac{K}{N}.$$

Stel

$$k = \frac{K}{N}.$$

Differentieer $k(t)$, dat levert

$$\frac{dk}{dt} = \frac{dK}{dt} \frac{1}{N} - K \frac{1}{N^2} \frac{dN}{dt}.$$

We vullen nu vgl. (5.6) voor dK/dt en de Malthusvergelijking voor dN/dt in, zodat

$$\begin{aligned} \frac{dk}{dt} &= (s\beta - \delta)K \frac{1}{N} - K \frac{1}{N^2} \alpha N, \\ &= (s\beta - \delta) \frac{K}{N} - \frac{K}{N} \alpha, \end{aligned}$$

zodat

$$\frac{dk}{dt} = (s\beta - \delta - \alpha)k. \quad (5.8)$$

Je ziet dat om de welvaart te laten toenemen, de bevolking niet te hard moet groeien. De voorwaarde voor welvaartstoename is

$$s\beta - \delta - \alpha > 0.$$

In ontwikkelingslanden kan men op korte termijn niet veel aan de spaarzin (s) en het kindertal (α) doen, men richt zich vooral op productiviteitsverhoging zodat β vergroot wordt. In de volgende paragraaf maken we daar een opgave over.

5.7 Extra: methode van scheiding van veranderlijken.

De oplossingen van de vergelijking van Malthus gaven we al in §5.1. De vergelijking is

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N, \quad N(0) = N_0, \quad N \geq 0.$$

Als $N_0 = 0$, dan geldt $N = 0$ voor alle tijdstippen ($N = 0$ is evenwichtsooplossing). Stel $N_0 \neq 0$ en deel door N :

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = \alpha$$

Integreren over de tijd levert:

$$\int \frac{1}{N} \frac{dN}{dt} dt = \int \alpha dt + c_1,$$

waarbij c_1 een constante is. Hier uit volgt

$$\int \frac{1}{N} dN = \alpha t + c_1,$$

en dus

$$\ln N = \alpha t + c_1,$$

Volgens de definitie van logaritme volgt dan

$$N(t) = c_0 e^{\alpha t}$$

5.7. EXTRA: METHODE VAN SCHEIDING VAN VERANDERLIJKEN.67

met constante c_0 bepaald door c_1 . Uit de beginwaarde volgt $c_0 = N_0$. De vergelijking van Malthus is een bijzonder geval van een lineaire vergelijking van de vorm

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x, \quad (5.9)$$

waarbij het rechterlid in de vorm van "gescheiden veranderlijken" staat, dat betekent dat het een product is van een functie van t en van x . Bij de Malthusvergelijking is $a(t)$ constant; $x = 0$ is weer een oplossing van de vergelijking. Stel nu $x_0 \neq 0$. Voor de vergelijking schrijven we

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = a(t)$$

en na integreren over de tijd

$$\int \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} dt = \int a(t) dt + c_1,$$

zodat

$$\int \frac{1}{x} dx = \int a(t) dt + c_1,$$

en

$$\ln x = \int a(t) dt + c_1,$$

Hieruit volgt dan

$$x(t) = c_0 e^{\int a(t) dt}.$$

Voorbeeld 5.7.1

$$\dot{x} = tx, x(0) = -3.$$

Dan geldt dus

$$x(t) = c_0 e^{\frac{1}{2}t^2}.$$

Als we $t = 0$ invullen, moet er $x = -3$ uitkomen, dus

$$-3 = c_0 e^0 = c_0$$

zodat de oplossing is

$$x(t) = -3e^{\frac{1}{2}t^2}.$$

Opgave 5.7.1 Geef de oplossingen van de DV

$$\frac{dx}{dt} = x \cos t.$$

Dat zijn er oneindig veel (waarom?). Bereken nu die oplossing waarvoor $x(0) = 1$.

Opgave 5.7.2 Geef de oplossingen van de volgende DV's met beginvoorwaarde $x(0) = x_0$:

a. $dx/dt = x \sin t$.

b. $dx/dt = x(1 - t^2)$.

c. $dx/dt = x(1 - \cos t + t)$.

Opgave 5.7.3 Los de vergelijking

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2x}{t^2 - 1}$$

op voor $0 < t < 1$ en met beginvoorwaarde $x(0) = x_0$.

Opgave 5.7.4 Los de vergelijking

$$\frac{dx}{dt} = -\cos(t)x$$

op met beginvoorwaarde $x(0) = 2$.

Opgave 5.7.5 Los de vergelijking

$$\frac{dx}{dt} = 2tx + t$$

op met beginvoorwaarde $x(0) = 4$.

Opgave 5.7.6 Los de vergelijking

$$\frac{dx}{dt} = -\sin(t)x + \sin(t)$$

op met beginvoorwaarde $x(0) = 0$.

Opgave 5.7.7 *Bekijk de vergelijking voor de ontwikkeling van een economie*

$$\frac{dk}{dt} = (s\beta - \delta - \alpha)k.$$

De variabele k is een maat voor de welvaart.

a. Het gaat slecht met de welvaart, want $s\beta - \delta - \alpha = -1$ en constant.

Laat zien dat het slecht gaat.

b. Door hulp van buiten af, verandert de factor $s\beta - \delta - \alpha = -1$ in een functie van de tijd, namelijk $-1 + t$. Gaat het nu beter? Wanneer is dat te merken?

5.8 De wetten van Newton

Een belangrijk gebied waar differentiaalvergelijkingen een rol spelen is de mechanica. De theorie van dit vakgebied is voor een belangrijk deel te danken aan Newton (1642-1727); hij was zowel natuurkundige als wiskundige.

Zijn drie basiswetten luiden:

1. Als er *geen* kracht op een lichaam werkt, is de versnelling nul. In dat geval is het lichaam in rust of beweegt met constante snelheid in een rechte lijn.
2. De versnelling a van een lichaam is evenredig met de kracht F die op het lichaam wordt uitgeoefend. Indien de massa van het lichaam m (constant) is geldt

$$F = ma.$$

3. Actie = – Reactie, oftewel, als lichaam A een kracht uitoefent op lichaam B, dan oefent lichaam B een even grote, maar tegengestelde kracht uit op lichaam A.

Opmerking

De kracht F en de versnelling a zijn vectoren en bij meerdimensionale beweging schrijft men dan vaak \mathbf{F} , \mathbf{a} of \vec{F} , \vec{a} . Omdat wij hier alleen ééndimensionale beweging zullen bekijken, schrijven we F en a .

Je ziet aan de tweede wet dat deze al gauw tot een DV leidt. De versnelling a is natuurlijk de tweede afgeleide van de positie (of plaatsvector).



Figuur 5.5: Portret van Isaac Newton in 1702.

Denk om dit in te zien aan ééndimensionale beweging van een lichaam met massa m langs een rechte lijn. De positie op de lijn wordt gegeven door x . Omdat de massa beweegt, zal de positie x een functie van de tijd t zijn. De snelheid v is de afgeleide van de positie: $v = \dot{x}$. De verandering van de snelheid \dot{v} is dan de versnelling $a = \dot{v}$ en er geldt dus $\ddot{x} = a$. Volgens de tweede wet van Newton geldt dan

$$F = m\ddot{x}.$$

Als we weten hoe de kracht eruit ziet, hebben we hiermee een tweede

orde DV (tweede orde omdat de DV een tweede afgeleide d^2x/dt^2 bevat).

Voorbeeld 5.8.1 *Als bijvoorbeeld de kracht constant is, $F = F_0$, geldt*

$$F_0 = m\ddot{x}.$$

Een keer integreren levert

$$\int F_0 dt = \int m \frac{d^2x}{dt^2} dt + c,$$

of

$$F_0 t = m \frac{dx}{dt} + c,$$

met c een constante. Nog een keer integreren geeft

$$\frac{1}{2} F_0 t^2 = mx(t) + ct + d,$$

waarbij d een tweede, nader te bepalen constante is.

Het is maar goed dat we 2 vrije constanten hebben, want in zo'n probleem hebben we natuurlijk op het begintijdstip, zeg $t = 0$, een gegeven positie en gegeven snelheid. Bijvoorbeeld $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1$. Invullen in de vergelijkingen voor dx/dt en x geeft bij deze beginwaarden

$$0 = m + c, \quad 0 = d,$$

zodat de oplossing in dit geval wordt

$$x(t) = \frac{1}{2m} F_0 t^2 + t.$$

Opgave 5.8.1 *Geef de oplossing van bovenstaand probleem als (meer in het algemeen)*

$$x(0) = x_0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = v_0$$

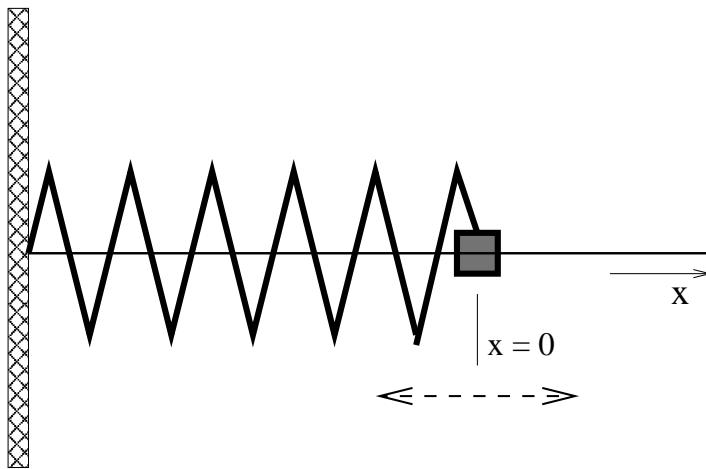
met x_0, v_0 constanten.

Opgave 5.8.2 Een positieve kracht die eeuwig blijft werken terwijl de beweging langs een oneindige rechte lijn plaatsvindt, kan in de natuur niet. Dat laat ons heelal niet toe. Laten we de oneindige rechte lijn nog wel handhaven, maar de kracht laten afnemen. Bijvoorbeeld als

$$F = F_0 e^{-t}$$

met F_0 weer constant. Los de bewegingsvergelijking op bij deze kracht met weer $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1$.

5.9 Harmonische trilling



Figuur 5.6: Veer met massa m die alleen horizontaal, in de x -richting, kan bewegen. In de rusttoestand bevindt de massa zich in $x = 0$.

Een klassiek voorbeeld van ééndimensionale beweging is die van een massa (grootte m), bevestigd aan een veer, zie fig. 5.6. Als de veer in de ruststand is, werkt er geen kracht in de x -richting. Beweegt de massa naar rechts, dan wordt de veer uitgerekt en oefent een kracht uit in tegengestelde richting. Als de massa naar links beweegt, dan wordt de veer ingedrukt en werkt de kracht ook in tegengestelde richting. Als de uitwijking x niet al te groot is, zal de tegenwerkende veerkracht recht evenredig zijn met x :

$$F = -kx,$$

met k de (positieve) veerconstante. Deze benadering van de veerkracht is bedacht door Hooke (1635-1703) en wordt vaak "de wet van Hooke" genoemd.

Volgens de tweede wet van Newton geldt dan de bewegingsvergelijking voor de massa

$$m\ddot{x} = -kx,$$

zodat

$$m\ddot{x} + kx = 0.$$

Dit wordt vaak geschreven als

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{5.10}$$

met $\omega^2 = k/m$. Vgl. (5.10) heet *de harmonische vergelijking*, de constante ω heet de *frequentie* van de trilling. Waarom frequentie? Dat zien we aan de oplossingen van de vergelijking die we hierna opschrijven.

Wat zijn de oplossingen? Als je $\cos t$ en $\sin t$ differentieert krijg je $-\sin t$ en $\cos t$, nog een keer differentiëren levert de oorspronkelijke functies met een minteken. Dit suggereert dat $\cos \omega t$ en $\sin \omega t$ oplossingen zijn van de harmonische vergelijking (5.10). Ga na dat dit klopt.

Opgave 5.9.1 *Nog sterker, de uitdrukking*

$$a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

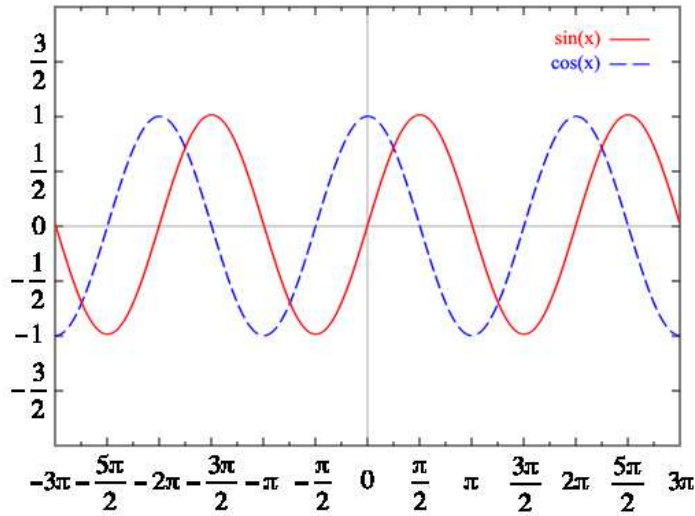
met a en b willekeurige constanten, is oplossing van de harmonische vergelijking (5.10). Laat dat zien.

Opgave 5.9.2 *Bereken de oplossing van de harmonische vergelijking (5.10) in het geval $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = 0$. Ook in het geval dat $x(0) = 0, \dot{x}(0) = v_0$; x_0 en v_0 zijn willekeurige constanten.*

Opgave 5.9.3 *We doen experimenten met een veer als in fig. 5.6. De vergelijking die de trilling bepaalt is*

$$\ddot{x} + 8x = 0.$$

We rekken de veer uit tot lengte 10 en laten deze dan los. Met welke snelheid gaat de massa m door de positie $x = 0$?



Figuur 5.7: De cosinus en de sinus als periodieke functies van de tijd. Ze herhalen zich na tijd 2π en nemen een maximum $+1$ en een minimum -1 aan.

De functies $\cos t$ en $\sin t$ zijn periodieke functies met periode 2π , zie fig. 5.7. We kunnen nog op een andere manier tegen de harmonische vergelijking aankijken. Vermenigvuldig vgl. (5.10) eens met $\dot{x} = dx/dt$, dat levert

$$\dot{x}\ddot{x} + \omega^2\dot{x}x = 0.$$

Integreren naar de tijd geeft

$$\int \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} dt + \omega^2 \int \frac{dx}{dt} x dt = E,$$

met E een constante. De eerste integraal is gelijk aan

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2.$$

Ga dit na door differentiëren. De tweede integraal kunnen we schrijven als

$$\int \frac{dx}{dt} x dt = \int x dx = \frac{1}{2} x^2,$$

zodat we uiteindelijk vinden

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \omega^2 \frac{1}{2} x^2 = E.$$

In fluxie notatie

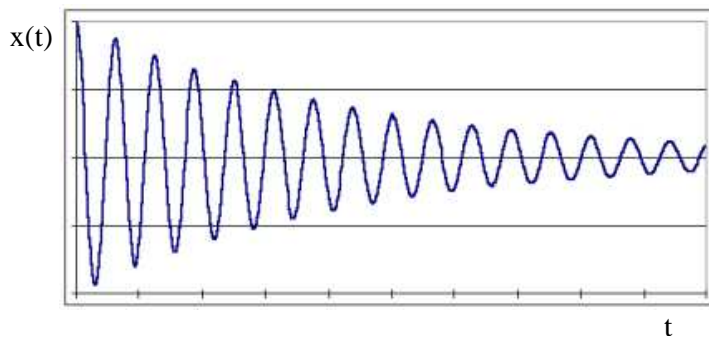
$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 + \omega^2 \frac{1}{2} x^2 = E.$$

Dit betekent dus dat bij harmonische trilling de halve som van de snelheid in het kwadraat en ω^2 maal de uitwijking in het kwadraat constant is. De constante E noemen we de *energie* van de harmonische trilling. Als je meer van natuurkunde weet, zie je dat de eerste term de kinetische energie van de trilling voorstelt, de tweede term de potentiële energie.

Opgave 5.9.4 a. Zet de uitwijking x van een harmonische trilling uit tegen de snelheid \dot{x} voor enkele waarden van ω . Bijvoorbeeld $\omega = 1$ en $\omega = 3$.

b. Bereken de bijbehorende energie van de trillingen indien steeds $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 1$.

5.10 Gedempte harmonische trilling



Figuur 5.8: Een voorbeeld van gedempte harmonische trilling.

In de werkelijkheid bestaat zuiver harmonische trilling niet, omdat er in de natuur altijd een vorm van wrijving is. Een veer wordt door

de beweging vervormd, wordt warmer en verliest daardoor energie; ook wordt de veer een beetje tegen gehouden door de luchtdeeltjes die hij opzij duwt. In §6.3 komen we uitvoeriger op wrijving terug. Hier volstaan we met te stellen dat de wrijvingskracht tegengesteld werkt aan de bewegingsrichting (dus net zoals de veerkracht) en evenredig is met de snelheid van beweging. Dat betekent dat we aan de kracht die op de veer werkt een term toevoegen:

$$F = -c\dot{x} - kx,$$

met k de (positieve) veerconstante en c de positieve wrijvingsconstante.

Volgens de tweede wet van Newton geldt dan de bewegingsvergelijking voor de massa

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx.$$

We delen weer door m en stellen $c/m = 2\mu$, $k/m = \omega_0^2$ zodat de vergelijking wordt

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (5.11)$$

De oplossingen van de gedempte harmonische vergelijking zijn van de vorm

$$ae^{-\mu t} \cos \omega t + be^{-\mu t} \sin \omega t$$

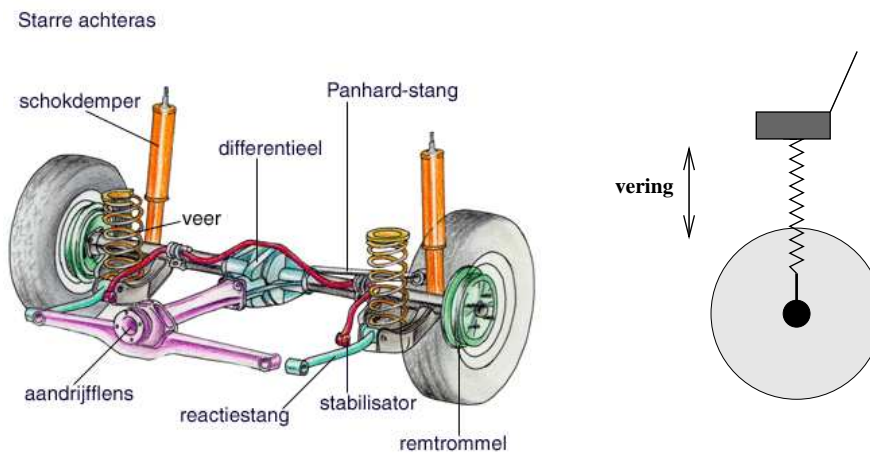
met a en b willekeurige constanten en

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}.$$

Hierbij is aangenomen dat de demping niet overdreven groot is: $0 < \mu < \omega_0$.

Ga de juistheid van de formules na door differentiëren en invullen.

De uitwijking x van de veer zal door demping in de loop van de tijd afnemen, zie fig. 5.8. Zo gaat het ook in werkelijkheid bij niet te grote demping in een wielophanging van auto's, zie fig. 5.9.



Figuur 5.9: Bij vervoersmiddelen zoals auto's zijn de wielen voorzien van veren met dempers. Bij elke hobbel op de weg krijgt de veer een uitwijking die in grootte afneemt als gedempte harmonische trilling. Links een echt veersysteem, rechts het vereenvoudigde model.

Hoofdstuk 6

Een balletje opgooien

In §5.8 hebben we gezien hoe de tweede bewegingswet van Newton een groot aantal verschijnselen in de mechanica beschrijft. De wet luidt

$$F = ma,$$

met F de kracht die werkt op een lichaam of massapunt, m de massa van het lichaam en a de versnelling. Hierbij is aangenomen dat de massa constant is.

In dit hoofdstuk houden we ons bezig met een speciale toepassing van deze wet, namelijk het beschrijven van de beweging van een bal in de buurt van het aardoppervlak. Hierbij spelen zowel differentiaal- als differentievergelijkingen een rol.

6.1 Beweging in de buurt van de Aarde

Als je een bal opgooit of als je met een vliegtuig opstijgt, dan is de afstand tot de begane grond al gauw heel verschillend. De bal komt op zijn hoogst 10 meter ver, een passagiersvliegtuig koerst op 10 km hoogte. Toch kan de gravitatiekracht in beide gevallen als (bijna) constant worden beschouwd. Voor de zwaartekracht hebben we de formule

$$F = -G \frac{Mm}{r^2},$$

waarbij G een constante is, M de massa van de Aarde, m de massa van het lichaam dat door de Aarde wordt aangetrokken en r de afstand van het lichaam tot het middelpunt van de Aarde. Het minteken

staat er omdat we de richting die van het middelpunt van de Aarde afwijkt positief zullen nemen. Je zult nu zeggen “die gravitatiekracht is helemaal niet constant, hoe verder je van de Aarde komt, hoe groter r en dus hoe kleiner de kracht F ”. We rekenen dat eens uit in een opgave. De hoogte van een bal of een vliegtuig of welk lichaam dan ook, ten opzichte van het aardoppervlak, noemen we h . De afstand van het aardoppervlak tot het middelpunt van de Aarde is ongeveer 6400 km; die afstand hangt een beetje af van de plaats waar je op Aarde bent, want aan de polen is de afstand iets kleiner en aan de equator iets groter, maar voor onze berekeningen maakt dat niet veel uit.

Opgave 6.1.1 *Een lichaam met massa m ondergaat op het aardoppervlak een gravitatiekracht*

$$-G \frac{Mm}{6400^2}.$$

We noemen dat het gewicht van het lichaam. Op 10 km hoogte is de gravitatiekracht

$$-G \frac{Mm}{6410^2}.$$

de verhouding van die twee krachten is

$$G \frac{Mm}{6400^2} / G \frac{Mm}{6410^2} = \frac{6410^2}{6400^2}.$$

Ga na dat die verhouding bijna gelijk aan 1 is, dat wil zeggen dat de krachten bijna gelijk zijn.

Als de gravitatiekrachten voor deze verschillende hoogtes al bijna gelijk zijn, dan kunnen we voor een vliegende of opgegooide bal zeker deze kracht als constant beschouwen. We stellen deze gelijk aan

$$F = -mg,$$

waarbij de kracht gericht is naar het centrum van de Aarde. Het minteken staat er weer omdat we de hoogte h positief (of nul) nemen en de kracht tegengesteld is aan deze richting. Kennelijk is

$$g = G \frac{M}{r_{Aarde}^2}.$$

Massa en gewicht

Het gewicht van een lichaam is de kracht (zwaartekracht) die door de Aarde of een ander hemellichaam op dat lichaam wordt uitgeoefend. Op Aarde heeft het gewicht de grootte mg . Het gewicht is dus veranderlijk. De massa van een lichaam is niet afhankelijk van de plaats van het lichaam in een of ander zwaartekrachtsveld, je moet het meer associëren met de hoeveelheid materie van het lichaam.

Het is een beetje verwarrend, want in het dagelijks taalgebruik spreken we van het gewicht in kg. Als er in een probleem of opgave sprake is van ‘gewicht’, dan dien je in de formules voor mg dat gewicht in te vullen. Staat er ‘kgmassa’, dan geldt die hoeveelheid voor m .

Opgave 6.1.2 *Op Aarde weegt een ijzeren bol precies 1 kg. Wat is het gewicht van deze bol op de Maan? Gegeven is, dat*

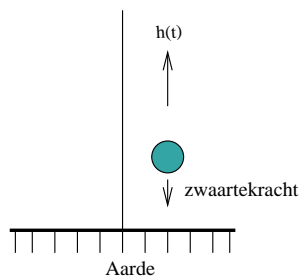
$$\begin{array}{ll} \text{straal Aarde} & 6371 \text{ km} & \text{straal Maan} & 1738 \text{ km} \\ \text{massa Aarde} & 5.974 \times 10^{24} \text{ kg} & \text{massa Maan} & 7.349 \times 10^{22} \text{ kg} \end{array}$$

6.2 Het eenvoudigste model

We kunnen nu de vergelijking opschrijven voor het eenvoudigste model van verticale beweging van een lichaam met massa m in de buurt van het aardoppervlak:

$$F = -mg = ma,$$

met a de versnelling van het lichaam, dat is de tweede afgeleide van de positie naar de tijd.



Figuur 6.1: Verticale beweging van bal zonder wrijving door de atmosfeer.

Wat zijn de aannames bij dit model? Dat zijn:

1. De beweging is verticaal (loodrecht op het aardoppervlak).
2. Het lichaam blijft dicht bij het aardoppervlak (bijvoorbeeld hoogte binnen 10 km).
3. De massa is constant, dus niet onderweg een trap afwerpen zoals bij een raket, of massa verliezen zoals uit een plastic zak gevuld met water die lek is.
4. Er is geen wrijving door de atmosfeer van de Aarde, de zwaartekracht is de enige kracht die werkt.
5. De opwaartse kracht die de omringende lucht op het lichaam uitoefent volgens de wet van Archimedes, verwaarlozen we ten opzichte van de zwaartekracht.
6. Het model geldt zolang de hoogte h van het lichaam ≥ 0 is.

We delen door m zodat de bewegingsvergelijking wordt

$$a = -g.$$

De positiehoogte h is een functie van de tijd, we schrijven $h = h(t)$ met $h(t) \geq 0$. Omdat de versnelling de tweede afgeleide van de positie naar de tijd is, geldt

$$\frac{d^2h}{dt^2} = a$$

en hebben we de bewegingsvergelijking

$$\frac{d^2h}{dt^2} = -g. \quad (6.1)$$

Integreren van deze vergelijking is erg eenvoudig. We vinden

$$\int \frac{d^2h}{dt^2} dt = - \int g dt,$$

zodat

$$\frac{dh}{dt} = v_0 - gt,$$

waarbij v_0 een integratieconstante is. De eerste afgeleide van h is de *snelheid*. Voor $t = 0$ geldt

$$\left. \frac{dh}{dt} \right|_{t=0} = v_0,$$

dus v_0 is de beginsnelheid. De vergelijking voor de snelheid kan ook eenvoudig geïntegreerd worden. We vinden

$$\int \frac{dh}{dt} dt = \int (v_0 - gt) dt,$$

zodat

$$h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2,$$

met h_0 weer een integratieconstante. Kennelijk geldt

$$h(0) = h_0$$

en is h_0 de beginhoogte.

Het is niet moeilijk om te berekenen hoe hoog de bal in de atmosfeer komt. Op het hoogste punt h_m dat bereikt wordt op tijdstip t_m geldt dat de snelheid nul is. Deze keert daar immers om van positief naar negatief. De vergelijking voor de snelheid levert op het hoogste punt

$$0 = v_0 - gt_m,$$

zodat

$$t_m = \frac{v_0}{g}.$$

Invullen in de vergelijking voor $h(t)$ levert

$$h_m = h_0 + \frac{v_0^2}{2g}.$$

Als we een bal opgooien vanaf de grond, dan keert in dit eenvoudige model de bal na een verloop van tijd $2t_m = 2v_0/g$ weer op de grond terug.

Iets over eenheden

In de mechanica gebruikt men als eenheid van tijd de seconde (s), eenheid van positie de meter (m) en als eenheid van massa de kilogrammassa (kg). Vaak wordt de laatste ook gewoon ‘kilogram’ genoemd, maar we moeten hem wel onderscheiden van het gewichtskilogram, waar de factor g nog tussen zit. Het gewichtskilogram is een kracht; degenen die natuurkunde hebben gehad, weten dat die kracht in de eenheid *newton* wordt uitgedrukt (die eenheid noemen we hier in het vervolg niet).

In dit eenhedenstelsel geldt op Aarde

$$g = 9.8m/s^2,$$

spreek uit “meter per secondekwadraat”. We gebruiken verder meestal deze eenheden.

Opgave 6.2.1 *Een bal opgooien met een snelheid van 5 m/s is al behoorlijk snel (ga na). Reken deze snelheid om in de meer vertrouwde snelheidseenheid van km/uur.*

Opgave 6.2.2 *We gooien vanaf de grond een bal verticaal op met snelheid $v_0 = 5$ m/s. Hoe hoog komt deze en hoe lang duurt het tot de bal weer op de grond valt?*

Opgave 6.2.3 *Iemand laat een bal vallen vanaf een toren (zonder beginsnelheid). De hoogte van de toren is 100 meter. Hoe lang duurt het tot de bal beneden is? Welke snelheid heeft de bal als de grond wordt bereikt? (Bereken ter vergelijking deze snelheid om in km/uur.)*

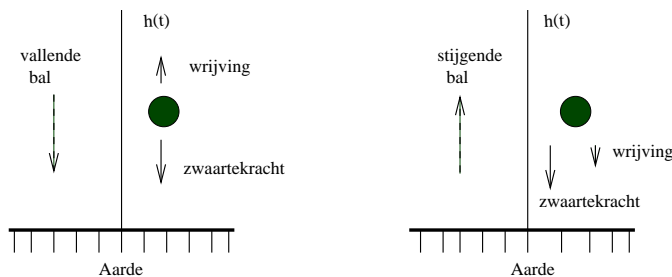
Opgave 6.2.4 *Een kwaadwillend persoon wil een vliegtuig raken dat op 10 km hoogte koerst. Welke snelheid moet zij minstens aan het opstijgende object geven? (In de volgende paragraaf zullen we zien dat deze snelheid niet genoeg is.)*

6.3 Het model met wrijving

Het zal je hopelijk in de vorige paragraaf opgevallen zijn, dat de massa m van het vliegende lichaam er niet toe doet: m komt niet in de antwoorden voor. Als we bijvoorbeeld een zware, ijzeren kogel en een

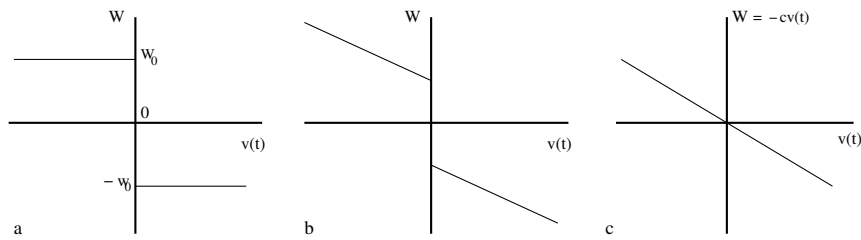
holle kogel met dezelfde vorm tegelijk van een toren laten vallen, dan komen ze in dat eenvoudige model tegelijk en met dezelfde snelheid op de grond aan. In de praktijk klopt dat niet, vorm en massa doen er wel degelijk toe, omdat de lucht van de aardatmosfeer weerstand biedt aan het vallende of stijgende lichaam. We noemen dat meestal *wrijving*. Als we bijvoorbeeld een badmintonpluimpje, een plastic zakje met veren en een stalen kogeltje - alledrie met dezelfde massa - tegelijk van een toren laten vallen, dan komt de stalen kogel echt als eerste op de grond aan.

De wrijving die een lichaam ondervindt, heeft de vorm van een kracht W die tegengesteld aan de bewegingsrichting werkt. De zwaartekracht werkt altijd naar beneden, richting centrum van de Aarde; als een bal omhoog vliegt werkt de wrijving in dezelfde richting als de zwaartekracht, maar als de bal valt, werkt W juist naar boven.



Figuur 6.2: Vallende bal met wrijving door de atmosfeer.

Het zal je misschien verbazen, maar de bepaling van de wrijvingskracht W is in het algemeen buitengewoon moeilijk en een apart wetenschappelijk specialisme. We zullen hier enkele voorbeelden van wrijvingskrachten bespreken. Een gedaante van de wrijvingskracht is afkomstig van de 18e eeuwse geleerde Coulomb (1736-1806). Hij nam in het eenvoudigste geval aan dat de wrijvingskracht constant, grootte w_0 , is. De bewegingsrichting wordt aangegeven door de snelheid $v(t)$ en het is dan een betere formulering om te zeggen dat de wrijving volgens Coulomb constant is en tegengesteld aan de richting van de snelheid; zie fig. 6.3a. Wrijving is een kracht en heeft een grootte en een richting, het is een vector net zoals snelheid en versnelling. Als $v(t) = 0$, dan zal de wrijving ook nul zijn. We hebben dus voor de wrijving een discontinue functie gedefinieerd. Er kwam kritiek op dit wrijvingsmodel van



Figuur 6.3: Wrijving volgens Coulomb, de kracht is steeds tegengesteld aan de bewegingsrichting; a. constante wrijving, b. wrijving die toeneemt met de snelheid, c. zoals bij b. maar dan continu.

Coulomb omdat bij langzame beweging (v dicht bij nul), de wrijving bij sommige materialen afneemt. Dat leidt tot een enigzins aangepaste wrijvingsfunctie; zie fig. 6.3b.

Deze wrijvingsfunctie is nog discontinu, vaak gebruikt men ook de continue gedaante $W = cv(t)$ met c de wrijvingscoëfficiënt; zie fig. 6.3c. Nu blijkt de discontinue wrijvingskracht redelijk goed te gelden als een lichaam over een ruwe bodem of helling schuift. Bij beweging in lucht, water of olie, blijkt een continue wrijving van de vorm $W = cv(t)$ experimenteel beter te passen.

We bekijken nu verticale beweging op hoogte $h(t)$ met zwaartekracht en wrijving volgens Coulomb. De bewegingsvergelijking wordt

$$F = -mg - c \frac{dh}{dt} = m \frac{d^2h}{dt^2}, \quad (6.2)$$

waarbij we voor de snelheid $v(t) = dh/dt$ hebben ingevuld.

Een speciale oplossing: evenwicht

Zoals we al eerder zagen heeft een differentiaalvergelijking vele oplossingen. Het opmerkelijke is echter dat we één speciale oplossing van de bewegingsvergelijking (6.2), een evenwichtoplossing, meteen kunnen aangeven. Dat is de oplossing waarvoor geldt

$$-mg - c \frac{dh}{dt} = 0,$$

of

$$\frac{dh}{dt} = -g \frac{m}{c}. \quad (6.3)$$

Volgens deze vergelijking is bij deze oplossing de snelheid dh/dt constant. Dan geldt $d^2h/dt^2 = 0$, zodat voor deze speciale keuze van de snelheid aan de differentiaal vergelijking voldaan is. We noemen dit een evenwichtoplossing omdat zwaartekracht en wrijvingskracht (weerstand van de lucht) elkaar dan precies in evenwicht houden, dat wil zeggen tegengesteld in grootte zijn. Later, bij het bespreken van vallen, zullen we dat ook de grenssnelheid noemen. Integreren van vgl. (6.3) levert voor de verandering van de hoogte als functie van de tijd

$$h(t) = -g\frac{m}{c}t + \text{constante}.$$

De massa m valt dan zo dat de positie lineair met de tijd afneemt.

6.3.1 Extra: Algemener oplossen

We kunnen de vergelijking voor $h(t)$ rechtstreeks integreren om alle andere oplossingen te bepalen. Eén keer integreren levert

$$m\frac{dh}{dt} = b - mgt - ch(t), \quad (6.4)$$

met b een integratieconstante. Om de constante b te bepalen moeten we aangeven wat de beginvoorwaarden van de positie $h(0)$ en snelheid (v_0) zijn. Voor $t = 0$ volgt uit vgl. (6.4)

$$m\frac{dh}{dt}\Big|_{t=0} = mv_0 = b - ch(0),$$

zodat $b = mv_0 + ch(0)$. Vgl. (6.4) is een DV die we, op grond van de eenvoudige gedaante en een beetje handigheid, door raden kunnen oplossen. Vgl. (6.4) is namelijk van de vorm (delen door m)

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{c}{m}h + f(t).$$

Als $f(t)$ ontbreekt in de vergelijking, dan is de oplossing

$$h(t) = Ae^{-\frac{c}{m}t}$$

met A een willekeurige constante (ga dit zelf na door invullen). Het volgt uit de theorie van de DV's dat de oplossing van vgl. (6.4) dan van de vorm

$$h(t) = Ae^{-\frac{c}{m}t} + S(t)$$

is met A weer een willekeurige constante en $S(t)$ een speciale oplossing die aan vgl. (6.4) voldoet. Zo'n speciale oplossing vindt je meestal niet gauw, tenzij $f(t)$ een eenvoudige gedaante heeft. In dit geval geldt $f(t) = b/m - gt$. Als je dan probeert $S(t) = C + Dt$, dan vind je door differentiëren van $S(t)$ en invullen in vgl. (6.4)

$$\frac{dS}{dt} = D = -\frac{c}{m}(C + Dt) + \frac{b}{m} - gt.$$

Vereenvoudigen en alle termen naar links brengen levert

$$D + \frac{c}{m}C - \frac{b}{m} + \left(\frac{c}{m}D + g\right)t = 0.$$

Deze lineaire functie kan alleen maar nul zijn op elk tijdstip t indien

$$D + \frac{c}{m}C - \frac{b}{m} = 0 \text{ en tegelijk } \frac{c}{m}D + g = 0.$$

Hieruit volgt

$$D = -g\frac{m}{c}, \quad C = \frac{b}{c} + g\frac{m^2}{c^2}.$$

Voor de positie $h(t)$ bij beweging met wrijving geldt dan

$$h(t) = Ae^{-\frac{c}{m}t} + \frac{b}{c} + g\frac{m^2}{c^2} - g\frac{m}{c}t. \quad (6.5)$$

Dat ziet er heel wat ingewikkelder uit dan bij beweging zonder wrijving. De integratieconstante A moet nog bepaald worden door de beginvoorwaarde $h(0)$. Kennelijk geldt met $b = mv_0 + ch(0)$ en als $t = 0$:

$$h(0) = A + \frac{mv_0 + ch(0)}{c} + g\frac{m^2}{c^2} = A + \frac{mv_0}{c} + h(0) + g\frac{m^2}{c^2},$$

zodat

$$A = -\frac{mv_0}{c} - g\frac{m^2}{c^2}.$$

We vinden dus voor de hoogte als functie van de tijd:

$$h(t) = -\left(\frac{mv_0}{c} + g\frac{m^2}{c^2}\right)e^{-\frac{c}{m}t} + \frac{mv_0}{c} + h(0) + g\frac{m^2}{c^2} - g\frac{m}{c}t. \quad (6.6)$$

Voor de snelheid vinden we

$$\frac{dh(t)}{dt} = \left(v_0 + g\frac{m}{c}\right)e^{-\frac{c}{m}t} - g\frac{m}{c}. \quad (6.7)$$

6.3.2 Vallen en opgooien

We veronderstellen nu de oplossingen voor de beweging van de bal met wrijving voor de positie, vgl. (6.6), en de snelheid, vgl. (6.7), bekend. Als je de voorgaande paragraaf niet bestudeerd hebt, neem je gewoon deze formules over.

Waarom gebruiken we zulke ingewikkelde formules? Dat is vooral omdat we daar aan de invloed van massa m en wrijvingscoëfficiënt c kunnen zien. Ze komen alleen in de verhouding c/m of c^2/m^2 voor. Als c/m groot is (flinke wrijving of kleine massa), dan dempt de exponentiële functie $e^{-ct/m}$ snel uit en nadert de snelheid spoedig naar de evenwichtssnelheid $-gm/c$. Als daarentegen c/m klein is, dan zal het lang duren voor de evenwichtssnelheid dicht genaderd is.

Vallen van grote hoogte



Figuur 6.4: Val van een parachutist.

Als een voorwerp (of parachutist) vanuit grote hoogte uit een vliegtuig valt, duurt het tamelijk lang voor de begane grond wordt bereikt. Nu hebben de begrippen ‘grote hoogte’ en ‘tamelijk lang’ geen wiskundige betekenis, ze moeten binnen het gebruikte model betekenis krijgen. Laten we eens het vallen vergelijken van een parachutist met gewicht 75 kg die met gespreide armen en benen uit een vliegtuig duikelt om zoveel mogelijk luchtweerstand te ondergaan en een gladde Samsonite koffer die 20 kg weegt en die tegelijk uit dat vliegtuig valt. We bestuderen dit vallen door een opgave. De wrijvingscoëfficiënten voor parachutist en koffer verschillen nogal, ze zijn onder anderen evenredig met de grootte

van het oppervlak van het vallende lichaam in de bewegingsrichting en de gladheid of ruwheid van dat oppervlak.

Opgave 6.3.1 De indices p en k geven respectievelijk de grootheden van parachutist en koffer aan. Gegeven is voor het gewicht van de parachutist dat $m_p g = 75$, voor de koffer $m_k g = 20$. Het vliegtuig koerst op hoogte h_0 km. Voor de wrijvingscoëfficiënten van parachutist en koffer hebben we de experimenteel gevonden waarden $c_p = 1.35$, $c_k = 0.04$. Bij dit vallen geldt $v_0 = 0$.

a. Merk weer op dat in de uitdrukkingen voor hoogte en snelheid alleen de verhouding van c en m een rol speelt. Laat met behulp van vgl. (6.6-6.7) zien dat voor hoogte en snelheid geldt:

$$h(t) = -g \frac{m^2}{c^2} e^{-\frac{c}{m}t} + h_0 + g \frac{m^2}{c^2} - g \frac{m}{c} t, \quad \frac{dh}{dt} = g \frac{m}{c} e^{-\frac{c}{m}t} - g \frac{m}{c}.$$

Het is de bedoeling dat je op den duur van zulke grote formules niet schrikt, maar “er een beetje doorheen leert kijken”. In dit geval bijvoorbeeld, zie je dat massa en wrijvingscoëfficiënt de valhoogte en valsnelheid bepalen, maar bovendien dat de e -macht in de loop van de tijd steeds kleiner wordt. Als de valtijd lang genoeg duurt, nadert de snelheid dus naar een grenssnelheid met grootte $-mg/c$. Dat is in tegenstelling met vallen zonder wrijving, waarbij de snelheid al vallend steeds toeneemt. Als de grenssnelheid (bijna) bereikt is, houden luchtweerstand en gravitatiekracht elkaar in evenwicht. We vonden eerder deze grenssnelheid als evenwichtsoplossing.

b. We weten al dat $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. Leidt af dat voor de parachutist geldt:

$$h_p(t) = -314.9 e^{-0.176t} + h_0 + 314.9 - 55.56t, \quad \frac{dh}{dt} = 55.56 e^{-0.176t} - 55.56.$$

Voor de koffer geldt

$$h_k(t) = -25510.2 e^{-0.020t} + h_0 + 25510.2 - 500t, \quad \frac{dh}{dt} = 500 e^{-0.020t} - 500.$$

c. Neem aan dat het vliegtuig op 4 km hoogte koerst, dus $h_0 = 4000$ m. Ga na dat zonder de weerstand van de lucht, parachutist en koffer binnen 29 s op de grond terecht komen. De snelheid bij aankomst op de grond is dan 280 m/s (ga dit na). Hoeveel km/uur is dat?

d. Met de gegeven weerstand van de lucht zal het vallen wat langer

duren en de aankomstsnelheid lager zijn. Bereken de valtijden en aankomstsnelheden voor koffer en parachutist (aannemende dat de parachute helaas niet opengaat). Je moet hiervoor de vergelijking $h(t) = 0$ oplossen en dat is niet zo eenvoudig; gebruik daarvoor je rekenmachine. *e.* Zoals we boven zagen, is de eerste term voor de snelheid een e -macht met negatieve exponent. Dat betekent dat op de lange duur deze term naar nul nadert en de snelheid naar een constante waarde gaat, namelijk $-g\frac{m}{c}$ (de evenwichtoplossing). Is dit stadium bijna bereikt voor koffer en parachutist? Als de hoogte zo groot is dat dit stadium bereikt is, kunnen we dat binnen dit model ‘grote hoogte’ noemen. Ga na dat dit voor koffer en parachutist sterk verschillende waarden zijn.

Opgave 6.3.2 Een man, een hond en een krekkel vallen tegelijk van zeer grote hoogte omlaag. Wie komt het eerst beneden en wie heeft de meeste kans om deze val te overleven?

Opgooien vanaf de begane grond

Laten we eens uitrekenen hoe hoog we komen en hoe lang het duurt voor de bal terug is, als we deze opgooien vanaf de begane grond: $h(0) = 0$ en $v_0 > 0$. Het hoogste punt h_m wordt bereikt op tijdstip t_m als de snelheid van teken wisselt en dus nul is. Er geldt volgens vgl. (6.7)

$$\frac{dh(t)}{dt} = (v_0 + g\frac{m}{c})e^{-\frac{c}{m}t} - g\frac{m}{c}.$$

Invullen van $t = t_m$ en $dh/dt = 0$ levert

$$e^{-\frac{c}{m}t_m} = \frac{gm/c}{v_0 + gm/c} = \frac{1}{1 + v_0c/gm}.$$

Als we de logaritme nemen vinden we

$$t_m = -\frac{m}{c} \ln\left(\frac{1}{1 + v_0c/gm}\right) = \frac{m}{c} \ln\left(1 + \frac{v_0c}{gm}\right).$$

Om het hoogste punt h_m te berekenen vullen we nu $h(0) = 0$ en de uitdrukking voor t_m in de formule voor de hoogte $h(t)$, vgl. (6.6), in. Dat levert na enige vereenvoudiging

$$h_m = \frac{mv_0}{c} - \frac{gm^2}{c^2} \ln\left(1 + \frac{v_0c}{gm}\right).$$

Dus hoe hoger de beginsnelheid en hoe kleiner de wrijving, hoe hoger de bal komt. Dat klopt met wat we al vermoeden en weten.

We hebben nu wel t_m en h_m uitgerekend, maar eigenlijk zie je niet zoveel aan zulke formules. Als je wilt begrijpen wat de formules voorstellen, kun je bijvoorbeeld voor verschillende waarden van de parameters de formules in een grafiek uitzetten.

Opgave 6.3.3 *Zet in een grafiek h_m uit tegen de beginsnelheid v_0 voor de situatie zonder wrijving ($c = 0$) en met wrijving ($c = 0.2$). Kies verder $m = 1$, $g = 9.8$ en teken de twee grafieken van h_m voor $0 \leq v_0 \leq 10m/sec$.*

Opgave 6.3.4 a. *Als er geen wrijving is, komt de bal op tijd $T = 2v_0/g$ weer op de grond ($h(T) = 0$) terug. De snelheid is dan $-v_0$; ga dat na.*

b. We willen berekenen na hoeveel tijd T en met welke snelheid de bal terug is op de grond in het geval van wrijving. Laat zien dat vgl. (6.6) voor T levert:

$$\left(\frac{v_0}{c} + g\frac{m}{c^2}\right)e^{-\frac{c}{m}T} = \frac{v_0}{c} + g\frac{m}{c^2} - \frac{g}{c}T. \quad (6.8)$$

Delen door de coëfficiënt van de e -macht geeft voor de vliegtijd T :

$$e^{-\frac{c}{m}T} = 1 - \frac{gc}{v_0c + gm}T. \quad (6.9)$$

Ga dit na en ook dat (vanzelfsprekend) $T = 0$ aan vgl. (6.9) voldoet.

We zoeken bij vgl. (6.9) natuurlijk de positieve oplossing voor T , maar de vergelijking kan niet zo maar opgelost worden. We kunnen wel getallen voor m, c en v_0 invullen en dan een rekenmachine gebruiken, maar we willen graag het antwoord voor willekeurige (positieve) waarden van m, c en v_0 kennen en dat geeft oneindig veel mogelijkheden als we een rekenmachine gebruiken. Indien we overigens de vliegtijd T kennen, volgt de snelheid bij terugkomst op de grond, $v(T)$, onmiddellijk uit vgl. (6.7). Invullen levert (ga na)

$$\frac{dh}{dt}\Big|_{t=T} = v_0 - gT.$$

Als je wilt kun je hierna een methode leren om de oplossingen van vgl. (6.9) voor de vliegtijd te benaderen.

6.4 Extra: Benadering met Newton

Als we de onbekende x uit vergelijkingen als $ax+b = 0$ of $ax^2+bx+c = 0$ willen oplossen, dan kunnen we dat met bekende formules doen. Als we een stelsel van zulke vergelijkingen hebben, dus met meer dan één onbekende, dan gaat dat met enige moeite soms ook nog wel. Voor de meeste vergelijkingen zijn echter geen formules voor de oplossing bekend en moeten we deze door benadering leren kennen. Voorbeelden hiervan zijn

$$e^{-aT} = 1 - bT,$$

de vergelijking voor de vliegtijd (6.9) van een bal, in iets andere vorm geschreven; of de vergelijking

$$E - e \sin E = a.$$

Deze vergelijking is naar Kepler genoemd en beschrijft de positie, gegeven door de hoek E , van een planeet in zijn elliptische baan om de zon met excentriciteit e : $0 \leq e < 1$. De constante a is een positieve waarnemingsgrootte, en dus bekend, op het tijdstip van de positiehoek E die we willen weten.

Andere voorbeelden van lastige vergelijkingen zijn

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

en

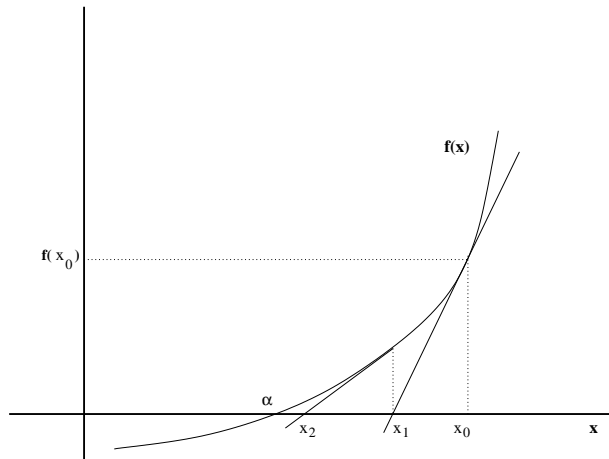
$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Bij de vergelijking voor de vliegtijd verwacht je dat er één positieve oplossing bestaat en niet meer, maar bij de polynoomvergelijkingen (met x^2, x^3 enzovoort) kunnen er meer oplossingen zijn.

Het idee van de methode van Newton

De methode van Newton is heel goed meetkundig te begrijpen. Stel, we willen de oplossing vinden van de vergelijking $f(x) = 0$, waarbij we even in het midden laten hoe de continue functie $f(x)$ er precies uitziet behalve dat we weten dat de functie ook differentieerbaar is. Zie fig. 6.5.

We kunnen bij zo'n continue functie grofweg nagaan of er een nulpunt is door verschillende waarden voor x in te vullen. Als we positieve



Figuur 6.5: Het nulpunt α van de functie $f(x)$ wordt benaderd met de raaklijnconstructie van Newton.

én negatieve $f(x)$ waarden vinden, dan moet er ergens tussen in een nulpunt α zijn. We beginnen dan met een keus $x = x_0$ en construeren een raaklijn aan de grafiek van $f(x)$ in het punt $(x_0, f(x_0))$. Deze wordt voorgesteld door

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

en deze raaklijn snijdt de x -as in het punt x_1 . In dat punt geldt $y = 0$, zodat invullen in de vergelijking voor de raaklijn levert

$$-f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0).$$

Hieruit x_1 oplossen geeft dan

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Je ziet meteen, dat je moet eisen $f'(x_0) \neq 0$, maar dat is duidelijk, want met $f'(x_0) = 0$ loopt de raaklijn horizontaal en snijdt de x -as niet eens.

Vanuit x_1 kunnen we opnieuw een raaklijn aan de grafiek van $f(x)$ construeren. Deze snijdt de x -as in het punt x_2 en daarvoor kunnen we meteen de formule opschrijven:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Dat proces kunnen we voortzetten, hetgeen leidt tot de differentievergelijking

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (6.10)$$

Het idee van deze constructie is afkomstig van Newton en de figuur 6.5 suggereert, dat geldt dat als we het proces alsmaar herhalen, x_n naar het nulpunt α nadert. We drukken dit uit als

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha.$$

Dat zal wel goed gaan als we x_0 niet al te slecht kiezen. De waarde $x = \alpha$ is volgens onze constructie een evenwichtoplossing van de differentievergelijking (6.10), maar is het ook een nulpunt van $f(x)$ (wortel van de vergelijking $f(x) = 0$)? Vul maar in $x_{n+1} = x_n = \alpha$ in vgl. (6.10), dat levert

$$\alpha = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

Omdat we steeds aannemen dat $f'(x_n) \neq 0$, volgt hieruit dat $f(\alpha) = 0$. Dus de evenwichtoplossing α is een wortel van de vergelijking $f(x) = 0$.

Polynoomvergelijkingen

Laten we dat eens op een (flauw) voorbeeld uitproberen.

Voorbeeld 6.4.1 *Vind de wortel(s) van de vgl. $x^2 - 2 = 0$ (dus van de nulpunten van de functie $f(x) = x^2 - 2$).*

De afgeleide is $2x$ en omdat de afgeleide in dit proces niet nul mag worden, moeten we het punt $x = 0$ vermijden. In dit geval is $f(0) = -2$, $f(1) = -1$, $f(2) = 3$, dus het lijkt redelijk om $x_0 = 3/2$ te kiezen. De differentievergelijking volgens Newton (6.10) wordt in dit probleem

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}.$$

Met een rekenmachine vinden we $x_1 = 1.41\dots$ en omdat we weten dat de positieve wortel $\sqrt{2} = 1.41\dots$ is, zitten we daar al meteen verbaazingwekkend dicht bij. De rekenmethode van Newton is erg effectief.

Nu zijn we natuurlijk gunstig begonnen; laten we eens een ‘domme’ start maken, bijvoorbeeld $x_0 = 10$. Dat levert:

$$x_1 = 5.10\dots, x_2 = 2.75\dots, x_3 = 1.74\dots, x_4 = 1.44\dots, x_5 = 1.41\dots$$

Dat gaat dus ook snel de goede kant op.

Ga dit na met de GR: Eerst de startwaarde, dan de formule als volgt.

10 ENTER

$(\text{Ans}^2 + 2)/(2\text{Ans})$ ENTER, ENTER, ENTER, \dots

Opgave 6.4.1 *Benader de wortels van de vergelijking*

$$x^2 - 11x - 12 = 0$$

met de methode van Newton. Probeer drie startwaarden: $x_0 = 0, 5$ of 10 en reken enkele stappen uit met de GR. Vergelijk de stappen in het rekenproces met de echte wortels.

Opgave 6.4.2 *Als we de wortels van de kwadratische vergelijking*

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

willen benaderen, kunnen we de methode van Newton gebruiken. Laat zien dat de bijbehorende differentievergelijking is:

$$x_{n+1} = \frac{ax_n^2 - c}{2ax_n + b}, \quad x_n \neq -\frac{b}{2a}.$$

Leidt deze differentievergelijking altijd tot oplossingen van de kwadratische vergelijking?

Opgave 6.4.3 *Laat zien hoe de methode van Newton werkt voor de vergelijking*

$$x^2 + \sqrt{2}x - 7\sqrt{3} = 0.$$

Bereken met de GR enkele stappen.

We bekijken nu eens een voorbeeld, waarbij we het antwoord niet onmiddellijk kunnen geven.

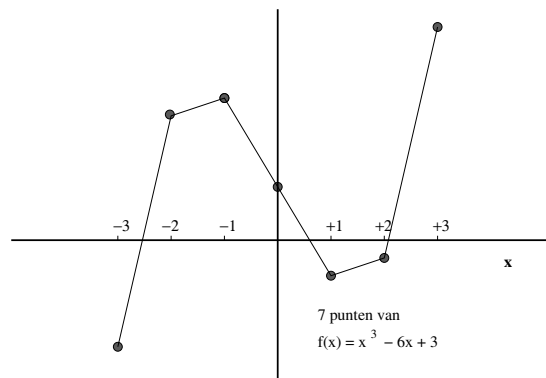
Voorbeeld 6.4.2 *Vind de wortels van de derdegraads vergelijking*

$$x^3 - 6x + 3 = 0.$$

Een kwadratische vergelijking kan 0, 1 of 2 wortels hebben, een derdegraads vergelijking kan er maximaal drie hebben. De afgeleide van $f(x) = x^3 - 6x + 3$ is $f'(x) = 3x^2 - 6$ en omdat deze tijdens het rekenproces niet nul mag worden, zorgen we dat $x_0 \neq \pm\sqrt{2}$. De differentievergelijking (6.10) wordt in dit geval

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 6x_n + 3}{3x_n^2 - 6} = \frac{2x_n^3 - 3}{3x_n^2 - 6}.$$

Om een geschikte startwaarde te vinden, vullen we wat waarden voor x in: $f(0) = 3$, $f(1) = -2$, $f(2) = -1$, $f(3) = 12$. Er bestaat dus in elk geval een wortel tussen $x = 0$ en $x = 1$, maar ook tussen $x = 2$ en $x = 3$. Er is nog een derde wortel, kies maar eens $x = -3$, dat geeft $f(-3) = -6$. We willen deze derde wortel benaderen.



Figuur 6.6: De grafiek van $f(x) = x^3 - 6x + 3$ is een vloeiende kromme, maar we zetten hier slechts 7 punten uit en verbinden deze met rechte lijnstukken.

Starten met $x_0 = -1$ lijkt geschikt. Dit levert $x_1 = 1.67$, maar dat is niet de bedoeling want we zitten met x_1 in het gebied van het eerste of tweede nulpunt van $f(x)$. De volgende stappen leveren $x_2 = 2.68$, $x_3 = 2.28$ (ga na met de GR) en het rekenproces lijkt naar het tweede nulpunt te gaan. Een plaatje, fig. 6.6, verduidelijkt wat er is

gebeurd. Het trekken van een raaklijn in het punt $(-1, f(-1))$ stuurt ons naar de positieve x -as.

Wat zou er gebeuren als we een betere keus voor x_0 maken, bijvoorbeeld $x_0 = -2$. Dat levert $x_1 = -3.17$, $x_2 = -2.76$ en dat gaat naar het derde nulpunt. Onderzoek zelf of je met de GR een goede benadering van het eerste nulpunt kunt geven.

Ter vergelijking geven we de waarden van de nulpunten tot op twee decimalen nauwkeurig. Dat zijn -2.67 , 0.52 , 2.15 .

De vliegtijd van een bal

We keren nu terug naar het probleem van het bepalen van de vliegtijd T van een opgegooide bal met wrijvingsweerstand door de lucht. De vergelijking voor de vliegtijd is volgens vgl. (6.9)

$$e^{-ax} = 1 - bx,$$

waarbij T door x is vervangen en

$$a = \frac{c}{m}, \quad b = \frac{gc}{v_0c + gm}.$$

Het gaat om het vinden van een positief nulpunt van de functie

$$f(x) = e^{-ax} + bx - 1.$$

De methode van Newton levert de differentievergelijking

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{-ax_n} + bx_n - 1}{-ae^{-ax_n} + b} = \frac{1 - (1 + ax_n)e^{-ax_n}}{-ae^{-ax_n} + b}.$$

De rekenmethode van Newton is heel effectief, maar je ziet nu ook een nadeel van de methode. Als we een x_0 invullen, levert dat

$$x_1 = \frac{1 - (1 + ax_0)e^{-ax_0}}{-ae^{-ax_0} + b}.$$

Daarna x_1 opnieuw invullen levert voor x_2 grote, onoverzichtelijke uitdrukkingen op. Daar hebben we niet veel aan. De methode van Newton werkt goed als we voor de coëfficiënten van de vergelijking getallen hebben en dan een rekenmachine gebruiken om de differentievergelijking op te lossen.

Opgave 6.4.4 Bereken bij benadering de vliegtijd van een opgegooide bal als $a = 0.1$, $b = 0.4$.

Hetzelfde soort probleem speelt voor de eeuwenoude vergelijking van Kepler $E - e \sin E = a$. In rekenprogramma's voor kunstmanen, planeten en dubbelsterren moet deze vergelijking tienduizenden keren worden opgelost, dus het is wel verstandig als dat efficiënt wordt uitgevoerd. Het rekenproces wordt met behulp van vgl. (6.10) gegeven door de differentievergelijking

$$E_{n+1} = E_n - \frac{E_n - e \sin E_n - a}{1 - e \cos E_n} = \frac{-e E_n \cos E_n + e \sin E_n + a}{1 - e \cos E_n}.$$

Wat zou een geschikte startwaarde E_0 zijn? We weten alleen dat E een hoek is met bereik 0 tot 2π . Kies dan het midden: $E_0 = \pi$. Dat levert

$$E_1 = \frac{e\pi + a}{1 + e}.$$

Verder invullen heeft niet veel zin, maar als e en a numeriek bekend zijn, is E_1 een goede startwaarde voor het proces met een rekenmachine.

Opgave 6.4.5 a. Benader de oplossing van de Keplervergelijking indien $a = 2$ en voor baanexcentriciteit $e = 0.5$.

b. De planeten om de Zon hebben een veel kleinere excentriciteit, de banen zijn bijna cirkelvormig. We hebben bijvoorbeeld $e = 0.1$ of nog kleiner. Het is dan beter om $e \sin E$ even te verwaarlozen en $E_0 = a$ te kiezen, in plaats van π . Ga na dat de volgende stap levert

$$E_1 = \frac{-ea \cos a + e \sin a + a}{1 - e \cos a}.$$

Neem nu $a = 2$, $e = 0.1$ en ga na of E_1 al een goede benadering levert van de oplossing van de Keplervergelijking.

Opmerking: Bedenk dat als we een hoek van 0 tot 2π laten lopen, we de hoek in radialen meten. Dat betekent ook dat a als eenheid de radiaal heeft.

Wat kan er misgaan?

Dat is een vraag die we ons altijd moeten stellen als we een rekenproces bedenken of uit een boek overnemen. We bespreken voor de methode van Newton enkele mogelijkheden.

1. Allereerst natuurlijk: het gaat mis als de vergelijking geen wortels heeft. Het ligt voor de hand om eerst te analyseren of er wortels zijn en liefst ook hoeveel. Bedenk dat onze rekenmachine een automaat is die gewoon getallen blijft produceren die in dit geval geen nut hebben.
2. Een slechte keuze van x_0 kan ons ver van het nulpunt laten beginnen of ons naar een nulpunt leiden dat ons niet interesseert. Ga vooral na of $f'(x_0)$ ver genoeg van nul verwijderd is.
3. We hebben in hoofdstuk 2 gezien dat er behalve evenwichtoplossingen ook hogere periodieke oplossingen kunnen bestaan en zelfs dat er chaos mogelijk is. Dat 'gevaar' kan zich ook bij de methode van Newton voordoen. We geven enkele voorbeelden.

Voorbeeld 6.4.3 *Beschouw de vergelijking*

$$x^2 + a^2 = 0, \quad a > 0.$$

Deze vergelijking heeft geen reële oplossing, maar dat verhindert ons niet om de differentievergelijking (6.10) voor dit geval op te stellen:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 + a^2}{2x_n} = \frac{x_n^2 - a^2}{2x_n}.$$

Kies eens $x_0 = a/\sqrt{3}$, dat levert $x_1 = -a/\sqrt{3}$ (ga na) en vervolgens $x_2 = a/\sqrt{3}$. We hebben dus een periodieke oplossing met periode 2 gevonden!

We kunnen door berekening bewijzen dat een kwadratische vergelijking waarvan de wortels reëel zijn, geen hogere periodieke oplossingen (periode 2 of meer) heeft. Dat is echter nog een heel gereken.

Toch is dit een verontrustend voorbeeld. We laten nog eens zien dat een dergelijk verschijnsel zich ook kan voordoen bij een vergelijking die wel een reële wortel heeft.

Voorbeeld 6.4.4 *Beschouw eens de derdegraads vergelijking*

$$x^3 - 3x^2 - 5x - 9 = 0.$$

Deze heeft één reële wortel: $x = 4.54$. De differentievergelijking (6.10) om de wortel te benaderen wordt

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 3x_n^2 - 5x_n - 9}{3x_n^2 - 6x_n - 5} = \frac{2x_n^3 - 3x_n^2 + 9}{3x_n^2 - 6x_n - 5}.$$

Het blijkt dat er een stabiele periodieke oplossing bestaat met periode 2. Je kunt die vinden door bijvoorbeeld te starten met een geschikte x_0 en dan de differentievergelijking steeds opnieuw toe te passen. We doen dat in de volgende opgave:

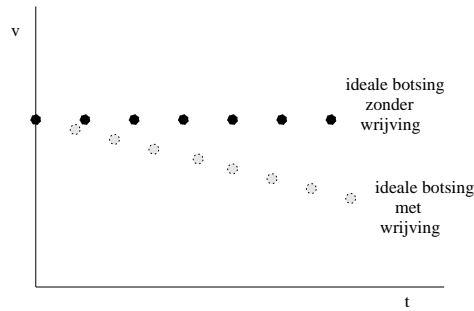
Opgave 6.4.6 Kies een x_0 en laat met behulp van de GR zien dat de oplossingen naderen naar de periodieke oplossing die steeds $-1, +1, -1, +1, \dots$ als waarden geeft.

6.5 Stuiteren

We hebben nu gezien, wat er gebeurt met een bal die wordt opgegooid zonder en mét wrijving door de lucht in de atmosfeer. Wat gebeurt er als de bal weer op de grond komt? Als het een ijzeren bal is die in mul zand valt, dan zal de bal meteen blijven liggen. De energie die bij de val vrij komt, zal voornamelijk in de verspreiding van wat zand gaan zitten. Hebben we echter een elastische bal die op een harde, vlakke bodem valt, dan zal de bal omhoog stuiteren. In het ideale geval dat de bal volkomen elastisch is, gaat er geen energie verloren bij de botsing met de grond, de snelheid bij het weer opstijgen zal in grootte gelijk zijn aan $v(T)$, maar tegengesteld van richting. We bekijken vijf modellen voor stuiteren.

1. Volkomen elastische botsing, geen wrijving door de lucht

Als we de tijdstippen van het stuiteren successievelijk aangeven met T_1, T_2, \dots en de bijbehorende vertreksnelheden met v_1, v_2, \dots , vertreksnelheid op $t = 0$: v_0 , dan geldt volgens §6.2 $T = T_1 = 2v_0/g, T_2 = 2T_1, T_3 = 3T_1$ enzovoorts, verder $v_0 = v_1 = v_2 = v_3$ enzovoorts. Een saaie boel, maar het is wel een nieuw element dat het stuiteren wordt gekarakteriseerd door een afbeelding: $t = 0, v_0$ produceert na beweging omhoog en terug $T_1 = T, v_1$, deze produceert $T_2 = 2T, v_2$ enzovoorts. Dat is een afbeelding van het platte vlak in zichzelf, of beter van $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; zie fig. 6.7.



Figuur 6.7: Afbeelding van stuiter- en vliegtijd bij elastische botsing met en zonder luchtweerstand.

2. *Volkomen elastische botsing, wel wrijving door de lucht*

We nemen aan dat de wrijvingscoëfficiënt c klein is zodat de opstijgsnelheid v_1 iets kleiner is dan de beginsnelheid v_0 . Met vgl. (6.6- 6.7) kunnen we dit uitrekenen (doen we niet). Dit geeft een vergelijking die in fig. 6.7 een oplossing levert die naar nul nadert; dat kennen we uit de praktijk van het stuiten.

3. *Niet-elastische botsing, geen wrijving door de lucht*

Als we met snelheid v_0 opstijgen, komen we met snelheid $-v_0$ op de grond. Er gaat door de niet volkomen elastische botsing energie verloren bij het samendrukken van de bal. We drukken dit uit in de formule voor de opstijgsnelheid

$$v_1 = \alpha v_0, \text{ met } 0 < \alpha < 1.$$

Hoe dichter α bij 1 ligt, hoe elastischer de bal. Verder zal dan voor het verloop bij de n^e botsing gelden

$$v_n = \alpha v_{n-1}, \quad T_n = T_{n-1} + \frac{v_{n-1}}{2g}.$$

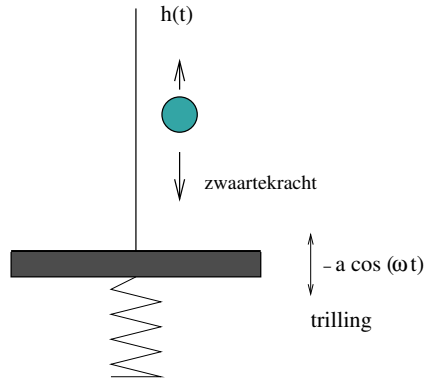
Deze differentievergelijking hebben we in §2.3 opgelost. Ook in dit model zullen de stijgsnelheden en vliegtijden steeds kleiner worden.

4. *Niet-elastische botsing, wel wrijving door de lucht*

In dit model combineren we de twee effecten van energieverlies. Dat maakt het model tamelijk realistisch, maar wiskundig is er niet veel nieuws.

5. *Elastische botsing, geen wrijving door de lucht, botsing met een trillende tafel.*

Bij dit model gebeurt er wel weer iets nieuws, zowel mechanisch als wiskundig. We stellen ons voor dat de bal niet op de grond valt, maar op een periodiek trillende tafel. Er wordt dan steeds energie toegevoegd door de botsing met de bewegende tafel; zie fig. 6.8. Het stuiten vindt



Figuur 6.8: Stuiten op een trillende tafel.

weer plaats op tijdstippen $0, T_1, T_2, \dots$. De vliegtijd tussen tijdstip T_n en T_{n+1} is afhankelijk van de opstijgsnelheid v_n . Indien de uitwijking (ook wel amplitude genoemd) van de tafel klein is ten opzichte van de bereikte hoogtes van de bal, kan deze uitwijking voor de vliegtijd verwaarloosd worden. Dan geldt

$$T_{n+1} = T_n + \frac{2v_n}{g}.$$

De stijgsnelheid wordt gewijzigd door de botsing met de tafel. Als de positie van de tafel op tijdstip t wordt gegeven door $-a \cos(\omega t)$, dan geldt voor de snelheid van de tafel op tijdstip t

$$v_{tafel} = a\omega \sin(\omega t).$$

Het minteken voor de positie van de tafel hebben we alleen maar gekozen om voor de snelheid van de tafel geen minteken te hebben. Die snelheid speelt namelijk de belangrijkste rol.

Ook is er een klein effect, omdat als de positie van de tafel negatief is, de neerkomende snelheid van de bal iets groter is dan v_n ; de snelheid is iets kleiner als de positie positief is, maar dat verwaarlozen we allemaal omdat de uitwijking a klein is. Dan geldt dus

$$v_{n+1} = v_n + a\omega \sin(\omega T_{n+1}),$$

en door invullen van de vergelijking voor T_{n+1}

$$v_{n+1} = v_n + a\omega \sin \omega \left(T_n + \frac{2v_n}{g} \right).$$

We hebben nu een tweedimensionale differentievergelijking voor de dynamica van de stuitende bal. Die moeten we nader analyseren.

Opgave 6.5.1 *Stel de vergelijkingen op voor stijgsnelheden en vliegtijden in model 4.*

Opgave 6.5.2 *Wijzig model 5 - dat wordt dan model 6 - door de botsing niet-elastisch te maken. Stel opnieuw de differentievergelijking op.*

6.6 Extra: Botsing met een trillende tafel

Zonder wrijving en met volkomen elastische botsing volgens model 5 in de vorige paragraaf, wordt de dynamica van een stuitende bal in goede benadering beschreven door de tweedimensionale differentievergelijking

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n + a\omega \sin \omega \left(T_n + \frac{2v_n}{g} \right), \\ T_{n+1} &= T_n + \frac{2v_n}{g}, \end{aligned}$$

met $n = 0, 1, 2, \dots$ en gegeven $v_0, T(0) = 0$. Hierbij is v_n de vertrek-snelheid na de n^e botsing en T_n de bijbehorende som van de vliegtijden.

Bij de afleiding van dit model in de vorige paragraaf, hebben we aangenomen dat de uitwijking a van de tafel klein is. Moeten we dan ook niet de tweede term rechts in de uitdrukking voor de snelheid verwaarlozen? Dat is inderdaad zo, tenzij ω groot is. In dat geval is het

product $a\omega$ niet verwaarloosbaar. Dat nemen we nu verder aan, dat wil zeggen de tafel trilt met kleine uitwijking, maar wel snel. De periode is $2\pi/\omega$ en die is dan klein, we noemen dat ook wel hoogfrequente trilling. Er staan parameters in de vergelijkingen voor de stuiterende bal en de vraag is of we de vergelijkingen wat eenvoudiger kunnen schrijven. Dat kan met een zogenaamde *schaaltransformatie*. Je vergroot of verkleint hierbij de variabelen met een willekeurige factor en kiest deze dan zó, dat de vergelijkingen er simpeler uitzien.

We gaan voor v de variabele V invoeren en voor T de variabele τ door te transformeren

$$v_n = AV_n, \quad T_n = B\tau_n,$$

waarbij we A en B geschikt gaan kiezen. De vergelijkingen worden met deze schaaltransformatie

$$\begin{aligned} AV_{n+1} &= AV_n + a\omega \sin \omega \left(B\tau_n + \frac{2AV_n}{g} \right), \\ B\tau_{n+1} &= B\tau_n + \frac{2AV_n}{g}. \end{aligned}$$

Wat schiet je hiermee op? Het lijkt alleen maar ingewikkelder. Kies echter

$$B = \frac{2}{g}A$$

en de tweede vergelijking vereenvoudigt tot $\tau_{n+1} = \tau_n + V_n$. Dat is simpel. De eerste vergelijking wordt met deze keus van B :

$$AV_{n+1} = AV_n + a\omega \sin \omega \left(\frac{2}{g}A\tau_n + \frac{2}{g}AV_n \right).$$

Als we dan kiezen

$$\omega \frac{2}{g}A = 1,$$

dan zijn zowel A als B bepaald en vinden we na delen door A

$$V_{n+1} = V_n + \frac{2a\omega^2}{g} \sin(\tau_n + V_n).$$

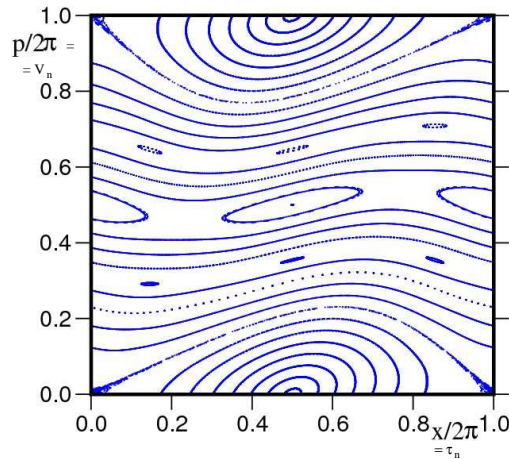
Als we stellen

$$\lambda = \frac{2a\omega^2}{g},$$

dan krijgen we tenslotte de twee vergelijkingen

$$V_{n+1} = V_n + \lambda \sin(\tau_n + V_n), \quad \tau_{n+1} = \tau_n + V_n. \quad (6.11)$$

Er spelen in dit probleem (behalve de twee variabelen V_n en τ_n) niet twee parameters, maar slechts één parameter een rol, namelijk λ . Als

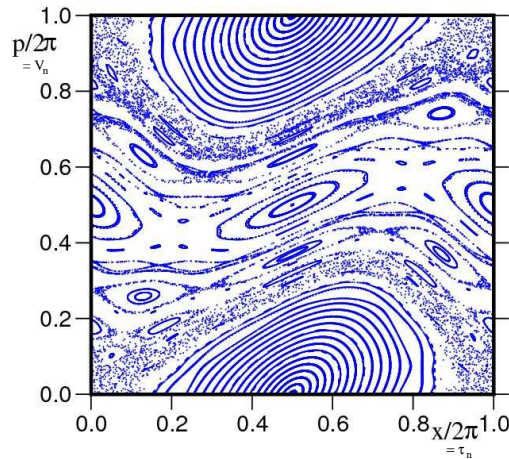


Figuur 6.9: V_n uitgezet tegen τ_n bij stuiteren op een trillende tafel; $\lambda = 0.5$. Een punt binnen een gesloten kromme zal een periodieke oplossing voorstellen. Verder golft de stuitering inderdaad om een horizontale lijn heen.

we nu startwaarden V_0 en τ_0 geven en λ kiezen, kunnen we de dynamica van de stuitende bal berekenen. Bij het bekijken van het dynamisch gedrag is het ook handig om modulo 2π te rekenen. Dat wil zeggen, dat als τ_n voorbij de waarde 2π gaat, we van deze waarde 2π aftrekken en die waarde verder gebruiken.

Vergelijk het met een klok. Die telt 12 uren en als je de 12 passeert, begint de klok opnieuw te tellen. Dat betekent dat de klok modulo 12 rekt. De keuze van 12 is handig, maar je zou ook 24 kunnen nemen, omdat de dag 24 uren telt. De keuze 2π bij ons probleem is handig, omdat de sinus en cosinus periodiek met periode 2π zijn.

Wat verwachten we eigenlijk te zien in zo'n plaatje? Als $\lambda = 0$, dan hebben we het eenvoudige model 1 van §6.5 terug: $V_{n+1} = V_n$, $\tau_{n+1} = \tau_n$ en we krijgen een horizontaal aantal stippen in het τ, V -diagram,



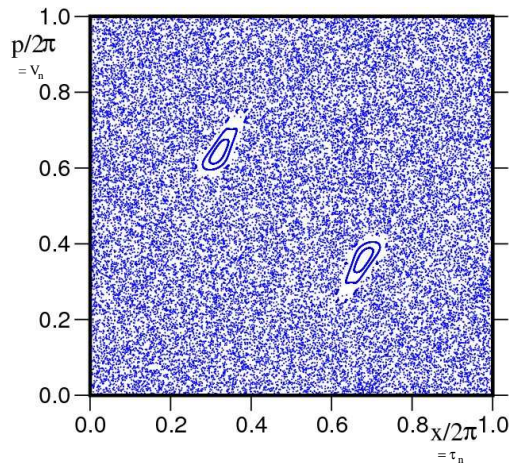
Figuur 6.10: V_n uitgezet tegen τ_n bij stuiten op een trillende tafel; $\lambda = 0.97$. Er zijn nog wel gesloten krommen, maar ook een puntenwolk met chaotisch stuiten.

een lijn met gaten. Als we een andere beginsnelheid nemen, dan ligt die horizontale lijn natuurlijk op een andere hoogte in het diagram.

Als $\lambda \neq 0$ maar wel klein, dan verwachten we kleine schommelingen om zo'n horizontale lijn. In fig. 6.9 geven we voor verschillende beginsnelheden en $\lambda = 0.5$ een aantal resultaten van berekeningen voor vgl. (6.11). Klopt het? Er blijken ook gesloten krommen te ontstaan, wat betekenen die?

We nemen nu eens $\lambda = 0.97$, dat levert voor verschillende beginposities (snelheid en tijdstip) het plaatje 6.10 op. Dat ziet er heel anders uit. Er zijn nog wel gesloten krommen en een soort golfbeweging rond een horizontale lijn, maar er zijn ook puntenwolken, waar de oplossingen kennelijk op willekeurige wijze doorheen springen. Hier treedt al chaos op bij het stuiten. Als je met beginwaarden voor tijd τ en snelheid V in zo'n puntenwolk begint, is het stuiten onvoorspelbaar geworden. Dat is toch wel heel merkwaardig als je bedenkt dat het stuiterverschijnsel natuurkundig simpel en volkomen begrepen is.

Nu een echt veel grotere waarde $\lambda = 5$. Dat leidt tot bijna volledige stuiterschaos, zie fig. 6.11.



Figuur 6.11: V_n uitgezet tegen τ_n bij stuiteren op een trillende tafel; $\lambda = 5$. De chaos is bijna totaal, er zijn nog enkele kleine gebiedjes met regelmatige beweging.

6.7 Vallen in een vloeistof: zinken

We hebben gezien dat er bij vallen weerstand van de omringende lucht optreedt, maar je kunt vermoeden dat bij vallen in een vloeistof, bijvoorbeeld water, de weerstand veel groter is. Dat blijkt experimenteel ook zo te zijn en we spreken ook niet van ‘vallen’, maar van ‘zinken’.

Je zult zeggen: ”dat betekent dat de wrijvingskracht wat groter is, maar verder blijft het verhaal (en de formules) hetzelfde”. Dat is echter niet zo. Bekijk maar eens opnieuw het eenvoudigste model in §6.2. Een van de aannames van dat model, en van alle volgende modellen, was dat de opwaartse kracht volgens de wet van Archimedes verwaarloosbaar is. Bij deze verwaarlozing geldt in het eenvoudigste model voor de versnelling (tweede afgeleide van de hoogte h) van een massa m de bewegingsvergelijking

$$m \frac{d^2 h}{dt^2} = -gm.$$

De opwaartse kracht F_A die een lichaam volgens Archimedes ondervindt, komt overeen met het gewicht van de verplaatste hoeveelheid vloeistof of gas. De bewegingsvergelijking in het eenvoudigste model

uit §6.2 wordt met deze kracht uitgebreid tot

$$m \frac{d^2 h}{dt^2} = -gm + F_A. \quad (6.12)$$

Een mens met een gewicht van 75 kg verplaatst ongeveer 70 dm^3 , dat hangt een beetje van het gewicht van zijn of haar botten af. De verplaatste hoeveelheid lucht van 70 dm^3 levert een opwaartse kracht die in grootte gelijk is aan het gewicht van 70 dm^3 lucht. 1 dm^3 lucht weegt op de Aarde 0.001293 kg, dat is iets meer dan een gram; de opwaartse kracht is dan in lucht $70 \times 0.001293 = 0.091$ en dat is inderdaad verwaarloosbaar tegen $gm = 75$ kg.



Figuur 6.12: Een slocum (robotduikboot) die aan de oppervlakte is gekomen.

De wet van Archimedes wordt ook gebruikt bij robotduikboten, de zogenaamde ‘slocums’ die maandenlang diep in de oceanen onbemand onderzoek doen. Als zo’n slocum moet stijgen, pompt een electromotor olie (lichter dan water) in een uitwendige blaas, dan neemt zijn soortelijke gewicht af; om te dalen wordt de olie weer naar binnen gepompt en klapt de blaas in elkaar, het soortelijke gewicht neemt toe. Het dalen en stijgen gaat langzaam, maar deze robotduikboten hebben alle tijd. Elke keer als ze aan de oppervlakte komen (zie fig. 6.12), bepalen de slocums hun GPS positie met behulp van een radio antenne.

In water ligt dat anders: 1 dm^3 water weegt bij 4 graden celsius 1 kg, zodat $F_A = 70$ en deze kracht werkt tegengesteld aan de zwaartekracht. Als je dan ook nog bedenkt dat het model veel realistischer wordt als we de weerstand van de vloeistof bij het zinken meerekenen, zie je dat zinken in een vloeistof toch een wat ander verschijnsel is dan vallen in de atmosfeer van de Aarde.

De weerstand W die de vloeistof biedt bij de beweging er doorheen, wordt groter bij grotere snelheid, bijvoorbeeld volgens de formule

$$W_1 = -c \frac{dh}{dt}.$$

In dat geval wordt de bewegingsvergelijking

$$m \frac{d^2h}{dt^2} = -gm + F_A - c \frac{dh}{dt},$$

met c een positieve constante, F_A een constante kracht (constant voor een gegeven in de vloeistof bewegend lichaam). De evenwichtoplossing die de grenssnelheid levert volgt dan uit

$$-gm + F_A - c \frac{dh}{dt} = 0,$$

zodat

$$\frac{dh}{dt} = -g \frac{m}{c} + \frac{F_A}{c}.$$

Bij zinken is het rechterlid negatief, bij stijgen positief. De grenssnelheid is de constante waarde die de snelheid op den duur aanneemt. Bij zinken in een vloeistof als water gaat dat veel sneller dan in lucht. Een lichaam zinkt in water na betrekkelijk korte tijd met (bijna) constante snelheid.

Opgave 6.7.1 *Neem eens twee gelijke, lege ballonnetjes zoals die als speelgoed worden verkocht. Blaas er een vol met lucht.*

a. *Welke ballon weegt het meest?*

b. *Laat op een windstille dag beide ballonnetjes, de lege en de volle, van gelijke hoogte uit een raam van de bovenste verdieping van je huis vallen. Welke is het eerst op de begane grond?*

Opgave 6.7.2 Een hutkoffer valt overboord, maar is goed afgesloten. De afmetingen zijn $80 \times 60 \times 50$ cm. Hoe groot is zijn maximale gewicht, inclusief inhoud, zodat de hutkoffer blijft drijven?

We hebben de wrijvingskracht W_1 genoemd omdat er nog meer wrijvingswetten in omloop zijn. Het blijkt beter met experimenten overeen te stemmen als we de weerstand bij zinken in een vloeistof met het kwadraat van de snelheid laten toenemen:

$$W_1 = +c \left(\frac{dh}{dt} \right)^2.$$

Er staat een + teken omdat bij zinken de weerstand omhoog gericht is. De bewegingsvergelijking voor zinken wordt dan

$$m \frac{d^2h}{dt^2} = -gm + F_A + c \left(\frac{dh}{dt} \right)^2.$$

Het oplossen van deze vergelijking gaat wat anders dan bij het gebruik van de lineaire wrijvingskracht W_1 . We kunnen de grenssnelheid (evenwichtoplossing) echter weer even gemakkelijk vinden door het rechterlid nul te stellen:

$$-gm + F_A + c \left(\frac{dh}{dt} \right)^2 = 0.$$

Dat levert

$$\frac{dh}{dt} = -\sqrt{g \frac{m}{c} - \frac{F_A}{c}}$$

als grenssnelheid, maar echter met de eis $gm - F_A \geq 0$.

Opgave 6.7.3 Een goed afgesloten gereedschapsdoos valt overboord. De afmetingen zijn $30 \times 20 \times 20$ cm en het gewicht 18 kg. Met welke grenssnelheid zinkt de doos de diepte in? Geef het antwoord zowel bij wrijving W_1 als W_2 . Neem in dit geval $c = 0.9$.