

**ABDRUCK DES TAGEBUCHS
(NOTIZENJOURNALS)
MIT ERLÄUTERUNGEN.**

61*

VORBEMERKUNGEN ZUM ERSTEN ABDRUCK DES TAGEBUCHS

in der »Festschrift zur Feier des hundertfünfzigjährigen Bestehens der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen«, Beiträge zur Gelehrten-geschichte Göttingens, Berlin 1901; siehe auch Mathematische Annalen 57, 1903, S. 1—34 *).

Die tagebuchartigen Aufzeichnungen von GAUSS füllen in der Urschrift 19 kleine Oktavseiten in einem unscheinbaren Heftchen, welches sich seit GAUSS' Tode in der Familie weiter vererbt hat und uns durch Vermittlung von Herrn STÄCKEL im Sommer 1898 seitens des Enkels von GAUSS, des Herrn C. GAUSS in Hameln, zur Benutzung bei der Weiterführung der Gesamtausgabe von GAUSS' Werken zur Verfügung gestellt wurde. Herr C. GAUSS hat später — unter Wahrung seines persönlichen Eigentumsrechts — in dankenswerter Weise verfügt, daß besagtes Heftchen dauernd im hiesigen GAUSSarchiv aufbewahrt werden soll.

Die außerordentliche wissenschaftliche Bedeutung dieses *Tagebuchs* oder *Notizenjournals* (wie es GAUSS selbst gelegentlich in einem Brief an OLBERS nennt; siehe Nr. 88 des folgenden Abdrucks) ist bereits im zweiten derjenigen Berichte, welche der K. Gesellschaft der Wissenschaften alljährlich über den Stand der Herausgabe von GAUSS' Werken erstattet werden, unter Mitteilung einiger charakteristischer Stellen hervorgehoben worden**), — sie tritt nicht minder in dem Bande VIII von GAUSS' Werken hervor, wo wir vielfach auf die Angaben des *Tagebuchs* verweisen konnten. Nach dem von der K. Gesellschaft angenommenen allgemeinen Plane für die Weiterführung der Gesamtausgabe soll dasselbe in Band X der Werke ausführlich publiziert und bearbeitet werden. Aber es ist bis dahin noch ein langer Weg, dessen Ende noch nicht mit Sicherheit abzusehen sein dürfte. Ich glaube also auf allgemeine Zustimmung rechnen zu dürfen, wenn ich das *Tagebuch* hier vorab als Beitrag zu der von der K. Gesellschaft der Wissenschaften anlässlich ihres 150jährigen Bestehens geplanten historischen Festschrift in vorläufiger Form veröffentliche. Die endgültige Bearbeitung in Band X wird damit nichts an ihrem Werte verlieren, sie wird aber dadurch, daß das Material schon jetzt zur öffentlichen Kenntnis und öffentlichen Diskussion kommt, erleichtert werden.

Zwei Dinge dürfen ja wohl gleich hier vorab hervorgehoben werden, welche dem *Tagebuch* einen unvergleichlichen biographischen Wert verleihen.

*) Diese Vorbemerkungen werden hier mit Weglassung einiger nur für den ersten Abdruck in Betracht kommender Stellen und mit einigen durch die gegenwärtigen Verhältnisse bedingten Abänderungen wiedergegeben.

***) Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1899, Geschäftliche Mitteilungen, Heft 1. (Abgedruckt Mathematische Annalen 53, 1899, S. 46—48.)

Das eine ist der unmittelbare, sozusagen persönliche Einblick, den wir gerade für die entscheidenden Jahre 1796—1800 in den wissenschaftlichen Werdegang des jungen GAUSS gewinnen*). Da ist noch keine Spur der abgeschlossenen Reife des wissenschaftlichen Urteils oder auch der vornehmen Zurückhaltung, wie sie GAUSS in späteren Lebensjahren zu eigen waren. Wichtiges und Unwichtiges wechselt ab; neben Entdeckungen von der größten Tragweite finden sich Trivialitäten, wie sie der Anfänger zu überwinden hat; überall aber tritt der persönliche Anteil, den GAUSS an seinen Mühen und Erfolgen nimmt, in überquellender Weise zu Tage. Und dabei immer wieder die Eigenart seines mathematischen Genius: induktiv, an der Hand von Zahlenrechnungen, die Resultate zu finden, um hinterher langsam, in härtester Arbeit, die Beweise zu zwingen.

Das andere ist die Verknüpfung der einzelnen wissenschaftlichen Fortschritte, die GAUSS gelangen, und die genaue Datierung bestimmter Entdeckungen. Man kann allerdings den Wunsch nicht unterdrücken, GAUSS möchte bei seinen Aufzeichnungen mit größerer Konsequenz vorgegangen sein und sich außerdem nicht so vielfach mit bloßen Andeutungen begnügt haben. Manche Frage nach der Entstehung von GAUSS' späteren mathematischen Auffassungen und Ideen wird sich auch mit Hilfe des *Tagebuches* niemals beantworten lassen und andererseits wird uns manche Tagebuchnotiz dauernd unverständlich bleiben. Trotzdem ist der Fortschritt, der sich aus einem genauen Vergleich der einzelnen Nummern des *Tagebuches* mit den erhaltenen Stücken des Nachlasses ergeben muß, zweifellos ein sehr bedeutender. Ich habe bei dieser ersten Publikation als meine Hauptaufgabe angesehen, in dieser Hinsicht die Wege nur erst zu ebnen, und bin nur nach einer Seite weiter gegangen, indem ich nämlich das Material aus den Jahren 1797—1800 heranzog, welches sich auf die *Theorie der elliptischen Funktionen* bezieht. Das Hauptergebnis meiner betreffenden Studien findet sich in einer Bemerkung zu Nr. 111 des *Tagebuches*: die Fachgenossen müssen entscheiden, wie weit sie dasselbe als gesicherten Besitz anerkennen und dementsprechend die bisher geltende Auffassung abändern wollen.

Hinsichtlich, der Art der im folgenden gegebenen Veröffentlichung und der hinzugefügten Bemerkungen mögen übrigens folgende Angaben vorausgeschickt werden.

Zunächst, was die Notizen des *Tagebuches* selbst betrifft, so habe ich mich bei deren Wiedergabe keineswegs genau an die Außerlichkeiten des Originals gebunden. Vor allen Dingen habe ich im Interesse der Übersichtlichkeit und der bequemeren Bezugnahme die sämtlichen Sätze durchlaufend numeriert. Die Angaben über Ort und Zeit wurden möglichst gleichförmig gestaltet, und auch dem Text, wo es wünschenswert schien, hin und wieder ein Wort oder eine Silbe (die dann in eckige Klammern eingeschlossen sind) hinzugefügt. Leicht erkennbare sprachliche Unrichtigkeiten wurden verbessert. Die Formeln wurden herausgehoben und in moderner Weise gedruckt. Einer Anzahl Nummern hat GAUSS gewisse Marken vorangestellt, um deren Wichtigkeit hervorzuheben, ferner ist eine große Zahl der Notizen, insbesondere derjenigen zahlentheoretischen Inhalts, im Original mit roter Tinte unterstrichen; im Druck wurden sowohl die Marken wie auch die Unterstreichungen weggelassen. Es scheint, als seien die Unterstreichungen erst hinterher angebracht und darauf bezüglich, ob GAUSS die einzelne Notiz bei späteren Arbeiten benutzt hat oder nicht.

Dann aber, was die Bemerkungen angeht, die den einzelnen Nummern zugesetzt sind, so haben sie vorwiegend den Zweck, den aktenmäßigen Wert des mitgeteilten Materials zu erhöhen. Hierzu schien vor allen Dingen der Hinweis auf parallellaufende Zeitangaben in den bisherigen Veröffentlichungen von GAUSS' Werken oder Briefen erwünscht. Besonderen Dank habe ich Herrn DEDEKIND für einige erläuternde Bemerkungen zu sagen, die mit seiner Namensunterschrift den in Betracht kommenden Nummern hinzugefügt worden sind. Hierüber hinaus habe ich verschiedentlich auf den handschriftlichen Nachlaß von GAUSS, wie

*) GAUSS ist am 30. April 1777 geboren, war also, als er das *Tagebuch* am 30. März 1796 begann, noch nicht ganz 19 Jahre alt.

er zur Zeit im hiesigen GAUSSarchiv aufbewahrt wird, Bezug genommen und insbesondere bei denjenigen Nummern, die sich auf die elliptischen Funktionen in den Jahren 1797—1800 beziehen, solche Stücke des Nachlasses abgedruckt, die nun erst an der Hand des *Tagebuchs* ihre volle Bedeutung gewinnen. Für die Jahre 1796, 1797 ist in dieser Hinsicht ein mit Schreibpapier durchschossenes Exemplar des Lehrbuchs von LEISTE: *Die Arithmetik und Algebra*, Wolfenbüttel 1790, (114 pag.) besonders wertvoll, in dem GAUSS damals auf dessen freie Seiten eine Reihe der interessantesten Eintragungen gemacht hat (wie er ja überhaupt in die Bücher seiner Bibliothek vielfach Notizen eintrug, gleich als wollte er jedes leere Blatt ausnutzen, das Dauer zu besitzen schien)*). Für die Jahre 1798—1800 kommen dann neben losen Zetteln, die sich zufällig erhalten haben, insbesondere die sogenannten *Schedae* in Betracht, d. h. Notizheftchen, welche in unregelmäßiger Aufeinanderfolge Zahlenrechnungen und Bemerkungen der verschiedensten Art, vielfach auch die Ansätze zu zusammenhängenden Darstellungen enthalten; das Nähere hierüber ist unten bei den einzelnen Nummern mitgeteilt. —

Ich habe noch nach verschiedenen Seiten hin für vielfache Unterstützung, die ich bei meiner Arbeit fand, Dank auszusprechen. Herr BRENDEL dahier (der jetzige Generalredaktor der GAUSSausgabe) hat mich durch seine große Kenntnis des Nachlasses weitgehend unterstützt. Nicht minder bin ich den Bearbeitern von Band VIII der GAUSSschen Werke, den Herren BÖRSCH, FRICKE und STÄCKEL, sowie den Herren FUETER und SOMMER dahier für vielfache Bemerkungen und sonstige Hilfe verpflichtet. Der Mitwirkung von Herrn DEDEKIND gedachte ich schon oben; sie erstreckte sich schließlich auf fast alle Teile des *Tagebuchs* und ist mir besonders wertvoll gewesen.

Göttingen, den 3. Juli 1901.

F. KLEIN.

VORBEMERKUNG ZU DEM HIER FOLGENDEN ABDRUCK DES TAGEBUCHS.

Die Auffindung des *Tagebuchs* durch STÄCKEL und seine erste Herausgabe durch KLEIN bedeuten die Eröffnung eines neuen Abschnitts in der GAUSSforschung, die durch diesen Stoff neubelebt und in die Bahnen zuverlässiger geschichtlicher Untersuchung geleitet worden ist. Die nachfolgende vom Unterzeichneten besorgte Ausgabe schließt sich eng an die erste an, nur konnten die Bemerkungen vermehrt und ausführlicher gestaltet werden; namentlich bei solchen Aufzeichnungen, die sonst nirgendwo berührte Gegenstände betreffen, haben sie oft die Form von kleinen Abhandlungen angenommen. Die einzelnen Bemerkungen sind mit den Namen ihrer Urheber unterzeichnet; der bei vielen Nummern diesen Namen vorangestellte Name KLEINs soll darauf hinweisen, daß die betreffende Aufzeichnung in der ersten Ausgabe erläutert war, und daß der wesentliche Inhalt jener Erläuterung in die jetzt vorliegende Bemerkung eingearbeitet worden ist. Die meisten Nummern sind jetzt verständlich; die wenigen, die keine Bemerkungen zeigen, haben sich nicht aufklären lassen.

Dem Abdruck des *Tagebuchs* in den Werken ist eine photographische Nachbildung dieser wichtigen Urkunde vorangestellt worden, die alle Einzelheiten der Handschrift deutlich hervortreten läßt. Wir machen besonders auf die in den *Vorbemerkungen* von KLEIN erwähnten Marken und auf die roten Unterstreichungen aufmerksam, die in der Nachbildung im Halbton wiedergegeben sind.

SCHLESINGER.

*) Die Notizen aus LEISTE werden in der Folge so zitiert, daß jedesmal die Druckseite angegeben wird, neben der sie sich in dem durchschossenen Exemplare befinden.

ABDRUCK DES TAGEBUCHS (NOTIZENJOURNALS) MIT ERLÄUTERUNGEN.

[1.]

Principia quibus innititur sectio circuli, ac divisibilitas eiusdem geometrica in septemdecim partes etc.

[1796] Mart. 30. Brunsv[igae]

Das gleiche Datum Werke I, S. 476 (handschriftliche Bemerkung zum art. 365. der *Disquis. Arithm.*). Vergl. die oben S. 3 abgedruckte Anzeige im Intelligenzblatt der allgemeinen Litteraturzeitung Nr. 66 vom 1. Juni 1796. Zur Geschichte der Entdeckung vergl. den oben S. 121 abgedruckten Brief an GERLING vom 6. Januar 1819, ferner zwei Stellen aus Briefen von W. BOLYAI, die nach dem Abdruck in dem *Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und W. Bolyai*, herausgegeben von P. STÄCKEL und F. SCHMIDT, Leipzig 1899, S. 144 und 152 hier wiedergegeben seien. Am 12. April 1855 schreibt BOLYAI an den Wiener Astronomen KREIL »und (im *Disquis. Arithm.* pag. 662) $\cos \frac{P}{17} = \dots$ war noch vor 1797 erfunden, weil er es bei mir dann an einem Abende in Göttingen sagte« und am 13. Juli 1855 an W. SARTORIUS v. WALTERSHAUSEN: »... nur einmal sah ich an ihm eine mäßige Freude, wo er die kleine Tafel, auf welcher er das 17eck *Disquis. Arithm.* p. 662 berechnet hat, zum Andenken mir gab, und [die] ich nun als etwas interessantes [nach Göttingen] hinschicke«.

Auf S. 77 der 1801 begonnenen Scheda Af hat GAUSS die folgende Zusammenstellung für ihn wichtiger Daten eingetragen:

1. Jan. 1801	☿	entdeckt
19. Febr. 1803	♃	wiedergefunden
28. März 1802	♃	entdeckt
30. März 1796		Construction des 17 Ecks
30. April 1777	*	
7. Dec. 1801	☿	wiedergefunden

Es bedeutet hier ☿ Ceres, ♃ Pallas.

KLEIN. SCHLESINGER.

[2.]

Numerorum primorum non omnes numeros infra ipsos residua quadratica esse posse demonstratione munitum.

[1796] Apr. 8. Ibid. [Brunsvigae]

Die Zeitangabe stimmt mit einer Werke I, S. 475 wiedergegebenen handschriftlichen Bemerkung von GAUSS überein, wo die Worte des art. 130. der *Disquisitiones arithmeticae* (Werke I, S. 98, 99) »Postquam rigore demonstravimus, quemvis numerum primum formae $4n + 1$, et positive et negative acceptum, alicuius numeri primi ipso minoris non-residuum esse . . .« mit folgender Bemerkung begleitet werden: »hanc demonstrationem deteximus 1796 Apr. 8.« Im Anschluß an diesen Satz gibt GAUSS im art. 131. der *Disquisitiones arithmeticae* den ersten seiner sechs Beweise des quadratischen Reziprozitätsgesetzes, bezüglich dessen es Werke I, S. 475 weiter heißt: »Theorema fundamentale per inductionem detectum 1795 Martio. Demonstratio prima, quae in hac sectione traditur, inventa 1796 Apr.«. Der Wortlaut der Tagebuchnotiz Nr. 2 stimmt aber nicht mit dem Satze des art. 130. sondern mit dem sehr viel einfacheren des art. 96. der *Disquisitiones arithmeticae* (Werke I, S. 74) überein. GAUSS muß also entweder die Beweise beider Sätze am 8. April 1796 gefunden haben, oder die Tagebuchnotiz ist verschrieben und sollte lauten: Numeros primos non omnium numerorum infra ipsos etc. Das letztere ist darum anzunehmen, weil der im Texte der Tagebuchnotiz angezeigte Beweis dafür, daß quadratische Reste einer Primzahl nicht alle unter ihr liegenden Zahlen sein können; GAUSS sicher schon bekannt war, als er (März 1795) das Fundamentaltheorem durch Induktion fand, während er den Beweis des im art. 130. enthaltenen Satzes, daß wenigstens eine Primzahl $p' < p = 4n + 1$ vorhanden sei, von der p Nichtrest ist, wie Werke II, S. 4 (1808) berichtet wird, ein ganzes Jahr lang (nämlich März 1795 bis April 1796) trotz angestrengtester Arbeit nicht zu zwingen vermochte.

KLEIN. BACHMANN.

[3.]

Formulae pro cosinibus angulorum peripheriae submultiplicum expressionem generaliore non admittent nisi in duab[us] periodis.

[1796] Apr. 12. Ibid. [Brunsvigae]

[4.]

Amplificatio normae residuorum ad residua et mensuras non indivisibiles.

[1796] Apr. 29. Gotting[ae]

Diese Notiz bezieht sich auf das verallgemeinerte quadratische Reziprozitätsgesetz, das GAUSS später im art. 133. der *Disquisitiones arithmeticae*, Werke I, S. 101, entwickelt hat; wegen des Datums vergl. die Bemerkung zu diesem Artikel, Werke I, S. 476.

KLEIN. BACHMANN.

[5.]

Numeri cuiusvis divisibilitas varia in binos primos.

[1796] Mai. 14. Gott[ingae]

Es ist hier offenbar der Satz gemeint, daß jede gerade Zahl als die Summe zweier Primzahlen dargestellt werden kann. Man bezeichnet diesen empirischen Satz gemeinhin als GOLDBACHSchen, unter Berufung auf die Briefe GOLDBACHS und EULERS vom 7. und 30. Juni 1742*). Anscheinend geht diese Bezeichnung auf eine Notiz in den *Nouvelles Annales de Mathématiques* 14, 1855, S. 117 zurück, die von dem damaligen Herausgeber TERQUEM herrührt**). Im 18. Bande (1859) derselben Zeitschrift, S. 2 des *Bulletin de Bibliographie etc.*, bemerkt TERQUEM jedoch, daß sich der gedachte Satz auf S. 379 der 3. Ausgabe von E. WARINGS *Meditationes algebraicae****) findet, wo es heißt: »Omnis par numerus constat e duobus primis numeris et omnis impar numerus vel est primus numerus, vel constat e tribus primis numeris etc.« †).

STÄCKEL. SCHLESINGER.

[6.]

Coefficients aequationum per radicum potestates additas facile dantur.

[1796] Mai. 23. Gott[ingae]

Hierzu, wie auch zu der Nr. 28 vom 21. August 1796, vergl. man die oben S. 127, 128 abgedruckte Aufzeichnung aus LEISTE.

KLEIN.

[7.]

Transformatio seriei

$$1 - 2 + 8 - 64 \dots$$

in fractionem continuam:

$$\frac{1}{1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{1 + \frac{8}{1 + \frac{12}{1 + \frac{32}{1 + \frac{56}{1 + \frac{128}{\dots}}}}}}}}}$$

*) Siehe P. H. FUSS, *Correspondance mathématique et physique etc.* I, St. Petersburg 1843, S. 127 und 135.

***) S. 293 desselben Bandes findet sich eine *Note sur le théorème de Goldbach* von DESBOVES.

***) Editio tertia recensita et aucta, Cantabrigiae 1782. Die erste Ausgabe war 1770 erschienen.

†) Vergl. auch die Aufsätze von CATALAN und von ENESTRÖM, *Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matem. e fisiche*, pubbl. da B. BONCOMPAGNI 18, 1885, S. 467, 468.

$$1 - 1 + 1.3 - 1.3.7 + 1.3.7.15 + \dots$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{6}{1 + \frac{12}{1 + 28 \dots}}}}}$$

et aliae.

[1796] Mai. 24. G[ottingae]

In sein Exemplar von LAMBERTs *Tafeln* hat GAUSS die Umformung der divergenten Reihe

$$(1) \quad 1 - mx + m.m + nx - m.m + n.m + 2nx^2 + \text{etc. in inf.}$$

n den Kettenbruch

$$\frac{1}{1 + \frac{mx}{1 + \frac{nx}{1 + \frac{(m+n)x}{1 + \text{etc.}}}}}$$

eingetragen, die EULER zuerst in seiner Abhandlung *De seriebus divergentibus*, *Novi Comment. Acad. Petrop. 5* (1754/55) 1760, S. 205, siehe besonders S. 232, als Verallgemeinerung der analogen Umformung der Reihe

$$(1a) \quad 1 - 1x + 1.2x^2 - 1.2.3x^3 + 1.2.3.4x^4 - \dots \text{ in inf.}$$

behandelt hatte*). Den EULERSchen Gedanken der Umformung einer divergenten Reihe in einen Kettenbruch wendet GAUSS in unserer Tagebuchaufzeichnung auf zwei Beispiele an. Bei beiden erweist sich aber nicht nur die Reihe, sondern auch der Kettenbruch als divergent. Auf das erste Beispiel kommen wir in der Bemerkung zu der Aufzeichnung Nr. 58 vom 16. Februar 1797 zurück, in Bezug auf das zweite Beispiel ist folgendes zu bemerken.

An der erwähnten Stelle von GAUSS' Exemplar der LAMBERTschen Tafeln findet sich auch die Umformung:

$$(2) \quad x - a x x + a b x^3 - a b c x^4 + \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{\frac{a}{b-a} + \frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{(b-a)^2}{ab(c-b)} + \frac{1}{ab(c-b)^2 \frac{1}{x}}}}}} + \text{etc.}$$

*) EULER ist später auf jene Reihe (1) in einer besondern Abhandlung *Nova Acta Acad. Petrop. 2* (1784) 1788, S. 38 zurückgekommen. Auf die »Summation« der Reihe (1a) für $x = 1$ bezieht sich die oben S. 382 abgedruckte Aufzeichnung von GAUSS, vergl. die zugehörige Bemerkung S. 385. Die Umformung der Reihe (1) in den Kettenbruch gibt GAUSS auch im art. 14. der *Disquisitiones circa seriem*, 1812, Werke III, S. 198, Gl. [26].

Mit Hilfe dieser Formel kann für

$$a = 2^1 - 1, \quad b = 2^2 - 1, \quad c = 2^3 - 1, \quad \dots$$

das Beispiel unserer Tagebuchaufzeichnung gerechnet werden. Setzt man allgemein

$$(3) \quad \begin{aligned} & c_0 x - c_1 x^2 + c_2 x^3 - c_3 x^4 + \dots \text{ in inf.} \\ &= \frac{1}{\frac{a_1}{x} + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\frac{a_3}{x} + \frac{1}{a_4 + \text{etc.}}}}} = \frac{b_0}{\frac{1}{x} + \frac{b_1}{1 + \frac{b_2}{\frac{1}{x} + \frac{b_3}{1 + \frac{b_4}{\frac{1}{x} + \text{etc.}}}}} \end{aligned}$$

so ist

$$(4) \quad b_0 = c_0 = \frac{1}{a_1}, \quad b_1 = \frac{1}{a_1 a_2}, \quad b_2 = \frac{1}{a_2 a_3}, \quad \dots, \quad b_m = \frac{1}{a_m a_{m+1}}, \quad \dots$$

und zur Bestimmung der a_2, a_3, \dots dienen die bekannten Formeln *)

$$(5) \quad a_{2n} = \frac{A_n^2}{B_n B_{n-1}}, \quad a_{2n+1} = \frac{B_n^2}{A_n A_{n+1}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

wo A_0, B_0 gleich 1 ist und für $n \geq 1$ die Determinantendarstellungen

$$(6) \quad A_n = |c_{i+k-2}|, \quad B_n = |c_{i+k-1}| \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

gelten. Für das GAUSSsche Beispiel, d. h. für

$$(7) \quad c_0 = 1, \quad c_k = 1(2-1)(2^2-1)\dots(2^k-1) \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

findet man **) die Werte

$$(8) \quad a_{2n} = \frac{1}{2^n - 1}, \quad a_{2n+1} = \frac{1}{2^n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

also in Übereinstimmung mit den Angaben von GAUSS:

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = 2, \quad b_3 = 6, \quad b_4 = 12, \quad b_5 = 28$$

und allgemein

$$b_{2n} = 2^{2n} - 2^n, \quad b_{2n+1} = 2^n(2^{2n+1} - 1).$$

*) Siehe z. B. T.-J. STIELTJES, *Recherches sur les fractions continues*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse 8, 1894, Abhandlung J., S. 26.

**) Die Berechnung der Determinanten A_n, B_n gestaltet sich am einfachsten, wenn man beachtet, daß für die Determinanten

$$(v, n) = |c_{v+i+k-2}| \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

die Rekursionsformel

$$(v, n) = c_v \cdot c_{n-1} 2^{(n-1)v} + \frac{1}{2} n(n-1) (v+1, n-1)$$

gilt, aus der sich sofort

$$(v, n) = c_v c_{v+1} \dots c_{v+n-1} c_{n-1} c_{n-2} \dots c_1 \cdot 2^{\frac{1}{2} n(n-1)} (n+v-1) - \frac{1}{6} (n-2)(n-1)n$$

ergibt. Man hat dann

$$A_n = (0, n), \quad B_n = (1, n).$$

Aus der Konvergenz der mit den Werten (8) gebildeten Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ folgt nach M. A. STERN *) die Divergenz des mit eben diesen Werten gebildeten Kettenbruchs für jeden Wert von $z = \frac{1}{x}$. Für $z = 1$ ergibt sich das GAUSSsche Beispiel. Da die a_k positiv sind, so ist auf den divergenten Kettenbruch die Theorie von STIELTJES **) anwendbar.

SCHLESINGER.

[8.]

Scalam simplicem in seriebus variatim recurrentibus esse functionem simplicem secundi ordinis scalarum componentium.

[1796] 26. Mai.

Bedeutet $G(x)$ eine ganze rationale Funktion von x von $(n-1)$ -tem oder niedrigerem Grade und entwickelt man

$$\frac{G(x)}{1 - a_1 x - a_2 x^2 - \dots - a_n x^n}$$

in die unendliche Reihe $s_0 + s_1 x + s_2 x^2 + \dots$, so ist

$$s_{n+t} = a_1 s_{n+t-1} + a_2 s_{n+t-2} + \dots + a_n s_t \quad (t = 0, 1, 2, \dots).$$

Eine solche Reihe nennt A. DE MOIVRE (*Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis*, Londini 1730, S. 27, siehe auch schon Philosophical Transactions, London 1722, S. 162) rekurrent und bezeichnet die Zahlen a_1, a_2, \dots, a_n als Index oder Scala relationis ***). Sowohl hier als auch in den Aufzeichnungen Nr. 10 und Nr. 20, die sich auf denselben Gegenstand beziehen, denkt sich GAUSS anscheinend den Nenner in Faktoren zerlegt und die zum Nenner gehörige einfache Skala aus den zu den Faktoren gehörigen Skalen komponiert. Hier in der Nr. 8, wo von einer Funktion zweiten Grades die Rede ist, hat er vermutlich die Zerlegung des Nenners in zwei Faktoren im Auge, wogegen sich die Nr. 20 auf den Fall von drei und mehr Faktoren beziehen könnte. Die Zerlegung des Nenners in ein Produkt von Faktoren ersten Grades und die Entwicklung der reziproken Werte dieser Faktoren in geometrische Reihen kommt im art. 1. der aus dem Nachlaß herausgegebenen *Theoria interpolationis methodo nova tractata* (Werke III, S. 265) vor. Ein Beispiel einer rekurrenten Reihe für $n = 2$, $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$ findet sich im art. 4. des nachgelassenen Bruchstücks *Grundbegriffe der Lehre von den Reihen* (oben S. 393).

KLEIN. LOEWY.

[9.]

Comparationes infinitorum in numeris primis et factoribus cont[entorum].

[1796] 31. Mai. G[ottingae]

Diese Aufzeichnung, sowie die Nr. 13 vom 19. Juni 1796 beziehen sich wohl auf die oben S. 11, 12 abgedruckten Eintragungen in SCHULZES *Tafeln*, die vom Mai 1796 datiert sind.

BACHMANN.

*) Siehe STERN, *Über die Kennzeichen der Convergenz eines Kettenbruchs*, CRELLES Journal für Mathem. 37, 1848, S. 255, besonders S. 260.

**) Siehe a. a. O. S. 36 ff.

***) Vergl. auch die Kapitel IV, XIII und XVII von EULERS *Introductio in analysin infinitorum* I,

[10.]

Scala ubi seriei termini sunt producta vel adeo functiones quaecun-
terminorum quotcunque serierum.

[1796] 3. Iun. G[ottingae]

Vergl. die Bemerkung zu der Nr. 8.

[11.]

Formula pro summa factorum numeri cuiusvis compositi:

$$\text{factum] gener[ale] } \frac{a^{n+1}-1}{a-1}.$$

[1796] 5. Iun. G[ottingae]

Diese Notiz spricht den Satz aus, daß wenn eine Zahl N in Primzahlpotenzen zerlegt gleich Πa^n ist, die Summe der Teiler von N durch das Produkt (factum)

$$\Pi \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

dargestellt wird.

BACHMANN.

[12.]

Periodorum summa omnibus infra modulum numeris pro elementis sumtis:

$$\text{fact[um] gen[erale] } ((n+1)a - na) a^{n-1}$$

[1796] 5. Iun. G[ottingae]

Der Ausdruck Periode hat hier sicher die gleiche Bedeutung wie in den *Disquisitiones arithmeticae*, art. 46, Werke I, S. 39. Ist N teilerfremd zu p und d der Exponent, zu dem N modulo p gehört oder allgemeiner, für den

$$N^d \equiv 1 \pmod{p}$$

wird, so nennt dort GAUSS die Potenzen

$$1, N, N^2, \dots, N^{d-1}$$

oder ihre Reste modulo p eine Periode. Die Wendung »omnibus infra modulum numeris pro elementis sumtis« zeigt, daß in unserer Aufzeichnung der Modulus p als Primzahl gedacht ist. Nun ist für die Summe aller dieser Perioden, auch wenn ihre einzelnen Glieder durch die Reste nach dem Modul p ersetzt werden, ein dem angedeuteten Produkte ähnlicher Ausdruck nicht vorhanden. Würde unter Periode nur die Anzahl ihrer Glieder verstanden, so wäre die periodorum summa, da $\varphi(d)$ Zahlen zum Exponenten d gehören, die auf alle Teiler d von $p-1$ bezogene Summe $\sum d \cdot \varphi(d)$, für die man, wenn in Primfaktoren zerlegt

$$p-1 = \Pi a^n$$

Lausannae 1748, wo MOIVRE angeführt und die Bezeichnung scala gebraucht wird, sowie desselben Verfassers *Institutiones calculi differentialis* I, 1755, § 46, L. EULERI Opera omnia, ser. I, vol. 10, S. 45.

gedacht wird, den Ausdruck

$$\prod \frac{a^{n+1} + 1}{a + 1}$$

erhält. Zieht man nur die voneinander verschiedenen Perioden in Betracht, so ergibt sich (siehe die vorhergehende Nr. 11)

$$\sum d = \prod \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1};$$

beides stimmt nicht. Nimmt man aber den Ausdruck Summa im Sinne von Gesamtheit oder Anzahl so besagte unsere Notiz nichts anderes als den Satz (*Disquis. arithm.* art. 39., Werke I, S. 31)

$$\sum \varphi(d) = p - 1 = \prod a^n,$$

was, wenn die Formel von GAUSS richtig geschrieben ist, mit ihr übereinstimmen würde; doch wäre dann die dem Faktor des Produkts gegebene Form sehr wunderlich.

Wahrscheinlich liegt aber hier ein Schreibfehler vor und der Faktor soll

$$((n + 1) a - n) a^{n-1}$$

lauten. Bildet man nämlich für alle Reste modulo p oder, was auf dasselbe hinauskommt, für alle Exponenten $k = 1, 2, \dots, p - 1$ und für eine primitive Wurzel g von p die Potenzen

$$1, g^k, g^{2k}, \dots, g^{(p-2)k},$$

so erscheint für die $\varphi(d)$ Werte von k , die teilerfremd sind zu dem Teiler d von $p - 1$, je eine d -gliedrige Periode $\delta = \frac{p-1}{d}$ mal, und man erhält so eine Summa — im Sinne von Gesamtheit oder Anzahl — von

$$\sum_{d \mid p-1} \varphi(d) \cdot \delta$$

Perioden. Hier ist aber

$$\begin{aligned} \sum_{d \mid p-1} \varphi(d) \cdot \delta &= (p-1) \prod \left(1 + \frac{a-1}{a} + \frac{a(a-1)}{a^2} + \dots + \frac{a^{n-1}(a-1)}{a^n} \right) = \prod a^n \cdot \prod \left(1 + n \frac{a-1}{a} \right) \\ &= \prod ((n + 1) a - n) a^{n-1}. \end{aligned}$$

BACHMANN.

[13.]

Leges distributionis.

[1796] 19. Iun. G[ottingae]

Vergl. die Bemerkung zu der Nr. 9.

[14.]

Factorum Summae in Infinito = $\frac{\pi\pi}{6}$. Sum[mam] Num[erorum].

[1796] 20. Iun. G[ottingae]

Vergl. die Notiz Nr. 31 vom 6. September 1796 und die oben S. 14 abgedruckte Aufzeichnung aus den *Exercitationes Mathematicae* sowie die zugehörigen Bemerkungen oben S. 17, 18.

KLEIN. BACHMANN.

[15.]

Coepti de multiplicatoribus (in formis divisorum form[aru]m qu[adrati-
carum]) connexis cogitare.

[1796] 22. Iun. G[ottingae]

Vergl. Werke I, S. 476, wo zur Überschrift der Sectio quinta der *Disquisitiones arithmeticae* »de formis aequationibusque indeterminatis secundi gradus« vermerkt ist: Inde a Iun. 22. 1796. Bezüglich der Begriffe »Multiplicatores connexi« und »Forma divisorum« vergl. die oben S. 80 abgedruckte Aufzeichnung, wo im ersten Satze von Formen der Divisoren und im art. 1. von verbundenen, im art. 4. von zusammenhängenden Multiplikatoren die Rede ist, sowie die zugehörigen Bemerkungen S. 83.

KLEIN. BACHMANN.

[16.]

Nova theorematis aurei demonstratio a priori toto coelo diversa eaque
haud parum elegans.

[1796] 27. Iun.

Vergl. Werke I, S. 476, Bemerkung zum art. 262. der *Disquisitiones arithmeticae*, wo indes als Datum für die Auffindung dieses zweiten Beweises des quadratischen Reziprozitätsgesetzes, in Übereinstimmung mit GAUSS' eigener Notiz in seinem Handexemplar der *Disquisitiones arithmeticae*, 1796, Juli 27. angegeben ist. Aus der Reihenfolge der Nummern 15, 16, 17 des *Tagebuchs* ergibt sich aber, daß Juli ein Schreibfehler ist. Wegen der Bezeichnung des Reziprozitätsgesetzes der quadratischen Reste als »theoremata aurea« vergl. den Artikel 17 des Aufsatzes »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten«, Werke X2, S. 44, 45.

KLEIN. BACHMANN.

[17.]

Quaeque partitio numeri a in tria \square dat formam in tria \square separabilem.

[1796] 3. Iul.

Man vergl. zu dieser und zu der folgenden Nr. 18 die oben S. 78 abgedruckte Aufzeichnung aus dem LEISTE, ferner den Artikel 12 des Aufsatzes »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten«, Werke X2, S. 29, 30. Unter dem Zeichen \square ist Quadratzahl bezw. Quadrat einer Linearform, unter Forma ohne Zweifel binäre quadratische Form zu verstehen; somit weist diese Notiz schon auf die allgemeinen Ergebnisse hin, die im art. 280. der *Disquisitiones arithmeticae*, Werke I, S. 318 dargestellt sind.

BACHMANN.

[18.*]

$$\text{EYPHKA! num[erus] = } \Delta + \Delta + \Delta.$$

[1796] 10. Iul. Gott[ingae]

Vergl. die Bemerkung zu der Nr. 17; es soll zum Ausdruck gebracht werden, daß jede Zahl als Summe von drei Dreieckszahlen dargestellt werden kann.

KLEIN. BACHMANN.

[19.]

Determinatio EULERIANA formarum in quibus numeri compositi plus una vice continentur.

[1796 Iul. Gottingae]

Gemeint sind hier jedenfalls die Methoden, die EULER für die Entscheidung der Frage angegeben hat, ob eine vorgegebene Zahl von der Form $4n + 1$ eine Primzahl ist oder nicht; siehe die §§ 40—43 der Abhandlung *De numeris, qui sunt aggregata duorum quadratorum*, Novi Comm. Acad. Petropol. 4 (1752/53) 1758, S. 3—40, insbesondere S. 29 ff.**) und *Extrait d'une lettre de M. Fuss à M. Béguelin*, Nouv. Mémoires de l'Académie de Berlin (1776) 1779, S. 340—346***). Im LEISTE finden sich an mehreren Stellen nach diesen Methoden ausgeführte Rechnungen, so heißt es z. B. bei S. 48:

[*] Zwischen den Notizen Nr. 17 und Nr. 18 steht in der Handschrift noch eine Aufzeichnung, die GAUSS durchstrichen hat und die darum nur schwer lesbar ist (vergl. die Nachbildung). Sie lautet wie folgt:]

[17a.]

Summa trium quadratorum continue proportionalium numquam primus esse potest: conspicuum exemplum novimus et quod congruum videtur. Confidamus.

[1796] 9. Iul.

Wenn die drei Quadrate ganzer Zahlen x^2, y^2, z^2 in laufender Proportion stehen, so ist

$$x : y : z = 1 : \frac{m}{n} : \frac{m^2}{n^2}.$$

Als Summe der drei Quadrate ergibt sich also die zerlegbare Form

$$m^4 + m^2 n^2 + n^4 = (m^2 + mn + n^2)(m^2 - mn + n^2),$$

die im allgemeinen keine Primzahl darstellt. Vielleicht hat GAUSS zunächst die Möglichkeit

$$m^2 + mn + n^2 = p, \quad m^2 - mn + n^2 = 1$$

übersehen, die für $m = n = 1, p = 3$ eintritt. Bei dem »conspicuum exemplum« war wohl für m oder n eine von Eins verschiedene ganze Zahl genommen worden.

BACHMANN.

**) L. EULERI Opera omnia, series I, vol. 2, S. 295. Vergl. auch noch die Abhandlung *Quomodo numeri praemagni sint explorandi, utrum sint primi nec ne*, Novi Comm. Acad. Petrop. 13 (1768) 1769, S. 67—88, Opera omnia, ser. I, vol. 3, S. 112.

***) L. EULERI Opera omnia, ser. I, vol. 3, S. 421; diese Note ist ein ausführlicher Bericht über den

Discerpend. 283 009 in bina quadrata

$$4225 + 528^2,$$

also Primzahl.

STÄCKEL. SCHLESINGER.

[20.]

Principia componendi scalas serierum variatim recurrentium.

[1796] 16. Jul. Gott[ingae]

Vergl. die Bemerkung zu der Nr. 8. Daß GAUSS sich auch noch im folgenden Monat mit rekurrenten Reihen beschäftigt hat, zeigt der vom 28. August 1796 datierte art. [3.] der *Exercitationes mathem.*, oben S. 139.

LOEWY.

[21.]

Methodus EULERIANA pro demonstranda relatione inter rectangula sub segmentis rectorum sese secantium in sectionibus conicis ad omnes curvas applicata [*].

[1796] 31. Jul. Gott[ingae]

EULER gibt in der *Introductio in analysin infinitorum*, Lausannae 1748, II, § 92, 93 einen einfachen Beweis für den im wesentlichen schon von APOLLONIUS (Buch 3, § 17, 19, 22) erkannten Satz: Werden durch einen Punkt O zwei Geraden gezogen, die einen Kegelschnitt in den Punkten A, B und A', B' treffen, so hat, wenn nur die Geraden ihre Richtung beibehalten, das Verhältnis der Produkte $OA \cdot OB$ und $OA' \cdot OB'$ für alle Lagen von O denselben Wert. Daß der Beweis sich auf Kurven höherer Ordnung übertragen läßt, ist EULER nicht entgangen; an einer spätern Stelle der *Introductio* hat er dies für die Kurven dritter Ordnung ausführlich dargelegt und sagt dann (§ 247): *Atque similis proprietatis in lineas quarti, quinti atque superiorum ordinum competet.*

STÄCKEL.

[22.]

$$a^{2^n - 1} \equiv 1 \pmod{p} \text{ semper solvere in potestate.}$$

[1796] Aug. 3. Gott[ingae]

Diese Aufzeichnung besagt vermutlich, daß GAUSS, wenn p eine Primzahl von der Form $2^n - 1$ ist, die Funktion $x^p - 1$ in Bezug auf einen Primzahlmodul in ihre Primfunktionfaktoren zu zerlegen vermochte. Vergl. *Analysis Residuorum*, Werke II, S. 229 und S. 199—211; S. 209 wird der Fall $p = 31 = 2^5 - 1$ modulo 331 behandelt.

BACHMANN.

Inhalt der erst nach EULERS Tode veröffentlichten, 1801 erschienenen Abhandlung *De formulis speciei $mxx + nyy$ ad numeros primos explorandos idoneis, earumque mirabilibus proprietatibus*, Nova Acta Acad. Petrop. 12 (1794) 1801, S. 22—46, die also GAUSS im Juli 1796 nicht gekannt haben kann.

[*] In der Handschrift steht applicatum.]

[23.]

Rationem theorematis aurei quomodo profundius perscrutari oporteat perspexi et ad hoc accingor supra quadraticas aequationes egredi conatus. Inventio formularum, quae semper per primos: $\sqrt[n]{1}$ (numerice) dividi possunt.

[1796] Aug. 13. Ibid. [Gottingae]

Siehe Werke II, S. 230. Gemeint sind die Ausdrücke $x^n - 1$, für die $p^n \equiv 1 \pmod{\pi}$. — Im letzten Satze des Textes hat die Handschrift qui statt quae.

BACHMANN.

[24.]

Obiter $(a + b\sqrt{-1})^{m+n}\sqrt{-1}$ evolutum.

[1796 Aug.] 14.

Bei S. 111 des LEISTE steht eine Aufzeichnung: »Canon quantitatum imaginariarum exponentialium« mit Ausdrücken für $a^{\sqrt{-1}}$ und $(a + b\sqrt{-1})^n \sqrt{-1}$.

SCHLESINGER.

[25.]

Rei summa iam iam intellecta. Restat ut singula muniantur.

[1796 Aug.] 16. G[ottingae]

Da diese Aufzeichnung, ebenso wie die Nummern 22, 23, 26, 27, in der Handschrift rot (in der Nachbildung im Halbton) unterstrichen ist, bezieht sie sich wahrscheinlich auf einen der in den genannten Nummern behandelten arithmetischen Gegenstände, während die Nr. 24 nur eine gelegentlich (obiter) gemachte Bemerkung darstellt.

SCHLESINGER.

[26.]

$(a^p) \equiv (a) \pmod{p}$, a radix aequationis cuiusvis quomodocunque irrationalis.

[1796 Aug.] 18. [Gottingae]

Es ist dies der Satz, der im art. 350. der *Analysis Residuorum*, Werke II, S. 224, in der Form

$$(P, \rho^p) \equiv P \pmod{\tau}$$

ausgesprochen ist. Es bedeutet also hier (a) eine ganze rationale Funktion von x , die für $x = a$ verschwindet, und entsprechend (a^p) die Funktion, deren Wurzeln die p -ten Potenzen der Wurzeln der ersten Funktion sind; p Primzahl.

DEDEKIND. BACHMANN.

63*

[27.]

Si P, Q functiones alg[ebricae] quantitatis indeterminatae fuerint inc[ognitae]. Datur:

$$tP + uQ = 1$$

in algebra tum speciata tum numerica.

[1796 Aug.] 19. G[ottingae]

Siehe für die algebra numerica (Zahlentheorie) *Analysis Residuorum*, art. 335., Werke II, S. 215, für die algebra speciata oder speciosa (Buchstabenrechnung) *Demonstratio nova etc.*, 1816, art. 2., Werke III, S. 35.

KLEIN. BACHMANN.

[28.]

Exprimuntur potestates radicum aequationis propositae aggregatae per coefficientes aequationis lege perquam simplici (cum aliis quibusdam geometricis] in Exerc[itationibus]).

[1796 Aug.] 21. G[ottingae]

Vergl. die Bemerkung zu der Nr. 6, oben S. 490. Der art. [2.] der dort angeführten Leisteaufzeichnung (oben S. 128) zeigt, daß es sich hier um die explizite Darstellung der Potenzsummen der Wurzeln durch die Koeffizienten einer algebraischen Gleichung handelt. Für $n = 1, 2, 3, 4$ finden sich diese Formeln bei ALBERT GIRARD in der *Invention nouvelle en l'Algebre*, Amsterdam 1629 (neue Ausgabe Leyden 1884), die allgemeine Darstellung mit dem von GAUSS gefundenen Bildungsgesetz gibt WARING in den *Miscellanea analytica de aequationibus algebraicis etc.*, Cambridge 1762*). In EULERS *Introductio in analysin infinitorum*, Lausannae 1748, Liber I, § 166, S. 128 findet man bloss die NEWTONSchen Formeln, die keine independente, sondern nur eine rekurrente Darstellung der Potenzsummen geben. In der Abhandlung *Observationes circa radices aequationum**)* hat auch EULER eine independente Darstellung der Potenzsummen abzuleiten versucht, doch ist er zu keinem so übersichtlichen Bildungsgesetz gelangt, wie es bei WARING und GAUSS vorliegt. Wie wenig bekannt WARINGS Darstellung geblieben war, geht u. a. daraus hervor, daß von ihr in KLÜGELS *Mathematischem Wörterbuch* I, Leipzig 1803, wo S. 467 und 507 (fälschlich als 495 numeriert) von den NEWTONSchen und den expliziten GIRARDSchen Formeln gehandelt wird, nicht die Rede ist. Auch die im art. [1.] der Leisteaufzeichnung (oben S. 127) angegebene explizite Darstellung der Gleichungskoeffizienten durch die Potenzsummen findet sich bei WARING a. a. O., und zwar gibt WARING die allgemeinen Formeln für ein beliebiges n , während GAUSS sich auf die vier ersten Koeffizienten beschränkt.

Die in unserer Tagebuchnotiz erwähnten *Exercitationes Mathematicae*, die oben S. 138 abgedruckt sind, haben bei den artt. [1.], [2.] in der Tat dieselbe Zeitangabe, 21. August 1796.

LOEWY.

*) Vergl. hierzu L. SAALSCHÜTZ, *Bibliotheca mathematica* (3) 9, 1908, S. 65.

***) *Novi Comm. Acad. Petrop.* 15 (1770) 1771, S. 51.

[29.]

Summatio Seriei infinitae

$$1 + \frac{x^n}{1 \dots n} + \frac{x^{2n}}{1 \dots 2n} \text{ etc.}$$

eod[em die, 1796 Aug. 21.]

Die Reihe befriedigt die Differentialgleichung

$$\frac{d^n u}{dx^n} = u$$

mit den Anfangsbedingungen, daß für $x = 0$, $u = 1$ und die $n-1$ ersten Derivierten gleich Null sind. Daraus ergibt sich

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{rn}}{(rn)!} = \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^n e^{x \left(\cos \frac{2\alpha\pi}{n} + i \sin \frac{2\alpha\pi}{n} \right)}$$

vergl. die Bemerkung zum art. [9.] der *Exercitationes mathematicae*, oben S. 143, 144. Über Funktionen dieser Art, die HOENE-WRONSKI (*Philosophie des Mathématiques*, Paris 1811) als Sinus bzw. Kosinus höherer Ordnung bezeichnet hat, gibt es eine umfangreiche Literatur, die bei S. GÜNTHER, *Die Lehre von den . . . Hyperbelfunktionen*, Halle 1881, und bei K. WALLNER, Programm der K. Realschule Rothenburg o. T. 1913, zusammengestellt ist.

SCHLESINGER.

[30].

Minutiis quibusdam exceptis feliciter scopum attingi scil[icet] si

$$p^n \equiv 1 \pmod{\pi},$$

fore $x^\pi - 1$ compositum e factoribus gradum n non excedentibus et proin aequationem conditionalem fore solubilem; unde duas theor[ematis] aurei demonstr[ationes] deduxi.

[1796] Sept. 2. G[öttingae]

Siehe *Analysis Residuorum* art. 360., Werke II, S. 230, sowie die Tagebuchnotizen Nr. 23 vom 13. August 1796 und Nr. 68 vom 21. Juli 1797. Die aequatio conditionalis ist vermutlich dieselbe, die GAUSS sonst aequatio auxiliaris genannt hat, vergl. *Analysis Residuorum* artt. 365. und 366., Werke II, S. 233, 234, wo sich die beiden Beweise des »theorematis aurei« finden. Die Minutia excepta sind die am Ende des art. 363., Werke II, S. 232 erwähnten Schwierigkeiten, die erst in der Tagebuchnotiz Nr. 68 als behoben angemerkt werden.

DEDEKIND BACHMANN.

[31.]

Numeros fractionum inaequalium quarum denominatores certum limitem non superant ad numerum fractionum omnium quarum num[eratores] aut denom[inatores] sint diversi infra eundem limitem in infinito ut 6: $\pi\pi$.

[1796] Sept. 6.

Vergl. die Bemerkung zu der Nr. 14, oben S. 495.

[32.]

Si $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^6}}$ stat[uatur] $\Pi: x = z$ et $x = \Phi: z$, erit

$$\Phi: z = z - \frac{1}{8} z^4 + \frac{1}{112} z^7 - \frac{1}{1792} z^{10} + \frac{3}{1792 \cdot 52} z^{13} - \frac{3 \cdot 185}{1792 \cdot 52 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16} z^{16} \dots$$

[1796] Sept. 9.

Vergl. den art. [5.] der *Exercitationes mathematicae*, oben S. 140 und die zugehörige Anmerkung S. 144. Im Zähler des Koeffizienten von z^{16} muß es statt 185 heißen 165 *). Das hier betrachtete Integral kommt auch in der oben S. 152 abgedruckten Leisteaufzeichnung vor. In der Werke VIII, S. 93 abgedruckten, aus dem Jahre 1800 stammenden Aufzeichnung untersucht GAUSS die Umkehrung des Integrals $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$. Vergl. auch die folgende Notiz Nr. 33.

SCHLESINGER.

[33.]

Si

$$\Phi: \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} = x$$

erit:

$$\Phi: z = z - \frac{1 \cdot z^n}{2 \cdot n + 1} A + \frac{n-1 \cdot z^n}{4 \cdot 2n+1} B - \frac{nn-n-1 \cdot [z^n]}{2 \cdot n+1 \cdot 3n+1} C \dots$$

[1796] Sept. 14.

Hier bedeutet (vergl. die Bemerkung zum art. [5.] der *Exercitationes mathematicae*, oben S. 144) A das erste Glied der Reihe, also z , B das zweite, also $+\frac{1 \cdot z^n}{2(n+1)} \cdot z$, C das dritte, also $\frac{(n-1)z^n}{4(2n+1)} \cdot \frac{1 \cdot z^n}{2(n+1)} \cdot z$ u.s.w. Diese Schreibweise wird auf NEWTON zurückgeführt. Für $n = 3$ ergeben sich die in der vorhergehenden Nummer betrachteten Ausdrücke.

SCHLESINGER.

*) Der Koeffizient von z^{16} lautet nämlich, vergl. S. 140 letzte Zeile

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}$$

[34.]

Methodus facilis inveniendi aeq[uationem] in y ex aeq[uatione] in x , si ponatur:

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} \dots = y.$$

[1796 Sept. 16.]

GAUSS hat wohl die sogenannte TSCHIRNHAUSENSCHE Transformation im Auge: Aus einer Gleichung: $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + M = 0$ soll die transformierte Gleichung in y abgeleitet werden, wenn $y = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \dots$ ist. Es könnte dann mit der bequemen Methode, die Gleichung in y zu finden, die mittels der Potenzsummen gemeint sein, die für den besondern Fall $y = x^r$ im art. 348. der *Analysis Residuorum*, Werke II, S. 223 als Solutio prima auseinandergesetzt ist. Man hätte so eine unmittelbare Anknüpfung an die Notiz Nr. 28 vom 21. August 1796.

LOEWY.

[35.]

Fractiones quarum denominator continet quantitates irrationales (quomodocunque?) in alias transmutare ab hoc incommodo liberatas.

[1796] Sept. 16.

Vermutlich handelt es sich um die Umwandlung einer gebrochenen rationalen Funktion einer Wurzel einer algebraischen Gleichung in eine ganze rationale Funktion dieser Wurzel. Ausführlich behandelt GAUSS die »principia talis transformationis, quum in libris algebraicis non inveniuntur« im art. 11. der *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi* (Werke III, S. 177). Auf die Möglichkeit einer solchen Umwandlung wird auch schon im art. 360. III der *Disquisitiones arithmeticae* (Werke I, S. 453) hingewiesen.

LOEWY.

[36.]

Coefficientes aeq[uationis] auxiliae eliminationi inservientis ex radicibus aeq[uationis] datae determinati.

eod[em die, 1796 Sept. 16.]

Vermutlich hängt diese Aufzeichnung mit den Untersuchungen über Elimination zusammen, von denen in der Aufzeichnung Nr. 89 des *Tagebuchs* vom Juni 1798 die Rede ist.

LOEWY.

[37.]

Nova methodus qua resolutionem aequationum universalem investigare forsitanque invenire licebit. Scil[icet] transm[utetur] aeq[uatio] in aliam, cuius

radices

$$\alpha\rho' + \beta\rho'' + \gamma\rho''' + \dots,$$

ubi

$$\sqrt[n]{1} = \alpha, \beta, \gamma \text{ etc.}$$

et n numerus aequationis gradum denotans.

[1796] Sept. 17.

Diese Aufzeichnung zeigt, daß GAUSS mit Hilfe der sogenannten LAGRANGESchen Resolvente*) die algebraische Auflösbarkeit der allgemeinen algebraischen Gleichung untersucht und damals noch an die Möglichkeit gedacht hat, die Auflösung auf diese Weise auch wirklich zu finden. Daß GAUSS sich viel mit dieser Frage beschäftigt hat, geht aus einer Stelle des nicht veröffentlichten Teiles des Caput sextum der *Analysis Residuorum****) hervor, wo es im art. 262. heißt:

Post illustrissimorum Geometrarum labores repetitos nulla spes superesse videtur Aequationum solutionem generalem possibilem esse (i. e. reductionem ad aequationes puras †)). Sed tamen maxime est memorabile, aequationes omnes, ad quas solutio aequationis $x^n = 1$ ducit, resolvi sive ad puras eiusdem gradus reduci posse

†) Nos etiam huic rei multum operae impendimus; et tantum non de impossibilitate sumus certi. Forsan, quae in hoc genere meditati sumus et quae forsitan ad demonstrationem rigorosam huius impossibilitatis ducere possunt, alia occasione publici iuris faciemus.

*) Siehe LAGRANGE, *Réflexions sur la résolution algébrique des équations*, Nouveaux Mémoires de l'Académie, année 1770, Berlin 1772, S. 134 und *Suite des réflexions etc.*, ebenda, année 1771, Berlin 1773, S. 138, besonders S. 163 der *Suite*, Oeuvres III, S. 331. Eine deutsche Übersetzung beider Teile dieser Abhandlung findet sich in *Leonh. Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen*, . . . übersetzt und mit . . . Zusätzen begleitet von J. A. CHR. MICHELSEN, 3. Buch: *Die Theorie der Gleichungen aus den Schriften der Hrn. Euler und de la Grange*, Berlin 1791, S. 271 ff.; der zweite Teil beginnt auf S. 378. GAUSS hat das MICHELSENSche dritte Buch spätestens im April 1797 gekannt, da er es in der Abhandlung *Neuer Beweis des Lagrangischen Lehrsatzes* (Werke VIII, S. 76) anführt, die er etwa im April 1797 (nämlich dritthalb Jahre vor dem 8. Oktober 1799, siehe den Brief an HINDENBURG von diesem Tage, oben S. 429) durch KAESTNER hat an HINDENBURG senden lassen; vergl. auch die Tagebuchnotiz Nr. 49 vom 27. Dezember 1796. Die Arbeit von LAGRANGE, *Réflexions sur la résolution etc.*, von der hier die Rede ist, meint PFAFF in dem oben S. 101 abgedruckten Briefe, wenn er S. 104, Zeile 5, 4 v. u. von »der früheren Abhandlung von LA GRANGE, die bekanntlich auch von MICHELSEN deutsch übersetzt ist« spricht.

**) Über diese Handschrift (Ea 9, Kapsel 40) vergleiche man die Bemerkungen, die R. DEDEKIND dem Abdruck zweier Abschnitte, Werke II, S. 240 hinzugefügt hat, und den Artikel 2 von P. BACHMANN'S Aufsatz »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten«, Werke X 2, S. 6; danach ist das 6. Kapitel der *Analysis Residuorum* vermutlich vor dem 20. Juli 1797 verfaßt worden.

Diese Stelle zeigt auch, daß GAUSS schon im Jahre 1797 zu der Überzeugung gelangt war, die allgemeine algebraische Gleichung sei durch Wurzelzeichen nicht auflösbar; öffentlich ausgesprochen hat er diese Überzeugung erst im art. 9. der *Inauguraldissertation* (1799, Werke III, S. 17) und im art. 359. der *Disquisitiones arithmeticae* (1801, Werke I, S. 449).

Die Anwendung der LAGRANGESchen Resolvente auf die Kreisteilungsgleichung (siehe *Disquisitiones arithmeticae* art. 360., Werke I, S. 450) ist erst in den Tagebuchnotizen Nr. 65 und Nr. 66 vom Juli 1797 angezeigt.

LOEWY.

[38.]

In mentem mihi venit radices aeq[uationis] $x^n - 1 [= 0]$ ex aeq[uationibus] communes radices habentibus elicere ut adeo plerumque tantum aequationes coefficientibus rationalibus gaudentes resolvi oporteat.

[1796] Sept. 29. Bruns[vigae*]

Wahrscheinlich hat GAUSS hier die Zurückführung der Auflösung der Gleichung $x^n = 1$ auf

$$x^{a^a} = 1, x^{a'^{a'}} = 1, x^{a''^{a''}} = 1, \dots$$

im Auge, wenn $n = a^a \cdot a'^{a'} \cdot a''^{a''} \dots$ ist und a, a', a'', \dots lauter verschiedene Primzahlen bedeuten, vergl. *Disquisitiones arithmeticae*, art. 336. (Werke I, S. 413) und art. 368. (Werke I, S. 463); hier ist auch noch weiter von der Zurückführung der Gleichungen die Rede, deren Grad eine Primzahlpotenz ist, auf solche vom Primzahlgrad, was aber die Kenntnis der Lösungen von $x^a = 1, x^{a'} = 1, x^{a''} = 1, \dots$, also die Einführung von Irrationalitäten erfordert. Vergl. auch den ersten Absatz des art. [2.] des nachgelassenen Bruchstücks *Über die Unzerlegbarkeit der Kreisteilungsgleichung*, oben S. 118**), und besonders den art. 238. des aus dem Jahre 1797 stammenden 6. Kapitels der *Analysis Residuorum*, Werke II, S. 199.

LOEWY.

[39.]

Aequatio tertii gradus est haec:

$$x^3 + xx - nx + \frac{nn - 3n - 1 - mp}{3} = 0,$$

ubi $3n + 1 = p$ et m numerus resid[uorum] cubic[orum] similes sui excipientes. Unde sequitur si $n = 3k$, fore $m + 1 = 3l$; si $n = 3k \pm 1$, fore $m = 3l$.

[*] Zwischen dem 17. und dem 29. September 1796 scheint GAUSS von Göttingen nach Braunschweig abgereist zu sein. Es wären dann die Tagebuchnotizen Nr. 4 bis Nr. 37 in Göttingen geschrieben; bei der Nr. 38 beginnt auch andere Tinte.]

***) Die Angabe von GAUSS oben S. 118 Zeile 7 v. u., die Zahlen β, β', \dots seien Divisoren von

$$a^{\alpha-1}(a-1), a'^{\alpha'-1}(a'-1), \dots$$

trifft nicht zu, es kommen vielmehr für β nur die $a^{\alpha-1}(a-1)$ Zahlen in Frage, die kleiner als a^α und zu a^α teilerfremd sind, und entsprechend für β', β'', \dots .

Sive

$$z^3 - 3pz + pp - 8p - 9pm = 0.$$

Hoc [modo] m penitus determinatum, $m + 1$ semper $\square + 3\square$.

[1796] Octob. 1. Bruns[vigae]

Es bedeutet hier m die Anzahl der Lösungen der Kongruenz

$$1 + g^{3t} \equiv g^{3z} \pmod{p},$$

also dasselbe, was im art. 358. der *Disquisitiones arithmeticae*, Werke I, S. 445 mit $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}) = a - 1$ bezeichnet wird*). Setzt man ferner, unter Beibehaltung der dortigen Zeichen k, a, b, c , $k = 2a - b - c$, so ist

$$m = \frac{k + n}{3} - 1.$$

Die erste der obigen Gleichungen nimmt dann die Gestalt an

$$x^3 + x^2 - nx - \frac{1}{3}(kp + n) = 0$$

und geht durch die Substitution $z = 3x + 1$ in die zweite Gleichung über. Da zudem nach art. 358. der *Disquisitiones arithmeticae*, Werke I, S. 447, Gleichung II,

$$m + 1 = \frac{k + n}{3} = a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc$$

ist, so folgt

$$\begin{aligned} 4(m + 1) &= (2a - b - c)^2 + 3(b - c)^2, \\ &= (2b - a - c)^2 + 3(a - c)^2 \\ &= (2c - a - b)^2 + 3(b - c)^2. \end{aligned}$$

Da nach Werke I, S. 447, Gleichung I, $a + b + c = n$, also gerade ist, so ist eine der Zahlen a, b, c , etwa a , und die Summe und die Differenz der beiden andern, $b \pm c$, gerade, also

$$m + 1 = \left(a - \frac{b + c}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{b - c}{2}\right)^2.$$

Die zweite Gleichung hat GAUSS auch in sein Exemplar von LAMBERTS *Tabellen*, S. 223 eingeschrieben, und zwar in der Form

$$z^3 - 3pz - p(9a - (p + 1)) [= 0]$$

mit der Angabe

$$4p = 3NN + (9a - p - 1)^2;$$

hier haben p, a die obige Bedeutung und man hat, wie aus den sieben letzten Zeilen von S. 447, Werke I hervorgeht, $N = 3(b - c)$ zu nehmen. Beispiele findet man in der oben S. 111 abgedruckten Leistezeichnung. Vergl. auch die Tagebuchnotiz Nr. 67 vom 20. Juli 1797, ferner den Artikel 15 des BACHMANNschen Aufsatzes, Werke X 2, S. 39.Im Texte muß es statt *excipientes* wohl heißen *excipientium*.

KLEIN. BACHMANN.

*) Die dort mit n, m bezeichneten Größen heißen in unserer Tagebuchnotiz p, n .

[40.]

Aequationis

$$x^p - 1 = 0$$

radices per integros multiplicatae aggregatae cifram producere non possunt.

[1796] ⊙ Oct. 9. Brunsv[igae]

Wenn p eine Primzahl ist, so bedeutet die Aussage, daß die primitiven Wurzeln von $x^p - 1 = 0$ mit ganzen Zahlen multipliziert nicht die Summe Null geben können, die Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung; siehe den art. 341. der *Disquisitiones arithmeticae*, Werke I, S. 417. Für einen zusammengesetzten Exponenten vergleiche man die Tagebuchaufzeichnung Nr. 136 vom 12. Juni 1808.

BACHMANN.

[41.]

Quaedam sese obtulerunt de multiplicatoribus aequationum, ut certi termini eiiciantur, quae praeclara pollicentur.

[1796] ⊙ Oct. 16. Bruns[vigae]

Unter multiplicatores versteht GAUSS hier wohl Transformationen, möglicherweise TSCHIRNHAUSENSCHE, also solche von der in der Nr. 34 betrachteten Form. Man hätte dann die vorliegende Aufzeichnung auf die Beseitigung gewisser Gleichungskoeffizienten durch TSCHIRNHAUSENSCHE Transformationen zu beziehen. Die Wendung »praeclara pollicentur« scheint anzudeuten, daß die Frage nach der Auflösbarkeit der allgemeinen Gleichung durch Wurzelgrößen das Ziel dieser Untersuchungen gebildet habe, und die beiden folgenden, für sich nicht zu deutenden Nummern 42, 43 können Fortschritte auf dem hier eingeschlagenen Wege ankündigen. Die rote Unterstreichung in der Handschrift würde dann auf die in der Bemerkung zu der Nr. 37 genannten Veröffentlichungen in der *Dissertation* und in den *Disquisitiones arithmeticae* zu beziehen sein.

LOEWY.

[42.]

Lex detecta: quando et demon[stra]ta erit systema ad perfectionem evexerimus.

[1796] Oct. 18. Brunsv[igae]

[43.]

Vicimus GEGAN.

[1796] Oct. 21 Bruns[vigae]

64*

[44.]

Formula interpolationis elegans.

[1796] Nov. 25. G[ottingae]

GAUSS hat vielleicht hier die sogenannte LAGRANGESche Interpolationsformel gemeint. Sie findet sich in LAGRANGES *Leçons élémentaires sur les mathématiques* (Oeuvres de LAGRANGE VII, S. 286), die nach den Angaben in den Oeuvres zuerst in den zwei Ausgaben der Séances des Écoles normales, an III (1794—1795) erschienen sind und dann wieder im Journal de l'École Polytechnique, tome 2 (1812) abgedruckt wurden. Vorher war übrigens schon WARING zu dieser Formel gelangt. (Vgl. A. VON BRAUNMÜHL, *Bibliotheca mathematica* (3) 2, 1904, S. 95 und 96). Bei GAUSS steht die fragliche Formel in der aus seinem Nachlaß herausgegebenen Abhandlung *Theoria interpolationis methodo nova tractata* (Werke III, S. 273), deren erster Entwurf nach SCHERING (ebenda, S. 328) aus dem Jahre 1805 zu stammen scheint. Auch in dem Aufsatz *Über Interpolation* von J. F. ENCKE (Berliner Astronomisches Jahrbuch, 1830, Ges. math. u. astron. Abhandlungen, Berlin 1888, S. 4), der aus den bei GAUSS im Jahre 1812 gehörten Vorlesungen hervorgegangen ist, spielt die Interpolationsformel eine grundlegende Rolle; endlich findet sie sich im art. 7. der Abhandlung *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi* (1814, Werke III, S. 172).

LOEWY.

[45.]

Incepi Expressionem

$$1 - \frac{1}{2^\omega} + \frac{1}{3^\omega} \dots$$

in seriem transmutare secundum potestates ipsius ω progredientem.

[1796] Nov. 26. G[ottingae]

Mit der hier von GAUSS betrachteten Reihe hat sich EULER in der Arbeit, *Histoire de l'Académie Berlin*, 17 (1761) 1768, *Mémoires*, S. 83 beschäftigt (vergl. E. LANDAU, *Bibliotheca mathem.* (3) 7, S. 69). Daß diese Reihe nur dann unbedingt konvergiert, wenn der reelle Teil von ω , $\Re(\omega)$, größer ist als Eins, daß sie ferner, wie unsere Tagebuchnotiz angibt, in eine gewöhnliche Potenzreihe von ω verwandelt werden kann und daß diese Potenzreihe dann beständig konvergent ist, folgt aus RIEMANN'S Abhandlung, *Monatsberichte der Berliner Akademie* 1859, S. 671, *Werke*, 2. Aufl. 1892, S. 145. Nach neueren Untersuchungen ist die ursprüngliche Reihe für $0 < \Re(\omega) \leq 1$ bedingt konvergent.

SCHLESINGER.

[46.]

Formulae trigonometricae per series expressae.

[1796] per Dec.

[47.]

Differentiationes generalissimae.

[1796] Dec. 23.

Es handelt sich jedenfalls um die Differentiation mit einem Index, der keine positive ganze Zahl ist.

Versuche, die sich auf solche Verallgemeinerungen beziehen, finden sich schon bei LEIBNIZ in verschiedenen Briefen*). GAUSS hat wohl an EULER angeknüpft, siehe dessen Abhandlung *De progressionibus transcendentibus etc.*, Comm. Acad. Petrop. 5 (1730/31) 1738, S. 36, besonders S. 55. Im Nachlaß von GAUSS findet sich keine Spur dieser Untersuchungen.

SCHLESINGER.

[48.]

Curvam parabolicam quadrare suscepi, cuius puncta quotcunque dantur.

[1796] Dec. 26.

Hierher gehörige Formeln finden sich bei S. 13 des LEISTE.

KLEIN.

[49.]

Demonstrationem genuinam theorematum LA GRANGIANI detexi.

[1796] Dec. 27.

Aus dem oben S. 429 abgedruckten Briefe von GAUSS an C. F. HINDENBURG vom 8. Oktober 1799 geht hervor, daß GAUSS etwa im April 1797 einen Aufsatz mit seinem Beweise des LAGRANGESchen Lehrsatzes durch KAESTNER an HINDENBURG hat senden lassen, damit dieser den Aufsatz in seinem Archiv der reinen und angew. Mathematik veröffentliche. Die Veröffentlichung ist unterblieben und, wie SARTORIUS v. WALTERSHAUSEN*) berichtet, »kam das eingesandte Manuskript nie wieder zum Vorschein«. Es befindet sich jedoch im GAUSSARCHIV eine Handschrift dieses Beweises, die Werke VIII, S. 76 abgedruckt ist. Eine etwas andere Darstellung desselben Beweises mit weniger Text ist im LEISTE neben den Druckseiten 10—12 aufgezeichnet. Vergl. auch die Nr. 86 vom Mai 1798.

KLEIN. SCHLESINGER.

[50.]

$$\left. \begin{aligned} \int \sqrt{\sin x} \cdot dx &= 2 \int \frac{yy \, dy}{\sqrt{(1-y^4)}} \\ \int \sqrt{\tan x} \cdot dx &= 2 \int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^4)}} \\ \int \sqrt{\frac{1}{\sin x}} \cdot dx &= 2 \int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^4)}} \end{aligned} \right\} yy = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

1797 Ian. 7.

Zu dem ersten und dritten der hier auftretenden Integrale vergl. die in dem Abschnitt [I.] der *Ältesten Untersuchungen über lemniskatische Funktionen* art. [1.], S. 145 und art. [3.], S. 146 wiedergegebenen

*) Eine Zusammenstellung der einschlägigen Briefstellen gibt C. W. BORCHARDT in BONCOMPAGNIS *Bulletino di bibliografia* 2, 1889, S. 277, Ges. Werke, 1898, S. 486.

**) *Gauss zum Gedächtniss*, 1856, S. 22; einige irrtümliche Angaben, die sich an dieser Stelle finden, sind schon oben S. 444 berichtigt worden.

Leisteaufzeichnungen, sowie die dazugehörigen Bemerkungen S. 149, wo auch Literaturnachweise gegeben sind. Das zweite Integral ist ein besonderer Fall des in der Nr. 53 vom 12. Januar 1797 aufgezeichneten Integrals $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$, das durch die Substitution *) $z^n = \frac{1-x^n}{x^n}$ in $-\int \frac{z^{n-2} dz}{1+z^n}$ übergeht und so wieder als besonderer Fall des in der Nr. 54 betrachteten Integrals $\int \frac{x^n dx}{1+x^n}$ erscheint.

SCHLESINGER.

[51.]

Curvam (elasticam) lemniscatam a

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$$

pendentem perscrutari coepi.

[1797] Ian. 8.

Damit stimmt überein die auf dem letzten Blatte der Scheda Ac befindliche Notiz: »Functiones lemniscaticas considerare coeperamus 1797. Januar. 8.«, siehe oben S. 206. Daß GAUSS schon früher die Umkehrung des lemniskatischen Integrals in eine Reihe entwickelt hatte (siehe den art. [6.] der *Exercitationes mathematicae*, oben S. 141), steht mit diesen Angaben nicht im Widerspruch, sondern zeigt, daß GAUSS erst am 8. Januar 1797 die volle Bedeutung des lemniskatischen Integrals erkannt und es zum Ausgangspunkte einer selbständigen Theorie gemacht hat, während es ihm früher nur als ein einzelner Fall des allgemeinen Integrals

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^n)}}$$

erschienen war (siehe die Tagebuchaufzeichnungen Nr. 32 und Nr. 33 vom September 1796). Die wahre Eigenart des Falles $n = 4$ hat GAUSS durch Anwendung des EULERSchen Additionstheorems erkannt; dies zeigen die oben S. 147 ff. in den artt. [4.]—[7.] abgedruckten Leistenotizen. Daß diese Notizen mit den am 8. Januar 1797 begonnenen Untersuchungen in Verbindung stehen, geht auch schon aus dem äußerlichen Merkmal hervor, daß hier wie dort in der Überschrift das Wort *elastica* durchstrichen und an seine Stelle *lemniscata* gesetzt ist.

KLEIN. SCHLESINGER.

[52.]

Criterii EULERIANI rationem sponte detexi.

[1797] Ian. 10.

Die beiden folgenden Notizen Nr. 53, 54 (vergl. auch Nr. 50) zeigen, daß es sich um das EULERSche (richtiger NEWTONSche) Kriterium für die sogenannten binomischen Integrale $\int x^{m-1} (a + bx^n)^{\frac{\mu}{n}} dx$ handelt. Siehe EULER, *Institutiones calculi integralis* I, 1768, § 104, Opera omnia, ser. I, vol. 11, S. 62.

SCHLESINGER.

*) Für $n = 4$ ist diese Substitution bei S. 27 des LEISTE ausgeführt; ebenda bei S. 104 finden sich mit der Überschrift »Untersuchungen über das Integral $y = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$ « Reihenentwicklungen und numerische Rechnungen.

[53.]

Integrale completum

$$\int \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$$

ad circ[uli] quadr[aturam] reducere commentus sum.

[1797] Ian. 12.

Vergl. die Bemerkung zu der Nr. 50 und die Nr. 59 vom 2. März 1797. Im § 352 von EULERs *Institutiones calculi integralis* I, 1768, Opera omnia, ser. I, vol. 11, S. 226, wird für dieses *integrale completum* der Wert

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} = \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}}$$

gegeben; im § 353 werden dann die einfachsten Fälle $n = 2, 3, 4, 6$ berechnet. GAUSS will sagen, daß, da $\sin \frac{\pi}{n}$ für ein beliebiges n durch Wurzeln aus ganzen Zahlen dargestellt werden kann, der betreffende Integralwert, was seinen transzendenten Charakter angeht, nur von π abhängt.

SCHLESINGER.

[54.]

Methodus facilis

$$\int \frac{x^n dx}{1+x^m}$$

determinandi.

[1797 Ian.]

Hierher gehörige Formeln und Rechnungen findet man aufgezeichnet im LEISTE bei den Seiten 27, 91, 92; sie schließen sich durchweg an die Methode an, nach der EULER diese Integrale behandelt, siehe *Institutiones calculi integralis* I, 1768, art. 77., Opera omnia, ser. I, vol. 11, S. 41, oder auch *Methodus integrandi formulas differentiales racionales unicam variabilem involventes*, Comm. Acad. Petrop. 14 (1744/6), 1751, S. 3, Opera omnia, ser. I, vol. 17, S. 70, besonders die artt. 44—59.

KLEIN. SCHLESINGER.

[55.]

Supplementum eximium ad polygonorum descriptionem inveni. Sc[ilicet], si a, b, c, d, \dots sint factores primi numeri primi p unitate truncati, tunc ad polygona p laterum descriptionem nihil aliud requiri quam ut:

- 1^o. arcus indefinitus in a, b, c, d, \dots partes secetur,
- 2^o. ut polygona a, b, c, d, \dots laterum describantur.

Gotting[ae, 1797] Ian. 19.

Hier ist jedenfalls Folgendes gemeint. Bedeuten wie im Texte a, b, c, \dots die Primteiler von $p-1$

und setzt man

$$p-1 = aA, \quad A = bB, \quad B = cC, \quad \dots,$$

so bestimmen sich die A -gliedrigen Perioden nach der im art. 352. der *Disquisitiones arithmeticae*, Werke I, S. 431 entwickelten Methode durch eine Gleichung a -ten Grades, die durch Auflösung von $x^a = 1$ und Teilung eines gewissen Winkels in a gleiche Teile gelöst wird; darauf die B -gliedrigen Perioden durch eine Gleichung b -ten Grades, die durch Auflösung von $x^b = 1$ und Teilung eines gewissen Winkels in b gleiche Teile gelöst wird u.s.w.; vergl. die Bemerkung zu der Nr. 66.

BACHMANN.

[56.]

Theoremata de res[iduis] $- 1$, ∓ 2 simili methodo demonstrata ut cetera. . . .

Gott[ingae, 1797] Febr. 4.

Dieselbe Zeitangabe Werke I, S. 476, Anmerkung zum art. 145. der *Disquisitiones arithmeticae*, Werke I, S. 110.

KLEIN.

[57.]

Forma

$$aa + bb + cc - bc - ac - ab,$$

quod ad divisores attinet, convenit cum hac:

$$aa + 3bb.$$

[1797] Febr. 6.

Setzt man

$$a^2 + b^2 + c^2 - bc - ac - ab = \alpha,$$

so ist

$$(2a-b-c)^2 + 3(b-c)^2 = 4\alpha.$$

Jeder ungerade Primateiler der ersten Form ist also auch Teiler der Form $x^2 + 3y^2$. Umgekehrt, ist p ein Teiler der letzteren, so gibt es eine ungerade Zahl A , für die

$$A^2 \equiv -3 \pmod{p}$$

ist; setzt man $B = 1$, so ist also:

$$A^2 + 3B^2 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Wählt man dann

$$a = 0, \quad b = \frac{A+B}{2}, \quad c = \frac{A-B}{2},$$

so ist p auch Teiler der ersteren Form.

BACHMANN.

[58].

Amplificatio prop[ositionis] penult[imae] p[aginae] 1, scilicet

$$1 - a + a^3 - a^6 + a^{10} \dots$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{a}{1 + \frac{a^2 - a}{1 + \frac{a^3}{1 + \frac{a^4 - a^2}{1 + \frac{a^5}{1 + \dots}}}}}}$$

Unde facile omnes series, ubi exp[onentes] ser[iem] sec[undi] ordinis con-stituunt, transformantur.

[1797] Febr. 16.

Die »Propositio penultima« der ersten Seite des *Tagebuchs*, auf die hier Bezug genommen wird, ist das erste Beispiel der Notiz Nr. 7 vom 24. Mai 1796, das für $a = 2$ aus der hier angegebenen Formel hervorgeht. Eine Umformung, die der hier von GAUSS aufgezeichneten nahe verwandt ist, findet sich ohne Beweis in einem *Theorema* betitelten Aufsätze von G. EISENSTEIN*); beide Umformungen sind als besondere Fälle in einer Gleichung enthalten, die EISENSTEIN in der Abhandlung *Théorèmes sur les formes cubiques etc.****) ebenfalls ohne Beweis angegeben hat. Ein Beweis dieser EISENSTEIN'schen Gleichung kann aus einem Briefe von STIELTJES an HERMITE***)) entnommen werden. Die GAUSS'sche Umformung ergibt sich in folgender Weise aus den oben S. 492 in der Bemerkung zu der Notiz Nr. 7. angegebenen allgemeinen Formeln. Setzt man daselbst in (3) und (6)

$$c_0 = r^{\frac{1}{2}}, \quad c_1 = r^{\left(\frac{1}{2} + 1\right)^2}, \quad c_2 = r^{\left(\frac{1}{2} + 2\right)^2}, \quad c_3 = r^{\left(\frac{1}{2} + 3\right)^2}, \quad \dots,$$

so ist

$$A_n = r^{\frac{1}{2}n} \left(\frac{1}{2} + 2n - 2\right) |r^{(i+k-2)^2}| \quad (i, k = 1, 2, \dots, n),$$

$$B_n = r^{\frac{3}{2}n} \left(\frac{3}{2} + 2n - 2\right) |r^{(i+k-2)^2}| \quad (i, k = 1, 2, \dots, n),$$

und für die als Faktor auftretende Determinante findet man †)

$$|r^{(i+k-2)^2}| = r^{n(n-1)^2 (r^2-1)^{n-1} (r^4-1)^{n-2} \dots (r^{2n-2}-1)}.$$

Die Ausdrücke (5) und (4) oben S. 492 ergeben also

$$b_0 = r^{\frac{1}{2}}, \quad b_{2n} = r^{2n} (r^{2n}-1), \quad b_{2n+1} = r^{4n+2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

was nach Unterdrückung des Faktors $r^{\frac{1}{2}}$ in Reihe und Kettenbruch für $x = 1, r^2 = a$ mit der Forme

*) CRELLES Journal f. Mathematik 29, 1846, S. 96, Mathematische Abhandlungen von G. EISENSTEIN, Berlin 1847, S. 175; vergl. auch die zweite Fußnote auf der folgenden Seite.

**) CRELLES Journal f. Mathematik 27, 1844, S. 75, siehe besonders S. 78.

***)) Siehe *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes* II, Paris 1905, S. 423—425, vergl. auch das Briefbruchstück Nr. 387, S. 340.

†) Vergl. STIELTJES, a. a. O. S. 424, Gleichung (γ).

von GAUSS übereinstimmt. Reihe und Kettenbruch von GAUSS konvergieren*) für $|a| < 1$, sie sind also in dem ersten Beispiele der Nr. 7, wo $a = 2$ ist, beide divergent.

Die Tagebuchaufzeichnung, von der hier die Rede ist, stellt das älteste unmittelbare Zeugnis dafür dar, daß GAUSS sich mit den Potenzreihen beschäftigt hat, deren Exponenten eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung bilden, vergl. die Bemerkungen oben S. 262, 266 und den in der zweiten Abteilung dieses Bandes abgedruckten Aufsatz »Über GAUSS' Arbeiten zur Funktionentheorie«.

EISENSTEIN ist im Juli 1844 nach Göttingen gekommen (siehe *Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher* IV, Altona 1862, S. 265, 266); der vom Dezember 1843 datierte Aufsatz im 27. Bande des CRELLESchen Journals ist also sicher nicht unmittelbar von GAUSS beeinflusst. Dagegen könnte dem *Theorema* im 29. Bande des Journals eine persönliche Anregung von GAUSS vorangegangen sein; man ist versucht, die einleitenden Worte**) geradezu für die Wiedergabe einer von GAUSS getanen Äußerung zu halten.

KLEIN. SCHLESINGER.

[59.]

Formularum integralium formae:

$$\int e^{-t^\alpha} dt \quad \text{et} \quad \int \frac{du}{\sqrt[\beta]{1+u^\gamma}}$$

inter se comparationem institui.

[1797] M[a]rt. 2.

Wahrscheinlich sind hier die zwischen den Grenzen 0 und $+\infty$ genommenen bestimmten Integrale gemeint. Die Substitutionen

$$t^\alpha = x \quad \text{beziehungsweise} \quad u^\gamma = \frac{x}{1-x}$$

ergeben nämlich

$$(1) \quad \int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\frac{1}{\alpha}-1} dx,$$

$$(2) \quad \int_0^{+\infty} \frac{du}{\sqrt[\beta]{1+u^\gamma}} = \frac{1}{\gamma} \int_0^1 x^{\frac{1}{\gamma}-1} (1-x)^{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}-1} dx,$$

*) Vergl. EISENSTEIN, *Mathem. Abhandlungen*, S. 176.

**) »Invenit vir clarissimus GAUSS [*Summatio quarundam serierum singularium*, 1811, art. 8., *Werke* II, S. 20] aequalitatem inter duas expressiones abstrusiores hancee

$$1 + x + x^3 + x^6 + x^{10} + \text{etc.} = \frac{1-x^2}{1-x} \cdot \frac{1-x^4}{1-x^3} \cdot \frac{1-x^6}{1-x^5} \cdot \frac{1-x^8}{1-x^7} \text{ etc.}$$

Non minus memorabilis videatur eiusdem seriei evolutio sequens

$$1 + x + x^3 + x^6 + x^{10} + \text{etc.} = \frac{1}{1 - \frac{x}{1 - \frac{x^2-x}{1 - \text{etc.}}}}$$

so daß die Beziehung zwischen den Integralen (1) und (2) auf die bekannte Gleichung zwischen den EULERSchen Integralen hinauskommt, die EULER in der Abhandlung *Evolutio formulae integralis $\int x^{f-1} dx lx^{\frac{m}{n}}$ integratione a valore $x = 0$ ad $x = 1$ extensa**) angegeben hat, und die in den jetzt üblichen Bezeichnungen so lautet:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)};$$

vergl. auch den art. 28. der GAUSSschen Abhandlung *circa seriem* vom Jahre 1812, Werke III, S. 251.

SCHLESINGER.

[60.]

Cur ad aequationem perveniatur gradus nn^i dividendo curvam lemniscatam in n partes.

[1797] M[a]rt. 19.

Während der Grad der Gleichung, von der die Teilung des Kreises in n gleiche Teile abhängt, gleich der Anzahl der Teile ist, so ergab sich für die mit Hilfe des EULERSchen Additionstheorems gebildete Gleichung, von der die Teilung der Lemniskate in n Teile abhängt, der Grad gleich n^2 . Der Grund hierfür, d. h. die Bedeutung nicht nur der n realen, sondern auch der $n^2 - n$ komplexen Wurzeln**), ergibt sich nur aus der doppelten Periodizität der lemniskatischen Funktion. GAUSS hatte also am 19. März 1797 bereits die doppelte Periode entdeckt. Damit war ihm der Weg eröffnet zur Auffindung der Nullstellen und Unendlichkeitsstellen von sinus und cosinus lemniscaticus und zur Darstellung dieser Funktionen als Quotienten doppelt unendlicher Produkte; siehe die oben S. 153 ff. in den art. [2.]—[6.] abgedruckten Leisteaufzeichnungen. Ferner fand er sich genötigt, seine Funktionen auch für komplexe Werte des Arguments zu betrachten. In der Tat findet sich auf dem letzten Blatte des *Tagebuchs*, mit dem etwas verwischten, aber noch deutlich erkennbaren Datum »1797, Apr. 15.«, also im unmittelbaren Anschluß an die in den Tagebuchnotizen Nr. 60 bis Nr. 63 angezeigten Entdeckungen, die Aufzeichnung:

Quantitates imaginariae: Quaeritur criterium generale, secundum quod functiones plurium variabilium complexae ab incomplexis dignosci possint.

Zur Lemniskatenteilung selbst vergl. die oben S. 160 ff. im Abschnitt [III.] zusammengestellten Aufzeichnungen, ferner die Tagebuchnotiz Nr. 62, und die berühmte Stelle im art. 335. des siebenten Abschnitts der *Disquisitiones arithmeticae* (1801), Werke I, S. 412, 413.

SCHLESINGER.

[61.]

A potestatibus Integ[ralis]

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} \quad (0 \dots 1)$$

*) *Novi Commentarii Acad. Petrop.* 16 (1771), 1772, S. 91, L. EULERI Opera omnia, ser. I, vol. 17, S. 316, siehe insbesondere § 25, S. 330 und das *Supplementum*, S. 354 der Opera.

**) Vergl. oben S. 162 das »Determ. rad. imag.« für die Fünfteilung. Im Text der Tagebuchaufzeichnung hieß das zweite Wort (vergl. die Nachbildung) ursprünglich plures; GAUSS wollte also etwa schreiben: Warum mehr als n Wurzeln vorhanden sind u.s.w.

pendet

$$\sum \left(\frac{mm + 6mn + nn}{(m + n)^4} \right)^k.$$

[1797 Mart.]

Es ist für positive ganzzahlige Werte von k

$$S_k = \sum_{m,n} \left\{ \frac{m^4 - 6m^2n^2 + n^4}{(m^2 + n^2)^4} \right\}^k = \frac{1}{2} \sum_{m,n} \left\{ \frac{1}{(m + n\sqrt{-1})^4} + \frac{1}{(m - n\sqrt{-1})^4} \right\}^k,$$

wo m, n alle Paare ganzer Zahlen mit Ausnahme von $m = 0, n = 0$ durchlaufen. Die S_k lassen sich also in einfacher Weise durch die

$$s_k = \sum_{m,n} \frac{1}{(m + n\sqrt{-1})^{4k}} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

ausdrücken, und von dieser Summe läßt sich leicht zeigen, daß sie sich von der k -ten Potenz der Größe

$$\Pi = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

nur durch einen rationalen Zahlenfaktor unterscheidet. Man braucht dazu nur auf die Formeln zurückzugreifen, die GAUSS um dieselbe Zeit (März 1797) in den LEISTE eingetragen hat, und die in dem Abschnitt [II.] über *Lemniskatische Funktionen*, oben S. 153 ff. abgedruckt sind. Man nehme nämlich von den einzelnen Faktoren des doppelt unendlichen Produkts, das in der Darstellung von $\sin \text{lemn } x$, oben art. [2.], S. 153 den Zähler bildet, den Logarithmus, also $\log \left(1 - \frac{1}{(m + n\sqrt{-1})^4} \frac{x^4}{\Pi^4} \right)$, entwickle diesen nach Potenzen von $\left\{ \frac{1}{m + n\sqrt{-1}} \frac{x}{\Pi} \right\}^4$ und summiere in bezug auf m, n wie angegeben. Man erhält dann für den Logarithmus des Zählers von $\sin \text{lemn } x$, abgesehen von dem Gliede $\log x$, eine nach Potenzen von $\frac{x^4}{\Pi^4}$ fortschreitende Reihe, in der der Koeffizient von $-\frac{1}{k} \frac{x^{4k}}{\Pi^{4k}}$ gleich s_k ist. Vergleicht man diese Reihe mit der auf anderem Wege erhaltenen Entwicklung dieses Zählerlogarithmus (siehe oben art. [10.], S. 159 den »log. Numeratoris«), wo die Koeffizienten rationale Zahlen sind, so ergibt sich die Richtigkeit unserer Aussage. Man wird mit Sicherheit behaupten können, daß GAUSS diesen Gedankengang verfolgt hat, da es sich so am ungezwungensten erklärt, weshalb GAUSS damals gerade auch die Entwicklungen der Logarithmen von Zähler und Nenner des $\sin \text{lemn } x$ aufgezeichnet hat; vergl. auch die sehr viel spätere Aufzeichnung (auf S. 88 des Mai 1809 begonnenen Handbuchs 19, Be), die Werke III, S. 408 abgedruckt ist. Allerdings würde dann das $mm + 6mn + nn$ in unserer Tagebuchnotiz als Schreibfehler für $m^4 - 6m^2n^2 + n^4$ gelten müssen, was aber umso eher angeht, als die Größe

$$\frac{m^4 - 6m^2n^2 + n^4}{(m^2 + n^2)^4}$$

in dem Doppelprodukt oben S. 153 wirklich vorkommt und auch die Summe S_1 noch an zwei andern Stellen dieser Leisteaufzeichnung (oben S. 155, 156) erscheint. GAUSS würde dann hier zum ersten Male in der Entwicklungsgeschichte der elliptischen Funktionen die Klasse von Reihen betrachtet haben, die in allgemeiner Form in EISENSTEINS Abhandlung *Genauere Untersuchung der unendlichen Doppelproducte, aus welchen die elliptischen Functionen als Quotienten zusammengesetzt sind**) auftreten.

KLEIN. SCHLESINGER.

*) CRELLES Journal für Mathematik 35, 1847, S. 153, Mathematische Abhandlungen, 1847, S. 213.

[62.]

Lemniscata geometrica in quinque partes dividitur.

[1797] M[a]rt. 21.

»Geometrica« heißt mit Zirkel und Lineal. Die Gleichung für die Fünftheilung siehe oben S. 161 ff. artt. [4.] und [5.], die algebraische Darstellung ihrer reellen Wurzeln ebenda und S. 163, art. [6.]. Vergl. auch die bei der Nr. 60 angeführte Stelle der *Disquisitiones arithmeticae*, wobei jedoch zu bemerken ist, daß schon der Graf FAGNANO im II. Bande der *Produzioni matematiche* (Pesaro, 1750), S. 356 ff.* gezeigt hat, daß die Lemniscate sich »algebraisch« in gleiche Teile zerlegen lasse, wenn die Anzahl der Teile in einer der drei Formen $2 \cdot 2^m$, $3 \cdot 2^m$, $5 \cdot 2^m$ enthalten ist, wo m eine positive ganze Zahl bedeutet. Anknüpfend an die bei der Nr. 60 erwähnte Stelle der *Disquisitiones arithmeticae* und durch Anwendung der von GAUSS für die Kreisteilung geschaffenen Methode hat N. H. ABEL in seinen *Recherches sur les fonctions elliptiques* (CRELLES Journal für Mathematik 2, 1827, und 3, 1828, Oeuvres, nouvelle édition, I, 1881, S. 261 ff.) nachgewiesen, daß die Teilung der Lemniscate in n gleiche Teile für diejenigen Werte von n mit Zirkel und Lineal bewirkt werden kann, für die dies beim Kreise möglich ist (siehe Oeuvres I, S. 314 und 361).

KLEIN. SCHLESINGER.

[63.]

Inter multa alia Curvam Lemniscatam spectantia observavi:

- [1] Numeratorem sinus decompositi, arcus duplicis esse =
 2 Num. Denom. Sinus \times Num. Den[om]. Cos. arcus simpl[icis];
 [2] Denominatorem vero = (Num. sin.)⁴ + (Denom. sin.)⁴.
 [3] Iam si hic denominator pro arcu π^l ponatur θ , erit Denom[inator]
 sin arcus $k\pi^l$, = θ^{k^k} .
 [4] Iam

$$\theta = 4,810480,$$

- [5] cuius numeri logarithmus hyperbolicus est

$$= 1,570796 \quad \text{i. e.} = \frac{1}{2} \pi,$$

quod maxime est memorabile, cuiusque proprietatis demonstratio gravissima analyseos incrementa pollicetur.

[1797] Mart. 29.

Man findet die hier zusammengestellten fünf Aussagen in den oben S. 156 ff. artt. [7.] und [8.] abgedruckten Leisteaufzeichnungen entwickelt. Setzt man wie a. a. O.

$$\sin \text{lemn } \varphi = \frac{M(\varphi)}{N(\varphi)}, \quad \cos \text{lemn } \varphi = \frac{\mu(\varphi)}{\nu(\varphi)},$$

*) Opere matematiche del MARCHESE G. C. DE' TOSCHI DI FAGNANO, II, 1911, S. 304 ff. *Metodo per misurare la lemniscata*, Schediasma II.

so ist nach den beiden ersten Aussagen (siehe oben S. 157)

$$\begin{aligned} M(2\varphi) &= 2M(\varphi)N(\varphi)\mu(\varphi)\nu(\varphi), \\ N(2\varphi) &= M(\varphi)^4 + N(\varphi)^4. \end{aligned}$$

Die hier in der Tagebuchaufzeichnung mit π^l bezeichnete Größe wird in der Leistehandschrift mit Π bezeichnet, wir haben dafür in dem Abdruck das von GAUSS später stets benutzte ϖ gesetzt. Die hier mit θ bezeichnete Größe heißt im LEISTE (siehe oben S. 157) $2a^4$; es ist also nach der dritten Aussage (siehe oben S. 157)

$$N(\varpi) = \theta, \quad N(k\varpi) = \theta^{kk}$$

für ein ganzes positives k . Ferner ist nach der vierten und fünften Aussage (siehe oben S. 158)

$$N(\varpi) = 4,81048, \quad \log 4,81048 = 1,5708 = \frac{\pi}{2}.$$

Die »demonstratio« der hier nur durch numerische Rechnung erkannten Eigenschaft [5] gelingt GAUSS erst im Juli 1798; vergl. die Bemerkungen zu der Tagebuchaufzeichnung Nr. 92.

KLEIN. SCHLESINGER.

[64.]

Demonstrationes elegantiores pro nexu divisorum formae $\square - \alpha$, $+1$ cum -1 , ± 2 inveni.

[1797] Iun. 17. Gotting[ae]

Dies bezieht sich auf die in den artt. 147.—150. der *Disquisitiones arithmeticae*, Werke I, S. 113 behandelte Frage. Es werden dort bezüglich der Teiler von $x^2 - \alpha$ die Fälle unterschieden:

- 1) α von der Form $4n + 1$ oder $-(4n - 1)$,
- 2) α von der Form $-(4n + 1)$ oder $4n - 1$,
- 3) α von der Form $\pm(4n + 2)$.

Man würde also die Aufzeichnung zu lesen haben: Demonstrationes elegantiores pro nexu divisorum formae $\square - \alpha$ cum $+1$, -1 , ± 2 inveni. (Nach einer Mitteilung von S. GUNDELFINGER in einem Briefe an F. KLEIN vom 10. April 1903.)

BACHMANN.

[65.]

Deductionem secundam theoriae polygonorum excolui.

[1797] Iul. 17. Gotting[ae]

Vergl. die folgende Notiz.

[66.]

Per utranque methodum monstrari potest puras tantum aequationes solvi oportere.

[1797 Iul.]

Außer der Methode des art. 352. der *Disquisitiones arithmeticae* (Werke I, S. 431) hat GAUSS für die Lösung der Kreisteilungsgleichung noch eine auf der Anwendung der LAGRANGESchen Resolvente (vergl.

die Tagebuchnotiz Nr. 37) beruhende Methode angegeben, die im art. 360. der *Disquisitiones arithmeticae* (Werke I, S. 450) auseinandergesetzt ist. Am Schluß des art. 18. der nachgelassenen Abhandlung *Disquisitionum circa aequationes puras ulterior evolutio* (Werke II, S. 263) spricht GAUSS von gewissen allgemeinen Untersuchungen, »quae theoriam secundam aequationum purarum in art. 360. *Disquiss. Arithm. inchoatam magis illustrant*«; daraus geht hervor, daß er in der Tagebuchnotiz Nr. 65 mit der *deductio secunda* eben die Methode des art. 360. meint. Es scheint übrigens, daß GAUSS das Wesen dieser Methode schon erkannt hatte, als er die Tagebuchnotiz Nr. 55 schrieb, und daß es sich bei Nr. 65 nur mehr um die vollständige Durchführung handelte. Die Notiz Nr. 66 hebt hervor, daß beide Methoden die Lösung der Kreis- teilungsgleichung durch reine Gleichungen, d. h. durch Wurzelzeichen ermöglichen. Vergl. den Artikel 15 des Aufsatzes »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten«, Werke X 2, S. 37.

BACHMANN.

[67.]

Quod Oct. 1. per ind[uctionem] invenimus demonstratione munivimus.

[1797] Iul. 20.

Siehe oben S. 505 die Notiz Nr. 39 vom 1. Oktober 1796 und die zugehörige Anmerkung. Der Beweis findet sich im art. 358. der *Disquisitiones arithmeticae*, Werke I, S. 445.

KLEIN. BACHMANN.

[68.]

Casum singularem solutionis congruentiae

$$x^n - 1 \equiv 0$$

(scilicet quando cong[ruentia] aux[iliaris] radices aequales habet), qui tam diu nos vexavit, felicissimo successu vicimus, ex congruentiarum solutione, si modulus est numeri primi potestas.

[1797] Iul. 21.

Vergl. hierzu die *Annotatio* zum art. 251. der *Analysis Residuorum*, Werke II, S. 209, und die zu diesem Artikel gehörige Bemerkung von DEDEKIND ebenda, S. 241, ferner das Ende des art. 363. ebenda S. 232 und den art. 372. ebenda S. 237. Siehe auch den Artikel 16 des Aufsatzes »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten«, Werke X 2, S. 42.

KLEIN. BACHMANN.

[69.]

Si

$$(A) \quad x^{\mu+\nu} + a x^{\mu+\nu-1} + b x^{\mu+\nu-2} + \dots + n$$

per

$$(B) \quad x^{\mu} + \alpha x^{\mu-1} + \beta x^{\mu-2} + \dots + m$$

dividatur atque omnes coefficientes in (A) a, b, c , etc. sint numeri integri, coefficientes vero omnes in (B) rationales, etiam hi omnes erunt integri ultimique n ultimus m metietur.

[1797] Iul. 23.

Dieser Satz wird im art. 42. der *Disquisitiones arithmeticae*, Werke I, S. 34 bewiesen. GAUSS benutzt ihn auch im art. 341. der *Disquisitiones arithmeticae*, Werke I, S. 418, 419 beim Beweise der Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung für den Fall eines Primzahlgrades. Mithin muß GAUSS die Aussage der Tagebuchnotiz Nr. 40, die ja auf den Satz des art. 341. hinausläuft, am 9. Oktober 1796 entweder anders als in den *Disquisitiones arithmeticae* oder noch nicht vollständig bewiesen haben. Vergl. auch die Anmerkung zum art. 42. der *Disquisitiones arithmeticae*, Werke I, S. 475, wo das Datum 1797 Jul. 22. angegeben ist. — In der Handschrift stehen in den Exponenten der Ausdrücke (A), (B) die Buchstaben m, n statt μ, ν .

KLEIN. LOEWY.

[70.]

Forsan omnia producta ex

$$(a + b\rho + c\rho^2 + d\rho^3 + \dots)$$

designante ρ omnes radices prim[itiv]as aeq[uationis] $x^n = 1$ ad formam

$$(x - \rho y)(x - \rho^2 y) \dots$$

reduci possunt[*]. Est enim:

$$\begin{aligned} (a + b\rho + c\rho^2) \times (a + b\rho^2 + c\rho) &= (a - b)^2 + (a - b)(c - a) + (c - a)^2 \\ (a + b\rho + c\rho^2 + d\rho^3) \times (a + b\rho^3 + c\rho^2 + d\rho) &= (a - c)^2 + (b - d)^2 \\ (a + b\rho + c\rho^2 + d\rho^3 + e\rho^4 + f\rho^5) \times &= (a + b - d - e)^2 \\ &- (a + b - d - e)(a - c - d - f) + (a - c - d - f)^2 \\ &= (a + b - d - e)^2 \\ &+ (a + b - d - e)(b + c - e - f) + (b + c - e - f)^2. \end{aligned}$$

Vid. Febr. 4.

Falsum est. Hinc enim sequeretur, e binis numeris in forma Pr[oducti] e $(x - \rho y)$ contentis productum in eadem forma esse, quod facile refutatur.

[1797 Iul.]

Im zweiten und dritten Gliede der letzten Gleichung scheinen einige Vorzeichen verschrieben zu sein, denn es gilt die Identität:

$$-(a + b - d - e)(a - c - d + f) + (a - c - d + f)^2 = -(a + b - d - e)(b + c - e - f) + (b + c - e - f)^2.$$

KLEIN. SCHLESINGER.

[*] In der Handschrift steht potest.]

[71.]

Radicum aeq[uationis] $x^n = 1$ periodi plures eandem summam habere non possunt demonstratur.

[1797] Iul. 27. Gott[ingae]

Vergl. die Notiz Nr. 73 vom 1. August 1797.

[72.]

Plani possibilitatem demonstravi.

[1797] Iul. 28. Gotting[ae]

Am 6. März 1832 schreibt GAUSS an WOLFGANG BOLYAI (Werke VIII, S. 224): »Um die Geometrie vom Anfange an ordentlich zu behandeln, ist unerlässlich, die Möglichkeit eines Planums zu beweisen; die gewöhnliche Definition enthält zu viel, und implicirt eigentlich subreptive schon ein Theorem. Man muß sich wundern, daß alle Schriftsteller von EUKLID bis auf die neuesten Zeiten so nachlässig dabei zu Werk gegangen sind«. Wohl veranlaßt durch den Brief an BOLYAI hat GAUSS im März 1832 seine *Begründung des Planum* im Handbuch 19, Be, S. 153 aufgezeichnet, sie ist abgedruckt Werke VIII, S. 194; an derselben Stelle findet man auch unter [2.] eine kurze, aus der Zeit zwischen 1820 und 1830 stammende Notiz über die Notwendigkeit eines Beweises für die Möglichkeit der Ebene. Man vergleiche ferner den Brief an BESSEL vom 27. Jan. 1829, Werke VIII, S. 200.

STÄCKEL.

[73.]

Quod Iul. 27. inscrips[imus] errorem involvit: sed eo felicius nunc rem exhausimus, quoniam probare possumus nullum periodum esse posse numerum rationalem.

[1797] Aug. 1.

Würden die Notizen Nr. 71 und 73 auf die Kreisteilung, nämlich auf die Einheitswurzeln vom Primzahlgrad bezogen, so wären sie unmittelbare Folgerungen aus der Aussage der Notiz Nr. 40 vom 9. Oktober 1796, d. h. aus der Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung; dann wäre aber bei Nr. 71 nichts Falsches. Wie S. GUNDELFINGER in einem Briefe an KLEIN vom 10. April 1903 bemerkt, wird aber GAUSS in der Nr. 71 unter n jedenfalls eine beliebige zusammengesetzte Zahl verstanden haben, und es kämen demnach hier Sätze in Betracht, wie sie zuerst E. E. KUMMER*) aufgestellt hat. Bedeutet n eine zusammen-

*) E. E. KUMMER, *Theorie der idealen Primfaktoren der complexen Zahlen, welche aus den Wurzeln der Gleichung $\omega^n = 1$ gebildet sind, wenn n eine zusammengesetzte Zahl ist*, Abhandlungen der Akademie der Wissensch. zu Berlin (1856) 1857, Mathem. Abh., S. 1; siehe auch zwei Abhandlungen von L. FUCHS in CRELLES Journal f. Mathematik 61, 1863, S. 374 und 65, 1866, S. 74, FUCHS' Werke I, S. 53 und S. 69.

gesetzte Zahl, so enthält die Nr. 71 in der Tat einen Irrtum, indem die Perioden einer Gruppe (nach KUMMER a. a. O. § 2) dann einander gleich werden können, wenn sie verschwinden. Dies kann GAUSS, wenn er, wie sehr wahrscheinlich, die Perioden ebenso wie KUMMER definiert hat, nachträglich sehr wohl erkannt haben und die Nr. 73 bedeutet dann, wenn auch keinen Ersatz für die Aussage der Nr. 71, so doch einen erheblichen Fortschritt in der Erkenntnis dieser Verhältnisse. Unter einer rationalen Zahl wäre in der Nr. 73 eine von Null verschiedene zu denken.

BACHMANN.

[74.]

Quomodo periodorum numerum duplicando signa adornare oporteat.

[1797 Aug.]

Hier ist wohl folgendes gemeint. Geht man von den e Perioden mit f Gliedern η_i (Voraussetzung ist ein gerades f) zu den $2e$ Perioden mit $\frac{f}{2}$ Gliedern η'_i über, so sind diese durch jene mittels quadratischer Gleichungen bestimmt und es fragt sich, welches Vorzeichen der bei der Auflösung dieser Gleichungen auftretenden Quadratwurzeln einer jeden der kleinern Perioden zukommt.

BACHMANN.

[75.]

Functionum primarum multitudinem per analysis simplicissimam erui.

[1797] Aug. 26.

Der Anfang einer bezüglichen Tabelle ist bei S. 5 des LEISTE aufgezeichnet; man vergl. die artt. 343, 344. der *Analysis Residuorum*, Werke II, S. 220.

DEDEKIND.

[76.]

Theorema: Si

$$1 + ax + bxx + \text{etc.} + mx^\mu$$

est functio secundum modulum p prima, erit:

$$d + x + x^p + x^{p^2} + \text{etc.} + x^{p^{\mu-1}}$$

per hanc f[un]ct[io]nem s[e]c[un]d[u]m hunc modulum divisibilis etc. etc.

[1797] Aug. 30.

Vergl. den art. 356. der *Analysis Residuorum*, Werke II, S. 227.

BACHMANN.

[77.]

Demonstratum, viaque ad multa maiora per introd[uctionem] modulorum multiplicium strata.

[1797] Aug. 31.

Vergl. die Nr. 76. Siehe den art. 372. der *Analysis Residuorum*, Werke II, S. 237.

BACHMANN.

[78.]

Aug. 1. generalius ad quosvis modulus adaptatur.

[1797] Sept. 4.

Hier ist Aug. 1. wohl ein Schreibfehler für Aug. 31., denn es handelt sich ohne Zweifel um den all-gemeinsten Fall dessen, was in der Nr. 76 für einen Primzahlmodul, in der Nr. 77 für einen Modul, der eine Primzahlpotenz ist, bewiesen worden und nun für einen ganz beliebigen Modul erledigt wird. Mit der Nr. 73 vom 1. August hat diese Notiz offenbar nichts zu tun.

BACHMANN.

[79.]

Principia detexi, ad quae congruentiarum secundum modulus multiplices resolutio ad congruentias secundum modulum linearem reducitur.

[1797] Sept. 9.

Vergl. die Nr. 77 vom 31. August 1797, ferner die artt. 372 ff. der *Analysis Residuorum*, Werke II, S. 237.

BACHMANN.

[80.]

Aequationes habere radices imaginarias methodo genuina demonstratum.

Bruns[vigae, 1797] Oct.

Prom[ulgatum] in dissert[atione] pecul[iari*]) mense Aug. 1799.

Siehe Werke III, S. 1. GAUSS ist auf Grund dieser Dissertation am 16. Juli 1799**) von der philosophischen Fakultät der Universität Helmstedt zum Doktor promoviert worden.

SCHLESINGER.

[*] *Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores primi vel secundi gradus resolvi posse.* Helmstadii apud C. G. FLECKEISEN, 1799.]

**) Siehe den Brief an W. BOLYAI vom 16. Dezember 1799, *Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und W. Bolyai*, herausgegeben von F. SCHMIDT und P. STÄCKEL, Leipzig 1899, S. 34. In seiner Schrift: *K. F. Gauss, Zwölf Kapitel aus seinem Leben*, Leipzig 1878, bezeichnet L. HÄNSELNANN, S. 47, fälschlich den 14. Juli als den Tag, an dem »das Diplom ausgefertigt« wurde. Daß der 16. Juli der richtige Tag ist,

[81.]

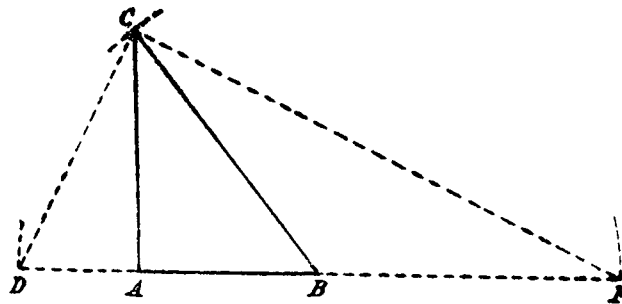
Nova theorematis PYTHAGORAEI dem[onstratio].

Bruns[vigae, 1797] Oct. 16.

Der Beweis ist im Nachlaß vorhanden:

Nova theorematis pythagoraei demonstratio.

[Zettel in Ff, Kapsel 41.]



Theorema.

Si trianguli ABC angulus sit rectus, erit

$$AB^{qu} + AC^{qu} = BC^{qu}.$$

Demonstr[atio].

Producatur AB utrinque fiatque

$$BD = BF = BC.$$

Tum triangula CBD , CBF erunt isocelia et anguli

$$BDC = BCD; \quad BCF = BFC.$$

At

$$BDC + DCB + BCF + CFB = 2 \text{ Rectis.}$$

Quare $DCB + BCF$ erit = Recto. Hinc Angulus $CDA = ACF$ et triangula

wird bestätigt von P. ZIMMERMANN, *Zum Gedächtniss an Karl Friedrich Gauss*, Braunschweigisches Magazin 5, 1899, Heft 15; dieser hat die Akten der Helmstedter Fakultät eingesehen. Das Gesuch von GAUSS war am 26. Juni 1799 eingereicht worden und bereits am 28. Juni erstattete PFAFF, der die Dissertation schon kannte (vergl. die oben S. 99—105 abgedruckten Briefe), sein Gutachten. Die mündliche Prüfung wurde erlassen und das Diplom, wie es scheint, vor dem Druck der Dissertation ausgestellt, nachdem die Gebühren durch den Herzog von Braunschweig bezahlt worden waren.

ACD, AFC similia. Quare

$$AC : AD = AF : AC$$

et $AC^{\text{qu}} = \text{Rectg. sub } AD \text{ et } AF \text{ i. e. sub } BC - AB \text{ et } BC + AB.$ Hinc
(Eucl. Elem. II)

$$AC^{\text{qu}} = BC^{\text{qu}} - AB^{\text{qu}}$$

et

$$AC^{\text{qu}} + AB^{\text{qu}} = BC^{\text{qu}} \quad \text{QED.}$$

[82.]

Seriei

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{144}x^4 \dots$$

summam consideravimus invenimusque eam = 0, si

$$2\sqrt{x} + \frac{3}{16} \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{21}{1024} \frac{1}{\sqrt{3x}} \dots = \left(k + \frac{1}{4}\right)\pi.$$

Brunsv[igae, 1797] Oct. 16.

Eine Erläuterung und Bestätigung dieser Aufzeichnung findet man oben S. 388—389. Hier möge nur wiederholt werden, daß in der Gleichung linker Hand im dritten Gliede statt $\sqrt{3x}$ gelesen werden muß $\sqrt{x^3}$.

SCHLESINGER.

[83.]

Positis:

$$l(1+x) = \varphi'x; \quad l(1+\varphi'x) = \varphi''x; \quad l(1+\varphi''x) = \varphi'''x, \quad \text{etc.}$$

erit

$$\varphi'x = \sqrt[3]{\frac{1}{\frac{3}{2}i}} + \dots$$

Brunsv[igae, 1798] Apr. [*]

In dieser Aufzeichnung wird die von einer Funktion $l(1+x)$ gebildete i -te Iterierte $\varphi^{(i)}(x)$ durch eine Reihe dargestellt, von der das allein angegebene erste Glied vermuten läßt, daß sie zur Bestimmung des asymptotischen Verhaltens von $\varphi^{(i)}(x)$ für große Werte des Index i dienen soll. Welche Funktion GAUSS hier unter $l(1+x)$ versteht, läßt sich unmittelbar weder aus der Aufzeichnung selbst noch aus

[*] Die Unterbrechung in den Eintragungen vom 16. Oktober 1797 bis zum April 1798 läßt darauf schließen, daß GAUSS, als er sich Mitte Oktober 1797 nach Göttingen begab, das Tagebuch in Braunschweig zurückgelassen hatte. Erst nach seiner Rückkehr setzt er die Aufzeichnungen fort.]

andern Stücken des Nachlasses feststellen. Man könnte daran denken, $l(1+x)$ mit dem natürlichen Logarithmus oder mit der in dem *Specimen termini medii etc.* (oben, S. 172) auftretenden Funktion, die im art. [3.] (oben, S. 174) mit $l(1+x)$ bezeichnet wird, zu identifizieren, d. h. also in der Umgebung von $x = 0$ zu setzen

$$(1) \quad l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

oder

$$(2) \quad l(1+x) = x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} - \frac{9}{112}x^4 + \dots;$$

aber diese beiden Möglichkeiten scheiden aus, da, wie sich alsbald zeigen wird, für die beiden Funktionen (1), (2) das Anfangsglied der Entwicklung der i -ten Iterierten anders lautet, als GAUSS es angibt. Wir wollen vielmehr fragen, was sich aus dem GAUSSschen Anfangsgliede für die Funktion $l(1+x)$ erschließen läßt, wenn wir annehmen, daß diese Funktion in der Umgebung von $x = 0$ in der Form

$$(3) \quad l(1+x) = x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

entwickelbar ist.

Setzt man

$$(4) \quad l(1+x) = x_1, \quad l(1+x_1) = x_2, \quad \dots, \quad l(1+x_i) = x_{i+1}, \quad \dots,$$

so gilt für $x_i = \varphi^{(i)}(x)$ die Funktional- oder Differenzgleichung

$$(5) \quad x_{i+1} = x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3 + \dots$$

Diese Gleichung ist als besonderer Fall in der Gleichung

$$(6) \quad x_{i+1} = ax_i + \sum A_{\lambda\mu} \left(\frac{1}{i}\right) x_i^\mu \quad (\lambda = 1, \mu = 0; \lambda + \mu \geq 1)$$

enthalten, die J. HORN unter der Voraussetzung $a \neq 1$ im ersten Teile seiner Abhandlung *Laplacesche Integrale als Lösungen von Funktionalgleichungen* *) untersucht. Den Fall $a = 1$, der nach (5) gerade für uns hier in Betracht kommt**), hat HORN a. a. O. nicht behandelt; in einer brieflichen Mitteilung gibt er darüber die folgenden Erörterungen. Die Gleichung (5), oder wie wir schreiben wollen:

$$(7) \quad x_{i+1} = x_i + a_{m+1} x_i^{m+1} + a_{m+2} x_i^{m+2} + \dots,$$

wo $a_{m+1} \neq 0$ sein soll, wird formal durch eine Reihe von der Form

$$(8) \quad x_i = \sum C_{\lambda\mu} i^{-\frac{\lambda+1}{m}} \left(\frac{\log i}{i}\right)^\mu \quad (\lambda, \mu = 0, 1, 2, \dots)$$

befriedigt, in der die Koeffizienten durch Rekursionsformeln bestimmt werden, bis auf C_{m0} , das als willkürliche Konstante (oder periodische Funktion von i mit der Periode 1) anzusehen ist. Der Anfangskoeffizient C_{00} ergibt sich, da

$$x_{i+1} - x_i = C_{00} \left\{ (i+1)^{-\frac{1}{m}} - i^{-\frac{1}{m}} \right\} + \dots = C_{00} i^{-\frac{1}{m}} \left\{ \left(1 + \frac{1}{i}\right)^{-\frac{1}{m}} - 1 \right\} + \dots = -\frac{C_{00}}{m} i^{-\frac{m+1}{m}} + \dots,$$

$$a_{m+1} x_i^{m+1} + \dots = a_{m+1} C_{00}^{m+1} i^{-\frac{m+1}{m}} + \dots$$

*) CRELLES Journal für Mathematik 146, 1915, S. 95.

**) Die Begründung dafür, daß hier nur die Form (5), also die Form (3) der Entwicklung von $l(1+x)$ in Betracht kommt, geben wir weiter unten.

ist, aus der Gleichung

$$-\frac{C_{00}}{m} = a_{m+1} C_{00}^{m+1};$$

die Reihe (8) lautet also, wenn wir nur das Anfangsglied hinschreiben,

$$(9) \quad x_i = \sqrt[m]{-\frac{1}{m a_{m+1}^i}} + \dots$$

Um Übereinstimmung mit dem Anfangsgliede von GAUSS zu erzielen, hat man zu nehmen

$$(10) \quad m = 3, \quad a_{m+1} = -\frac{1}{2},$$

d. h. für $l(1+x)$ eine Entwicklung in der Umgebung von $x = 0$ von der Form

$$(11) \quad l(1+x) = x - \frac{x^4}{2} + x^5 \mathfrak{P}(x),$$

wo $\mathfrak{P}(x)$ eine beliebige in der Umgebung von $x = 0$ konvergente gewöhnliche Potenzreihe bedeutet. Dagegen würde für die Annahmen (1) bzw. (2) das Anfangsglied der Entwicklung (8) $\frac{2}{i}$ bzw. $\frac{4}{i}$ lauten.

HORN bemerkt weiter, daß nunmehr mit Hilfe der von ihm sonst angewandten Methoden die Reihe (8) mit den Lösungen der Differenzgleichung (7) in Verbindung zu bringen und, um aus (8) eine asymptotische Reihe für die i -te Iterierte x_i zu erhalten, das noch willkürliche C_{m0} in der Weise zu bestimmen wäre, daß die entsprechende Lösung von (7) die Anfangsbedingung $x_0 = x$ erfüllt.

Will man sich aber darauf beschränken, die quantitative Bedeutung des ersten Gliedes der Reihe (8) hervortreten zu lassen, so bedarf es nur der sehr viel einfacheren Methoden, die L. LEAU*) angegeben hat. Da bei GAUSS nur das erste Glied angegeben ist, so erscheint diese Beschränkung gerechtfertigt. Als weitere Vereinfachung wollen wir annehmen, daß die Koeffizienten a_{m+1}, a_{m+2}, \dots in der Gleichung (7) reell sind, und daß auch x eine reelle Veränderliche bedeutet, eine Annahme, die GAUSS im Jahre 1798 sicher gemacht haben wird. Wir schließen uns nun an LEAU**) an.

Nach (7) oder

$$(7') \quad x_i = x_{i-1} + a_{m+1} x_{i-1}^{m+1} + a_{m+2} x_{i-1}^{m+2} + \dots$$

hat man

$$(12) \quad \frac{1}{x_i^m} = \frac{1}{x_{i-1}^m} - h(x_{i-1}),$$

wo

$$(13) \quad h(x) = \frac{1}{x^m} - \frac{1}{x_1^m} = m a_{m+1} + \dots$$

in der Umgebung von $x = 0$ holomorph ist. Aus (12) folgt

$$\frac{1}{x_i^m} = \frac{1}{x^m} - \{h(x) + h(x_1) + \dots + h(x_{i-1})\}$$

oder

$$(14) \quad x_i^m = \frac{x^m}{1 - (h(x) + \dots + h(x_{i-1})) x^m}$$

Setzt man

$$(15) \quad h(x) = m a_{m+1} (1 + \delta(x)),$$

*) *Étude sur les équations fonctionnelles etc.* Thèses, Paris 1897, auch Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse 11, Abhandlung E.

**) A. a. O., Chapitre III, S. 29 ff.

so ist $\delta(0) = 0$ und $\delta(x)$ in der Umgebung von $x = 0$ holomorph. Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, nehmen wir an, daß a_{m+1} negativ sei; für die bei GAUSS vorliegende Form (11) von $l(1+x)$ tritt dies wirklich ein. Dann ist für hinreichend kleine positive Werte von x erstens $0 < x_1 < x$, und man kann zweitens x so klein wählen, daß $|\delta(x)| < K < 1$ sei. Ein in dieser Weise abgegrenzter Bereich positiver Werte von x heiße G . Liegt x innerhalb G , so gilt also das gleiche von jedem x_i und es ist folglich auch $|\delta(x_i)| < K < 1$; wir haben also nach (14) und (15)

$$(16) \quad x_i^m = \frac{x^m}{1 - i m a_{m+1} x^m \left(1 + \frac{1}{i} (\delta(x) + \delta(x_1) + \dots + \delta(x_{i-1})) \right)},$$

und da

$$\frac{1}{i} |\delta(x) + \delta(x_1) + \dots + \delta(x_{i-1})| < K < 1$$

ist, so folgt $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i^m = 0$, also auch $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0$. Für ein dem Bereiche G angehöriges x und ein beliebig kleines positives ε kann man also k so groß wählen, daß für $i \geq k$, $|\delta(x_i)| < \varepsilon$ ist. Dann ist

$$\frac{1}{i} |\delta(x) + \delta(x_1) + \dots + \delta(x_{i-1})| < \frac{kK + (i-k)\varepsilon}{i},$$

wo die rechte Seite für $i \rightarrow \infty$ den Grenzwert ε hat. Schreibt man nun (16) in der Form

$$ix_i^m = \frac{1}{-m a_{m+1} + \frac{1}{ix_i^m} - m a_{m+1} \frac{1}{i} (\delta(x) + \delta(x_1) + \dots + \delta(x_{i-1}))},$$

so erkennt man, daß sich ix_i^m von $-\frac{1}{m a_{m+1}}$ beliebig wenig unterscheidet, wenn i hinreichend groß gewählt wird. Es ist also, wenn x dem Bereiche G angehört,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} ix_i^m = -\frac{1}{m a_{m+1}},$$

oder etwas anders geschrieben

$$(17) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \sqrt[i]{i} \left(x_i - \sqrt[i]{-\frac{1}{m a_{m+1} i}} \right) = 0,$$

also insbesondere für den bei GAUSS vorliegenden Fall (10)

$$(18) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \sqrt[i]{i} \left(\varphi^{(i)}(x) - \sqrt[i]{\frac{1}{i}} \right) = 0.$$

GAUSS hat für seine Funktion $l(1+x)$ unzweifelhaft die Reihe (8) bzw. (9) formal aufgestellt und dabei den Grenzwert (18) vor Augen gehabt. Wie wir gesehen haben, folgt aus den Angaben unserer Tagebuchaufzeichnung für $l(1+x)$ nur die Form (11). Daß tatsächlich nur der Ansatz (3) für die Darstellung von $l(1+x)$ in der Umgebung von $x = 0$ den Angaben der Tagebuchnotiz entspricht, geht daraus hervor, daß für den Ansatz

$$(3)' \quad l(1+x) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots,$$

wo $a_1 \neq 1$ ist, also für die Differenzgleichung

$$(5)' \quad x_{i+1} = a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots,$$

wenn $0 < |a_1| < 1$ vorausgesetzt wird, nach KOENIGS (*Recherches sur les intégrales de certaines équations*

fonctionnelles, Annales de l'École Norm. Sup. 2. série I, 1884, Supplém. S. 1) die Gleichung

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{x_i}{a_1^i} = B(x)$$

gilt, wo $B(x)$ in der Umgebung von $x = 0$ holomorph, in $x = 0$ von der ersten Ordnung Null und $B'(0) = 1$ ist.

Man vergl. die geschichtlichen Bemerkungen oben S. 443, 444.

SCHLESINGER.

[84.]

Classes dari in quovis ordine; hincque numerorum in terna quadrata discernibilitas ad theoriam solidam reducta.

Brunsv[igae, 1798] Apr.

GAUSS hat hier wohl absichtlich *ordine* geschrieben statt, wie man zunächst erwarten würde, *genere*, weil im art. 287. der *Disquisitiones arithmeticae*, Werke I, S. 336, der Nachweis gesondert für jede der beiden Ordnungen (*proprie et improprie primitivi*) geführt wird. Ganz genau müßte es heißen: *Classes dari in quovis genere cuiusvis ordinis*. Vergl. die Angabe Werke I, S. 476, Bemerkung zum art. 287. III der *Disquisitiones arithmeticae*, »Demonstratione primum munita sunt Mense Aprili 1798«.

KLEIN. BACHMANN.

[85.]

Demonstrationem genuinam compositionis virium eruimus.

Gotting[ae, 1798] Mai.

Im Nachlaß haben sich keine auf diesen Beweis bezügliche Aufzeichnungen gefunden, aber in einem Briefe von F. L. WACHTER an GAUSS, datiert Altenburg, den 16. Dezember 1814, wird er erwähnt. Es heißt dort:

»... Den DUCHAYLASchen Beweis für das Kräfteparallelogramm habe ich deswegen unrichtig genannt, weil ihm, in der Gestalt, die ihm POISSON in seiner Mechanik gegeben, die Beweiskraft mangelt. Ihr Beweis scheint mir noch wesentlich verschieden zu sein, weil er streng auf dem Begriff einer festen Ebene beruht, POISSON hingegen ausdrücklich nur auf den Satz sich stützt: daß es gleich sey, an welchem Punkte einer festen Linie eine Kraft wirkt, und dieser Satz scheint mir völlig unzureichend zu seyn...«.

Über WACHTER vergl. P. STÄCKEL, *Mathematische Annalen* 54, 1901, S. 49. DUCHAYLAS wesentlich geometrischer Beweis findet sich in der *Correspondance de l'école polytechnique*, Nr. 4, Paris 1808; POISSON hat ihm in seinem *Traité de mécanique*, Paris 1811, T. I, S. 11, eine analytische Gestalt gegeben.

STÄCKEL.

[86.]

Theorema LA GRANGE de transformatione functionum[*] ad functiones quotcunque variabilium extendi.

Gotting[ae, 1798] Mai.

Im Nachlaß findet sich keine Aufzeichnung, die hier in Betracht kommen könnte, aber in dem oben S. 429 abgedruckten Briefe an HINDENBURG vom 8. Oktober 1799 erwähnt GAUSS die hier angezeigte Verallgemeinerung der Umkehrungsformel von LAGRANGE**) und bemerkt, daß er inzwischen das Verfahren von LAPLACE zum Beweise dieser Formel, das ihm im April 1797 noch unbekannt war, kennen gelernt habe. Nun enthält der VIII. Abschnitt derselben Abhandlung von LAPLACE, in deren VII. Abschnitt jenes Verfahren entwickelt ist (siehe die zweite Fußnote auf S. 430), eine Verallgemeinerung des LAGRANGESchen Satzes auf Funktionen von zwei und mehr Veränderlichen***). GAUSS hat also bei seiner Verallgemeinerung jedenfalls an LAPLACE angeknüpft. Es ist dies darum besonders bemerkenswert, weil GAUSS um diese Zeit, also etwa in der ersten Hälfte des Jahres 1798, überhaupt angefangen hat, sich mit den Schriften von LAPLACE zu beschäftigen, vergl. die Notiz Nr. 88 und die zugehörigen Bemerkungen.

SCHLESINGER.

[87.]

Series

$$[1] \quad 1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 + \text{etc.} = \frac{4}{\pi}$$

simul cum theoria generali serierum involventium sinus et cosinus angulorum arithmetice crescentium.

[1798] Iun.

Welche Teile der allgemeinen Lehre von den trigonometrischen Reihen GAUSS im Auge hatte, als er die vorstehende Notiz schrieb, ergibt sich aus den Anfangsworten des oben S. 433 abgedruckten Briefes an SCHUMACHER vom 5. Februar 1850. Danach handelte es sich um die »Methode, den Grad der Konvergenz« einer solchen Reihe zu bestimmen, d. h. also um die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens des allgemeinen Gliedes für große Werte des Stellenzeigers, und zwar insbesondere bei der Entwicklung der Mittelpunktsgleichung nach den Sinus der Vielfachen der mittleren Anomalie. Wir wissen ja auch z. B. aus den Bemerkungen zu ULUGH-BEIGHS Tafeln†), daß diese Untersuchungen von GAUSS bis in die letzten Jahre des achtzehnten Jahrhunderts zurückreichen. Das Studium der Schriften von LAPLACE, mit dem

[*] In der Handschrift steht functionem.]

***) Daß es sich hier wirklich um den Umkehrungssatz von LAGRANGE handelt, wird dadurch außer Zweifel gesetzt, daß, wie die Handschrift erkennen läßt, GAUSS ursprünglich statt transformatione schreiben wollte reversione.

***). Eine vereinfachte Darstellung dieser Verallgemeinerung von LAPLACE gibt G. DARBOUX, *Sur la série de Laplace*, Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences 68, Paris 1869, S. 324, vergl. auch T.-J. STIELTJES, *Sur une généralisation de la série de Lagrange*, Annales de l'École Normale (3) 2, 1885, S. 93.

†) Diese Bemerkungen hatte GAUSS im Frühjahr 1799 brieflich an v. ZACH mitgeteilt, vergl. die genauen Angaben oben S. 444 in den Bemerkungen zum *Briefwechsel* der *Reihenlehre*.

GAUSS nach dem Zeugnis der Tagebuchnotizen Nr. 86 und Nr. 88 um die hier in Rede stehende Zeit beschäftigt war, ist auch für diese Untersuchungen von Bedeutung gewesen.

Mit diesen geschichtlichen Feststellungen läßt sich auch das Auftreten der Reihe [1] in Einklang bringen. Diese Reihe für $\frac{4}{\pi}$ hat GAUSS auch in seinen Abdruck des zweiten Bandes von SCHULZES Tafelwerk eingeschrieben und zwar mit dem Zusatz »EULER, H. d. l'A. 1778, p. 609«. In der Tat findet man in der Histoire de l'Académie des Sciences für das Jahr 1778 (Paris 1781), beginnend auf S. 603 der Mémoires: *Extraits de différentes lettres de M. Euler à M. le Marquis de Condorcet*, und in dem dritten Briefe (vom 12./23. September 1776), der auf S. 606 beginnt, wird S. 609 (L. EULERI Opera omnia, ser. I, vol. 18, S. 77) die Reihe [1] durch Betrachtung von Integralen der Form

$$\int_0^1 dx \left(\log \frac{1}{x} \right)^2 = \int_0^{\infty} u^2 e^{-u} du,$$

also von Π -Funktionen (in der Bezeichnung der *Disquisitiones circa seriem*, 1812, Werke III, S. 151), gewonnen. Da bei dieser Herleitung trigonometrische Reihen nicht ins Spiel kommen, so muß GAUSS, als er die Tagebuchnotiz schrieb, ein von dem EULERSchen abweichendes Verfahren im Sinn gehabt haben. Dazu kommt, daß in SCHULZES *Tafeln* neben der Reihe [1] noch die Reihe

$$[2] \quad 1 + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8} + \dots \text{ in inf.} = \frac{4}{\pi}$$

eingeschrieben ist; GAUSS dürfte also auf beide Reihen durch ein einheitliches Verfahren gekommen sein, das auf einer Entwicklung in eine trigonometrische Reihe beruhte. Im Nachlaß findet sich keine Aufzeichnung, die hierüber Aufklärung gibt, man ist also auf Vermutungen angewiesen. Nun hat JAMES IVORY in demselben Jahre, aus dem auch unsere Tagebuchnotiz stammt, eine Abhandlung veröffentlicht*), in der jene EULERSche Reihe [1] nach einer Methode hergeleitet wird, die sich in einem GAUSS durchaus vertrauten Gedankenkreise bewegt, und die mit den nötigen Abänderungen auch zur Ableitung der Reihe [2] benutzt werden kann. Sie gründet sich auf die von LAGRANGE**) gegebene trigonometrische Entwicklung

$$(3) \quad (a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta)^n = (a - b e^{\theta \sqrt{-1}})^n (a - b e^{-\theta \sqrt{-1}})^n = P + 2Q \cos \theta + 2R \cos 2\theta + \dots \text{ in inf.},$$

deren Koeffizienten P, Q, R, \dots in der Form von Potenzreihen der Größe $\frac{b}{a}$ dargestellt werden. Diese Entwicklung war namentlich ihrer astronomischen Anwendungen wegen sehr bekannt und berühmt; GAUSS wird sie 1798 ebensogut gekannt haben wie IVORY. Nach dem art. 6. der *Disquisitiones circa seriem* vom Jahre 1812, wo GAUSS diese Entwicklung wiedergibt, hat man insbesondere für den von θ freien Teil

$$(4) \quad P = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta)^n d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (a^2 + b^2 - 2ab \cos 2\varphi)^n d\varphi$$

*) J. IVORY, *A new series for the rectification of the Ellipsis; together with some observations on the Evolution of the Formula* $(a^2 + b^2 - 2ab \cos \Phi)^n$, Transactions of the Royal Society of Edinburgh 4, 1798, Part II, S. 177—190. Auf diese wenig bekannte Abhandlung verweist H. BURKHARDT, *Encyklopädie der mathem. Wissenschaften* II A 12, S. 883.

**) J. L. LAGRANGE, *Solution de différents problèmes de calcul intégral*, Miscell. Taurin. 3, 1762—1765, Oeuvres I, Paris 1867, S. 469, insbesondere S. 620 ff.; *Recherches sur les inégalités des Satellites de Jupiter*, Prix de l'Académie des Sciences 9, Paris 1766, Oeuvres VI, Paris 1873, S. 63, insbesondere S. 88.

die zwiefache Darstellung (siehe Werke III, S. 128, 129)

$$(5) \quad P = a^{2n} F\left(-n, -n, 1, \frac{b^2}{a^2}\right) = (a+b)^{2n} F\left(-n, \frac{1}{2}, 1, \frac{4ab}{(a+b)^2}\right).$$

Mit freier Benutzung der IVORYSCHEN Abhandlung läßt sich nun der Beweis für die Entwicklungen [1] und [2] wie folgt erbringen.

Bedeutet φ die exzentrische Anomalie, x die Exzentrizität einer Ellipse, deren große Achse gleich 1 ist, so hat man

$$1 - x^2 \cos^2 \varphi = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} \cos 2\varphi = a^2 + b^2 - 2ab \cos 2\varphi,$$

für

$$a = \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{2}, \quad b = \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{2}, \quad x^2 = \frac{4ab}{(a+b)^2},$$

so daß also x als das Verhältnis zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel von a, b erscheint (LANDENSche Transformation). Für $n = \frac{1}{2}$ ergibt sich aus (4) mit Benutzung der ersten Reihendarstellung in (5) für das vollständige elliptische Integral zweiter Gattung, d. h. für den halben Ellipsenumfang:

$$\int_0^\pi (1 - x^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi = \int_0^\pi (a^2 + b^2 - 2ab \cos 2\varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi = a\pi \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{b^2}{a^2} + \left(\frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{b^4}{a^4} + \left(\frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{b^6}{a^6} + \dots \right)$$

Setzt man hierin $x = 1$, also $a = \frac{1}{2}$, $\frac{b}{a} = 1$, so erhält man die Reihe [1]. Für $n = -\frac{1}{2}$ und mit Benutzung der zweiten Reihendarstellung in (5) ergibt sich die von GAUSS oft angewandte Entwicklung des vollständigen Integrals erster Gattung

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - x^2 \cos^2 \varphi}} = \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos 2\varphi}} = \pi \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 x^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 x^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 x^6 + \dots \right)$$

aus der die Gleichung

$$\int_0^1 d(x^2) \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - x^2 \cos^2 \varphi}} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \dots$$

hervorgeht. Linker Hand findet man nach Vertauschung der Integrationsfolge sofort den Wert $\frac{4}{\pi}$, womit die Entwicklung [2] gewonnen ist. Die Annahme, daß das Verfahren von GAUSS dem hier befolgten ähnlich gewesen sein mag, wird auch dadurch gestützt, daß im art. [3.] des Abschnitts [VII.] der *Reihenlehre*, der von der Konvergenz der Entwicklung der Mittelpunktsgleichung handelt (siehe oben S. 423), die Entwicklung (3) für $n = -\frac{1}{2}$ benutzt wird.

SCHLESINGER.

[88.]

Calculus probabilitatis contra LA PLACE defensus.

Gott[ingae, 1798] Iun. 17.

Auf diese Aufzeichnung nimmt GAUSS in zwei Briefstellen unmittelbar Bezug, nämlich in dem Briefe an OLBERS vom 24. Januar 1812 (abgedruckt Werke VIII, S. 140) und in dem an LAPLACE vom 30. Januar 1812 (abgedruckt S. 371 dieses Bandes). An OLBERS schreibt GAUSS: »Unter meinen Papieren finde ich, daß ich im Junius 1798 zuerst LAPLACES Methode gesehen und die Unverträglichkeit derselben mit den Grundsätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung in einem kurzen Notizen-Journal über meine mathematischen Beschäftigungen angezeigt habe« und in dem Briefe an LAPLACE heißt es (siehe oben S. 373): »le mois de Juin 1798 est l'époque où je l'ai rapprochée [nämlich die Methode der kleinsten Quadrate] aux principes du calcul des probabilités«. Daraus geht hervor, daß es sich in unserer Aufzeichnung um die von GAUSS im art. 186. der *Theoria motus* (1809, Werke VII, 1906, S. 254) besprochene Methode von LAPLACE-BOSCOVICH handelt, die LAPLACE im XI. Abschnitt seiner Abhandlung *Sur quelques points du Système du monde*, Histoire de l'Académie des Sciences, Année 1789, Paris 1793, Mémoires etc. S. 32 auseinandersetzt, und daß GAUSS diese Abhandlung im Juni 1798 kennen gelernt hat. Man vergl. auch die Einleitung des Aufsatzes von A. GALLE »GAUSS als Geodät«, Werke XI 2.

KLEIN. SCHLESINGER.

[89.]

Problema eliminationis ita solutum, ut nihil amplius desiderari possit.

Gott[ingae, 1798] Iun.

Mit der Eliminationstheorie, auf die sich auch schon die Tagebuchnotiz Nr. 36 vom 16. September 1796 bezieht, hat sich GAUSS beschäftigt, als er die Beweise seiner Vorgänger EULER und LAGRANGE für den Fundamentalsatz der Algebra einer kritischen Prüfung unterzog. (Vgl. die Tagebuchnotiz Nr. 80 vom Oktober 1797.) Im art. 8. der *Dissertation* (1799, Werke III, S. 13) lesen wir bei der Besprechung des EULERSchen Beweises: »Ceterum operae pretium esse videtur, in formulas illas, quae α , β etc. rationaliter per u , B , C etc. exprimant, profundius et generalissime inquirere; de qua re aliisque ad eliminationis theoriam (argumentum haudquaquam exhaustum) pertinentibus alia occasione fusius agere suscipiam«. Über LAGRANGE und seine Kritik des EULERSchen Beweises spricht sich GAUSS im art. 12. der *Dissertation* (Werke III, S. 20) aus. Auf diesen Punkt bezieht sich auch die Bemerkung von PFAFF in dem oben abgedruckten Briefe vom 8. Juli 1799, S. 104 unten und S. 105 dieses Bandes.

LOEWY.

[90.]

Varia elegantiuscula circa attractionem sphaerae.

[1798 Iun. sive Iul.]

[91a.]

$$1 + \frac{1}{9} \frac{1.3}{4.4} + \frac{1}{81} \frac{1.3.5.7}{4.4.8.8} + \frac{1}{729} \frac{1.3.5.7.9.11}{4.4.8.8.12.12} \dots = 1,02220 \dots$$

$$= \frac{1,3110\dots}{3,1415\dots} \sqrt{6} \left[= \frac{\varpi}{2} \frac{1}{\pi} \sqrt{6} \right].$$

[1798] Jul.

[91b.]

$$\text{arc. sin lemn. sin } \varphi - \text{arc. sin lemn. cos } \varphi = \varpi - \frac{2\varphi\varpi}{\pi}$$

$$\begin{aligned} \text{sin lemnisc. } [a] &= 0,95500598 \sin [a] \\ &\quad - 0,0430495 \sin 3[a] \\ &\quad + 0,0018605 \sin 5[a] \\ &\quad - 0,0000803 \sin 7[a] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \text{ lemn. } [a] &= 0,4569472 = \frac{\pi}{\varpi\varpi} \\ &\quad - [0,4569472] \cos 2[a] \dots \end{aligned}$$

$$\text{arc. sin lemn. sin } \varphi = \frac{\varpi}{\pi} \varphi + \left(\frac{\varpi}{\pi} - \frac{2}{\varpi} \right) \sin 2\varphi + \left(\frac{11}{2} \frac{\varpi}{\pi} - \frac{12}{\varpi} \right) \sin 4\varphi + \dots$$

$$\begin{aligned} \sin^5 [\varphi] &= 0,4775031 \sin [\varphi] \\ &\quad + 0,03 \dots \dots [\sin 3\varphi] \\ &\quad \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Die Aufzeichnungen der Nr. 91a und b stehen im engsten Zusammenhang mit den oben S. 168 ff. in den artt. [4.]–[6.] abgedruckten Notizen. Die Reihe der Nr. 91a findet sich im art. [5.], oben S. 169, der die Aufzeichnungen auf der Rückseite des Leistetitels wiedergibt, und dient dort zur Berechnung von $\frac{\varpi}{\pi}$; GAUSS hat sie später (im November 1799) auf S. 7 der Scheda Ac (abgedruckt oben S. 184 Gleichung [3]) noch einmal hingeschrieben.

Die trigonometrischen Reihen der Nr. 91b finden sich im wesentlichen im art. [4.], oben S. 168. Bei der Entwicklung von arc sin lemn s ist hier $s = \sin \varphi$ gesetzt und φ im Bogenmaß gedacht, während S. 168 φ in Graden ausgedrückt erscheint; darum lautet das erste Glied rechts vom Gleichheitszeichen hier $\frac{\varpi}{\pi} \varphi$, dort φ^0 . Für den Koeffizienten von $\sin 2\varphi$ sind auf S. 9 der Scheda Ac zwei, oben S. 184 Gln. [4], [5] abgedruckte Reihenentwicklungen angegeben. Die Entwicklung des art. [6.], oben S. 170, erscheint als unmittelbare Umkehrung der hier angegebenen Formel für arc sin lemn $\sin \varphi$, wenn man dort φ mit χ vertauscht, also sin lemn $\chi = \sin \text{circ } \varphi$ setzt. In der Entwicklung von sin lemn a ist hier ebenso wie auf S. 168 auf beiden Seiten der Gleichung a im Gradmaß zu denken, man hätte also, behufs Zurückführung auf das Bogenmaß, für 180° links vom Gleichheitszeichen die halbe Lemniskatenlänge ϖ , dagegen rechts vom Gleichheitszeichen die halbe Kreislänge π zu setzen. Vergl. die Bemerkung zu der folgenden Nr. 92.

KLEIN. SCHLESINGER.

[92.]

De lemniscata, elegantissima omnes expectationes superantia acquisivimus et quidem per methodos, quae campum prorsus novum nobis aperiunt.

Gott[ingae, 1798] Iul.

Die hier angezeigten Ergebnisse finden sich in der Scheda Aa, die im Juli 1798 begonnen worden ist. Unter der Überschrift: *Scheda prima. De curva lemniscata* beginnt S. 3 der Scheda eine Zusammenfassung älterer Formeln, die im wesentlichen Werke III, S. 413–415 bis dahin, wo es heißt »Spätere Bemerkung« (diese stammt aus dem Handbuch 16, Bb, S. 72), abgedruckt ist. Das eigentlich Neue beginnt auf S. 6 der Scheda mit den Worten:

»Si valores sc [i. e. sinuscirculi], qui reddunt ipsum sl [i. e. sinumlemniscaticum] = 0 secundum regulas notas productum infinitum generare concipiuntur, nec non valores ipsius sc qui reddunt ipsum sl = ∞ «

u.s.w., wie Werke III, S. 415, beginnend im art. [4.], gedruckt ist. GAUSS knüpft also unmittelbar an die in der Nr. 91b des *Tagebuchs* und in der Aufzeichnung oben S. 168, art. [4.], gegebenen Ansätze an, wonach $\sin \text{lemn } \varphi$ als Funktion von $s = \sin \varphi$ betrachtet wird. Aus der Kenntnis der Null- und Unendlichkeitsstellen von $\sin \text{lemn } \varphi$ und $\cos \text{lemn } \varphi$ (siehe oben S. 153 ff., die artt. [2.], [5.], [6.]) ergeben sich dann unmittelbar die Werte von s , die diesen Stellen entsprechen, in der Form von Exponentialgrößen, wie wir sie in den Ausdrücken für $P\varphi$, $Q\varphi$, $p\varphi$ und $q\varphi$ Werke III, S. 416 auftreten sehen. $P\varphi$ ist die oben S. 168, art. [3.] und S. 170, art. [6.] eingeführte Funktion; vergl. Werke III, S. 416, art. [5.], eine Aufzeichnung, die jedoch nicht aus der Scheda Aa, sondern von losen Zetteln aus späterer Zeit stammt.

Die jetzt gewonnene Darstellung von $P\varphi$, $Q\varphi$ in der Form einfach unendlicher Produkte liefert auch die in der Tagebuchnotiz Nr. 63 (vom 29. März 1797) gemeinte *demonstratio* des damals π durch Induktion gefundenen Resultats (vergl. auch oben, S. 158 letzte Zeile)

$$\theta = N\varpi = e^{\frac{\pi}{2}},$$

sie brachte also wirklich, wie GAUSS damals voraussagte, *gravissima analyseos incrementa* mit sich. Daß GAUSS diese Bestätigung sofort vorgenommen hat, zeigt eine in der Scheda Aa aufgezeichnete, aber Werke III nicht mit abgedruckte Tafel der Werte von $e^{\frac{1}{2}k\pi}$ und $e^{-\frac{1}{2}k\pi}$ für $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ und dann S. 8–13 der Scheda die Werke III, S. 431, beginnend mit »*Ecce iam computum pro $e^{\frac{1}{2}\pi}$* « bis S. 432 abgedruckte sehr genaue Berechnung von $e^{\frac{1}{2}\pi}$ und $e^{-\frac{1}{2}\pi}$. Dazwischen steht (noch auf S. 7 der Scheda) die Werke III, S. 417, art. [6.] wiedergegebene Partialbruchdarstellung und (auf S. 8 der Scheda) die den Schluß des art. [6.] bildende Entwicklung des *sinus lemniscaticus*, und zwar in der Form:

$$\text{sl } \varphi = \frac{\pi}{\varpi} \frac{4}{e^{\frac{1}{2}\pi} + e^{-\frac{1}{2}\pi}} \text{sc } \varphi - \frac{\pi}{\varpi} \frac{4}{e^{\frac{3}{2}\pi} - e^{-\frac{3}{2}\pi}} \text{sc } 3\varphi \text{ etc.}$$

Es ist dies also genau die in der Nr. 91b und oben S. 168 gegebene Entwicklung von $\sin \text{lemn } \varphi$ nach den Sinus der Vielfachen von φ , nur erscheinen die Koeffizienten, die dort bloß numerisch angegeben waren, hier in einer das allgemeine Gesetz aufzeigenden analytischen Form. Aber auch hier hat GAUSS auf beiden Seiten der Gleichung φ im Gradmaß gedacht (vergl. die Bemerkung bei der Nr. 91); beim Abdruck Werke III, S. 417 hat der Herausgeber SCHERING beiderseits auf Bogenmaß reduziert; die von ihm mit ψ bezeich-

nete Größe hat also den Wert

$$\psi = \frac{\varphi^0}{180^0}.$$

Mit denselben Änderungen gegen die Handschrift sind dann Werke III, S. 417, art. [7.] noch die auf den Seiten 14, 15 der Scheda stehenden Formeln für $\log P$, $\log Q$, $\log p$, $\log q$ und $\log \sin \text{lemn } \varphi$ abgedruckt. Damit sind die zu der hier besprochenen Tagebuchnotiz Nr. 92 gehörigen Aufzeichnungen erschöpft. Vergl. die Bemerkungen zu den Nummern 94, 95, 98.

KLEIN. SCHLESINGER.

[93.]

Solutio problematis ballistici.

Gott[ingae, 1798] Iul.

Der Nachlaß enthält keine auf dieses Problem bezüglichen Aufzeichnungen. Dagegen hat GAUSS in einem am 15. August 1842 an ENCKE geschriebenen Briefe einige Gedanken über die Art, wie ballistische Versuche anzustellen sind, ausgesprochen. Diesen Brief sowie die Anfrage ENCKES, die ihm vorhergegangen war, findet man unter den Nachträgen zur Physik, Werke XI 1, S. 49 ff. abgedruckt.

SCHLESINGER.

[94.]

Cometarum theoriam perfectionem reddidi.

Gott[ingae, 1798] Iul.

Auf die zur Theorie der lemniskatischen Funktionen gehörigen Entwicklungen der Scheda Aa, die bis zur S. 15 gehen und bei der Nr. 92 besprochen worden sind, folgt auf S. 16 die Überschrift: *Scheda secunda. De motu cometarum.* Unter dieser Überschrift finden sich aber die Differentialgleichungen des Zweikörperproblems für die Erde und daran anschließende Entwicklungen, die sich bis zur S. 20 der Scheda erstrecken und kaum über die Ableitung des Flächensatzes und des Integrals der lebendigen Kraft hinausgehen; sie enthalten nichts, was sich im besonderen auf die Kometenbewegung bezieht. GAUSS' Untersuchungen über die Bahnbestimmung der Kometen fallen in eine spätere Zeit.

KLEIN. BRENDL.

[95.]

Novus in analysi campus se nobis aperuit, scilicet investigatio functionum etc.

[1798] Oct.

Nach den bei der Nr. 94 erwähnten Aufzeichnungen finden wir auf S. 21 ff. der Scheda Aa wieder Entwicklungen zur Theorie der lemniskatischen Funktionen, die man mit den hier angekündigten Fortschritten in Verbindung zu setzen hat. Was auf S. 21, 22 der Scheda steht, ist Werke III, S. 418, soweit noch art. [7.] reicht, abgedruckt. Es folgen dann S. 23—25 der Scheda Rechnungen, die darauf hinzielen, aus den Entwicklungen von $\log P$, $\log Q$ analoge trigonometrische Reihenentwicklungen für P , Q selbst zu

erhalten. Es gelingt dies zunächst in der Weise, daß die Koeffizienten numerisch gefunden werden; so steht z. B. auf S. 25

$$\begin{aligned}
 P\varphi &= 0,8346268416 \quad 7407316.4 \sin \varphi \\
 &+ \quad 62694861 \quad 2274007.5 (\sin \varphi)^3 \\
 &+ \quad \quad 874 \quad 5689900.5 (\sin \varphi)^5 \\
 &+ \quad \quad \quad \quad 238.56 (\sin \varphi)^7,
 \end{aligned}$$

wo, wie S. 24 bemerkt wird, der Koeffizient von $\sin \varphi$ nichts anderes ist als $\frac{\pi}{\pi}$, und daraus wird nun weiter die Form

$$\begin{aligned}
 P\varphi &= 0,8393290109 \quad 26691403 \sin \varphi \\
 &- \quad 15673988 \quad 60966741 \sin 3\varphi \\
 &+ \quad \quad 54 \quad 66056449 \sin 5\varphi \\
 &- \quad \quad \quad \quad \dots 37 \sin 7\varphi
 \end{aligned}$$

gewonnen. Das Gesetz der Koeffizienten in dieser Entwicklung und in der analogen für $Q\varphi$ scheint GAUSS durch numerische Induktion gefunden zu haben, das zeigen die auf S. 29—33 befindlichen Rechnungen für $e^{-\frac{1}{2}\pi}$, $e^{-\pi}$, $e^{-\frac{3}{2}\pi}$. Auf S. 27 und 28 stehen die Werke III, S. 418 im art. [8.] abgedruckten Formeln für $\sin \text{lemn } \varphi$, $P\varphi$, $Q\varphi^*$. Diese endgültigen Darstellungen von P , Q :

$$(*) \quad \left\{ \begin{aligned}
 P\varphi &= 2^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{\pi}} \left(\frac{\sin \varphi}{e^{\frac{1}{4}\pi}} - \frac{\sin 3\varphi}{e^{\frac{3}{2}\pi}} + \frac{\sin 5\varphi}{e^{\frac{25}{4}\pi}} - \dots \right), \\
 Q\varphi &= \frac{\sqrt{\frac{\pi}{\pi}}}{2^{\frac{1}{4}}} \left(1 + \frac{2 \cos 2\varphi}{e^{\pi}} + \frac{2 \cos 4\varphi}{e^{4\pi}} + \dots \right)
 \end{aligned} \right.$$

hat GAUSS wohl durch Einsetzen in die auf S. 23 der Scheda aufgezeichnete Gleichung

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{[d\varphi]} \frac{P}{Q} &= \frac{1}{Q} \frac{dP}{d\varphi} - \frac{P}{QQ} \frac{dQ}{d\varphi} = \sqrt{\left(1 - \frac{P^4}{Q^4}\right)} \\
 QP' - PQ' &= \sqrt{(Q^4 - P^4)}
 \end{aligned}$$

bestätigt (vergl. auch die Leistenotiz oben S. 167, art. [2.]).

Die angegebenen Reihen für P , Q liefern auch sofort die S. 28 der Scheda unmittelbar anschließend (wie in dem Abdruck Werke III, S. 418, art. [8.]) aufgezeichneten Reihen

$$(**) \quad \left\{ \begin{aligned}
 \sqrt{\frac{\pi}{\pi}} &= 1 - 2e^{-\pi} + 2e^{-4\pi} - 2e^{-9\pi} + \dots, \\
 \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\pi}} &= e^{-\frac{1}{4}\pi} + e^{-\frac{9}{4}\pi} + e^{-\frac{25}{4}\pi} + \dots,
 \end{aligned} \right.$$

die den Zusammenhang herstellen zwischen der lemniskatischen Periode und den nach Potenzen von $e^{-\pi}$ bzw. $e^{-\frac{1}{4}\pi}$ fortschreitenden Reihen, deren Exponenten die Quadratzahlen sind. Die auf S. 28 der Scheda stehende Aufzeichnung **)

*) Auch bei diesen ist im Abdruck beiderseits auf Bogenmaß reduziert.

**) Vergl. oben S. 277.

»Investigatio factorum progressionis infinitae

$$1 + x + x^3 + x^6 + x^{10} + x^{15} + x^{21} + \text{etc.} = S^a$$

zeigt, daß GAUSS durch die Entdeckung der beiden Reihen (***) veranlaßt worden ist, seine älteren Untersuchungen über Potenzreihen, deren Exponenten eine arithmetische Progression zweiter Ordnung bilden, zu vergleichen. Von solchen Untersuchungen liegen Spuren vor im art. [9.] der *Exercitat. mathem.* (1796), oben S. 142, in der Tagebuchnotiz Nr. 58 vom 16. Februar 1797, die wieder auf Nr. 7 vom 24. Mai 1796 zurückweist, und in einer mündlichen Überlieferung (Werke III, S. 493, Zeile 3—6), wonach GAUSS die Beziehungen zwischen dem arithmetisch-geometrischen Mittel und den Potenzreihen, deren Exponenten Quadratzahlen sind, schon 1794 gekannt haben soll. GAUSS könnte also hier einen Zusammenhang zwischen der lemniskatischen Periode und dem arithmetisch-geometrischen Mittel vermuten, einen Zusammenhang, der ihm in der Tagebuchnotiz Nr. 98 vom 30. Mai 1799 zur Gewißheit geworden ist (certo aperietur heißt es dort, gleichsam als Bekräftigung des hier stehenden ... nobis aperuit).

Die Reihen (***) hat GAUSS in der Tat sofort dazu benutzt, um den Wert von $\sqrt{\frac{\overline{\omega}}{\pi}}$ auf 26 Dezimalstellen zu berechnen (S. 28 der Scheda, mit Änderung der Reihenfolge abgedruckt Werke III, S. 418, 419, art. [8.]), und auf einem etwa aus derselben Zeit stammenden Zettel (in Fh, Nr. 2, Kapsel 50, demselben, auf dem die Werke III, S. 420, art. [12.] abgedruckten Reihen aufgezeichnet sind) wird diese Zahl ins Quadrat erhoben*), also $\frac{\overline{\omega}}{\pi}$ vermittels der ins Quadrat erhobenen Reihen (***) berechnet. Die Vergleichung von

$$\frac{\overline{\omega}}{\pi} = 4 \left(e^{-\frac{1}{4}\pi} + e^{-\frac{9}{4}\pi} + e^{-\frac{25}{4}\pi} + \dots \right)^2$$

mit der z. B. im Leiste (siehe oben S. 176, Gl. [6.]) aufgezeichneten Reihe

$$4 \left(z^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{9}{2}} + z^{\frac{25}{2}} + \dots \right)^2$$

liegt dann sehr nahe; sie stimmen für $z = e^{-\frac{1}{2}\pi}$ überein.

Als die der Notiz Nr. 95 zugrunde liegenden Entdeckungen können wir also ansehen: Die Aufstellung der trigonometrischen Reihenentwicklungen für den Zähler und Nenner des sinus lemniscaticus, die im wesentlichen mit den JACOBI'schen Thetafunktionen für den lemniskatischen Fall übereinstimmen, die Darstellung der lemniskatischen Periode durch Reihen, deren Exponenten die Quadratzahlen sind und möglicherweise hieran anschließend die Wiederaufnahme der Untersuchungen über das arithmetisch-geometrische Mittel (vergl oben S. 172 ff. und die zugehörigen Bemerkungen S. 260, 261). Auf den von GAUSS bei der Entwicklung der Theorie der lemniskatischen Funktionen 1798 eingeschlagenen Weg wirft die Bemerkung ein helles Licht, die GAUSS in dem oben S. 248 abgedruckten Briefe an BESSEL vom 30. März 1828, in bezug auf ABEL macht. Vergl. die Abschnitte III und IV des Aufsatzes »Über GAUSS' Arbeiten zur Funktionentheorie«, Werke X 2.

KLEIN. SCHLESINGER.

*) Es heißt dort:

Evectio numeri 0,91357913815611682140724 ad quadratum

und als Ergebnis der Rechnung

$$\left[\frac{\overline{\omega}}{\pi} \right] = 0,8346268416740731872812057352513.$$

[96.]

Formas superiores considerare coepimus.

Br[unsvigae] Febr. 14. 1799.

Dasselbe Datum auch Werke I, S. 476, Bemerkung zum art. 266. der *Disquisitiones arithmeticae*, Werke I, S. 299. In der im November 1798 begonnenen Scheda Ab findet sich eine Reihe auf die ternären quadratischen Formen bezüglicher Aufzeichnungen, die mit den Worten beginnen:

Huiusmodi functiones

$$ax^2 + a'x'^2 + a''x''^2 + 2bx'x'' + 2b'xx'' + 2b''xx'$$

formas superiores vocamus.

KLEIN.

[97.]

Formulas novas exactas pro parallaxi eruimus.

Br[unsvigae, 1799] Apr. 8.

Diese Formeln (für die Mondparallaxe) hat GAUSS an verschiedenen Stellen aufgezeichnet, und zwar wie es seine Gewohnheit war, auf leeren Blättern von Büchern seiner Bibliothek. In unmittelbarem Zusammenhang mit unserer Tagebuchnotiz scheint die folgende Eintragung zu stehen, die sich auf den hintern Einbandseiten von KLÜGELS *Analytischer Geometrie*, 1770, (Nr. 739 der GAUSSbibliothek) findet:

Ist des Mondes Declination = d , sein Stundenwinkel = h , Horizontalparallaxe = π , Polhöhe = φ , so ist (genau)

$$\cotg \text{par[allaxis] Asc[ensionis] r[ectae]} = \frac{\cos d}{\cos \varphi \sin h \sin \pi} - \cotg h$$

Diameter im Horizont = Δ Vergrößerter Diameter = Δ'

$$\sin \frac{1}{2} \Delta' = \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta \sin (h + p) \cos d'}{\sin h \cos d}$$

$$\text{tang } d' = \frac{\sin (h + p)}{\sin h} \left(\text{tang } d - \frac{\sin \pi \sin \varphi}{\cos d} \right)$$

REV. GALEN [*]

Am ausführlichsten ist von diesen Formeln in einem Briefe die Rede, den GAUSS in Braunschweig am 17. April 1799 geschrieben hat und der gegenwärtig in der Autographensammlung DARMSTAEDTER der Königlichen Bibliothek zu Berlin aufbewahrt wird. Es heißt in diesem Briefe:

[*] Siehe die unerklärliche Buchstabenverbindung GALEN auch oben S. 187 aus Scheda Ac.]

Ich habe seit meinem letzten Briefe das Brouillon wieder gefunden von der Berechnung der Bedeckung des $\tau \approx$ [*]. Ich hatte diese meistens ad normam BOHNENBERGER [**] geführt, weil ich damals mich nicht gleich in diesen Arbeiten genug orientirt hatte, um Ihnen das Resultat sogleich angeben zu können, wie Sie damals wünschten. Daraus sehe ich also, wie BOHNENBERGER die Längenparallaxe u.s.w. berechnet hat (mit Ausnahme der sphäroidischen Gestalt der Erde, auf die ich damals nicht Rücksicht genommen hatte, weil ich irrig voraussetzte, die Horizontalpar[allaxe] in dem Berliner Jahr B[uch] gelte für Berlin) und dass seine Methode nicht Näherung sei. In der That sind auch die exacten Formeln für Jemand, der in der analytischen Trigon[ometrie] nur mässig geübt ist, so leicht zu finden, dass es unbegreiflich sein würde, wenn sie noch von Niemand entwickelt wären. Indess muss ich gestehen, dass die Form, in der B[OHNNENBERGER] sie darstellt [***], mir weniger bequem scheint als die meinige, obgleich er vielleicht das Gegentheil geglaubt haben mag. Er richtet es nemlich so ein, dass man alles vermittelst der trigonometrischen Tafeln machen kann; allein ich glaube, dass der Grund davon ein Vorurtheil ist. . . . Meine Formeln werde ich also zwar nicht bekannt machen, zumal da sie wahrscheinlich schon in andern Büchern stehen werden (vielleicht in CAGNOLI [†]) aber rechnen werde ich doch immer nach ihnen. Dies sind sie:

- π Horizontalparallaxe unterm Aequator
- π' verbesserte Horiz. Par.
- ρ Entfernung vom Mittelpunkte der Erde
- β Breite des Zeniths
- λ Länge des Zeniths
- b Breite des \mathbb{C} [Mondes]
- l Länge des \mathbb{C}
- $\delta = l - \lambda$
- r Halbmesser des \mathbb{C}

[*] τ aquarii.]

[**] *Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung vorzüglich vermittelst des Spiegelsextanten* von M. J. G. F. BOHNENBERGER, Göttingen 1795, §§ 187—190, S. 341 ff.]

[***] Siehe a. a. O. S. 346 unten, beziehungsweise S. 350.]

[†] *Traité de Trigonométrie rectiligne et sphérique etc.* par M. CAGNOLI, traduit de l'Italien par M. CHOMPRÉ, Paris 1786.]

r' Vergrößerter Halbmesser

b' Scheinbare Breite [des Mondes]

p Längenparallaxe

$$\text{I.} \quad \sin \pi' = \rho \sin \pi$$

$$\text{II.} \quad \cotang p = \frac{\cos b}{\cos \beta \sin \delta \sin \pi'} - \cotang \delta$$

$$\text{III.} \quad \tang b' = \frac{\sin \delta + p}{\sin \delta} \left(\tang b - \frac{\sin \pi' \sin \beta}{\cos b} \right)$$

$$\text{IV.} \quad \sin r' = \frac{\sin \delta + p}{\sin \delta} \cdot \frac{\cos b'}{\cos b} \sin r [*].$$

Zur Ausübung sind in den meisten Fällen folgende Formeln die bequemsten.

I. Man suche den Logarithmen einer Zahl M nach der Formel

$$\frac{1}{M} = \cos b - \rho \sin \pi \cos \beta \cos \delta,$$

dann wird

$$\text{II.} \quad \tang p = M \rho \sin \pi \cos \beta \sin \delta$$

$$\text{III.} \quad \tang b' = M \sin b \cos p - M \rho \cos p \sin \beta \sin \pi$$

$$\text{IV.} \quad \sin r' = M \cos b' \cos p \sin r,$$

(wofür man allemal die Näherung

$$r' = M \cos b' \cos p \cdot r$$

brauchen darf).

Nach den letztern Formeln habe ich die Berechnung für Seeberg als Beispiel beigelegt. Ich merke nur noch an, dass das was BOHNENBERGER N nennt (nach meinem Brouillon[**]) immer gleich ist dem Logarithm von $2M \dots$

Die GAUSSschen Formeln finden sich im Wesentlichen bei BOHNENBERGER a. a. O. § 187, S. 344—346 ***); die Formel für die Längenparallaxe (II. der GAUSSschen Formeln) hat nach BOHNENBERGERS Zitat bereits »LEXELL in den Berliner Ephemeriden für 1777, S. 152 u. f.« bekannt gemacht.

[*] Die Formeln II, III, IV stimmen für $\rho = 1$, $\beta = \varphi$, $b = d$, $\delta = h$, $r = \frac{1}{2} \Delta$, $r' = \frac{1}{2} \Delta'$, $b' = d'$ mit den oben aus KLÜGEL mitgeteilten überein. GAUSS hat sie mit den nachfolgenden Gebrauchsformeln in den hier benutzten Bezeichnungen in seinen 1798 erworbenen Abdruck von RÖSLERS *Handbuch der praktischen Astronomie*, 1788, eingeschrieben.]

[**] Die Bezeichnung N kommt bei BOHNENBERGER nicht vor; GAUSS hatte wohl die auf S. 350 der *Anleitung* stehenden Näherungsformeln vor Augen, in denen der gemeinsame Nenner $\cos B (\sin \frac{1}{2} A)^2$ in der Bezeichnung von GAUSS gleich $\frac{1}{2M}$ ist.]

***) GAUSS' Bezeichnungen weichen von denen BOHNENBERGERS etwas ab, vergl. die Zusammenstellung der Bezeichnungen bei BOHNENBERGER a. a. O. S. 345.

Die zu Anfang unserer Briefstelle erwähnte Bedeckung von τ aquarii ist wohl diejenige, die nach den Allgemeinen geographischen Ephemeriden **3**, 1799, S. 202 am 13. Dezember 1798 stattgefunden hat und von dem damaligen K. Preuß. Obersten und General-Quartiermeister bei der Neutralitäts-Armee VON LECOQ in Preußisch-Minden beobachtet worden ist. Die Vergleichung mit den im GAUSSARCHIV befindlichen Briefen VON LECOQS AN GAUSS zeigt, daß der hier im Auszug mitgeteilte Brief vom 17. April 1799 an VON LECOQ gerichtet ist. In seinem Bericht *Über die trigonometrische Aufnahme in Westphalen* *) schreibt VON LECOQ (S. 139): »Im astronomischen Theile ist mir der Doctor GAUSS von großem Nutzen gewesen; seine Ausrechnungen und Briefe haben zu meinem Unterrichte viel beygetragen . . .«.

GALLE.

[98.]

Terminum medium arithmetico-geometricum inter 1 et $\sqrt{2}$ esse $= \frac{\pi}{\varpi}$ usque ad figuram undecimam comprobavimus, qua re demonstrata prorsus novus campus in analysi certo aperietur.

Br[unsvigae, 1799] Mai. 30.

Der hier niedergelegten Bemerkung, sie mag dem Zufall oder einer Vermutung ihre Entstehung verdanken, muß die genaue Berechnung der beiden Größen $\frac{\pi}{\varpi}$ und $M(\sqrt{2}, 1)$ vorhergegangen sein. Für $\frac{\pi}{\varpi}$ läßt sich dies auch in der Tat nachweisen. Nach der EULERSCHEN Beziehung **)

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{4}$$

st nämlich

$$(*) \quad 2 \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{\varpi},$$

da ja

$$\varpi = 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

ist. Den bei STIRLING ***) auf 17 Dezimalstellen berechneten Wert des Integrals $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}}$, d. h. der *Ordinata Curvae Elasticae* hat GAUSS damals sicherlich gekannt (vergl. oben S. 145); auf das Schutzblatt des LEISTE hat er neben den dort notierten Näherungswert $1,198 \pm$ des Integrales (*) mit genau denselben Schriftzügen, wie sie die Tagebuchnotiz Nr. 98 zeigt, die Zeichen $\approx \frac{\pi}{\varpi}$ hingeschrieben (siehe oben S. 146,

*) Monatliche Correspondenz **8**, 1803, S. 136 ff., S. 197 ff.

**) Siehe *Institutiones calculi integralis* I (1768), § 334, Opera omnia, ser. I, vol. 11, S. 210, vergl. oben S. 150, Gl. (3), wo infolge eines Druckfehlers $\frac{\pi}{2}$ statt $\frac{\pi}{4}$ steht.

***) *Methodus Differentialis etc.*, Londini 1730, S. 57.

art. [3.]). Ferner tritt die Größe $\frac{\pi}{\omega}$ auf, wenn man aus der Gleichung

$$\sin \text{lemn } \varphi = \sin \text{circuli } \chi$$

(siehe oben S. 170, art. [6.]) χ durch φ in Bogenmaß darstellen will. Endlich haben die Darstellungen der Zähler und Nenner von sinus lemniscaticus, $P\varphi$, $Q\varphi$, wie sie in der Scheda Aa (Werke III, S. 418 und oben S. 537) und auch in der Scheda Ac (siehe oben S. 195, Gleichung [8], [9]) gegeben sind, beide den Faktor $\sqrt{\frac{\pi}{\omega}}$. — In bezug auf $M(\sqrt{2}, 1)$ wissen wir nur, daß es als Beispiel in der Scheda Ab (siehe oben S. 174) und auch im LEISTE (siehe oben S. 180, dort allerdings $M(1, \sqrt{\frac{1}{2}})$) auftritt, aber diese beiden Stellen sind wohl erst nach der in der Tagebuchnotiz Nr. 98 gemachten Bemerkung geschrieben. Die Veranlassung $M(\sqrt{2}, 1)$ zu betrachten, könnte für GAUSS vielleicht in einer Bemerkung STIRLINGS gelegen haben, der auf S. 57 seines angeführten Werkes im Exemplum IV sagt: »Quod si longitudini Elasticæ adiciatur sua Ordinata, habebitur numerus 1, 9100 9889 4513 8559 8, qui est semiperipheria Ellipseos habentis 1 et $\sqrt{2}$ pro Axibus«. Es ist in der Tat

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^1 dx \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}.$$

In der Abhandlung von 1800 hat GAUSS im Exemplum 4. den Wert von $M(\sqrt{2}, 1)$ auf 19 Dezimalstellen berechnet (siehe Werke III, S. 364).

Die Voraussage, daß der Beweis für dieses Ineinandergreifen der lemniskatischen Funktionen mit dem agM. sicher ein neues Feld der Analysis eröffnen werde, zeigt, eine wie hohe Bedeutung GAUSS der Bemerkung vom 30. Mai 1799 beigelegt hat. Dies kommt auch darin zum Ausdruck, daß er diese Bemerkung an JOH. FRIEDR. PFAFF brieflich mitgeteilt hat. Aus der oben S. 232 abgedruckten Antwort PFAFFS vom 24. November 1799 geht hervor, daß GAUSS, als er an PFAFF über den Gegenstand schrieb, noch nicht im Besitz des Beweises der Gleichung

$$\frac{\pi}{\omega} = M(\sqrt{2}, 1)$$

gewesen ist. Die vollständige Durchführung dieses Beweises scheint ihm erst im November 1799 gelungen zu sein (siehe die Bemerkungen zu den Abschnitten [II.] bis [IV.] der *Theorie des agM.*, oben S. 273 und die Tagebuchnotiz Nr. 100). Die Tragweite der Bemerkung der Nr. 98 für die Entwicklung von GAUSS Gedankengang besteht darin, daß GAUSS durch sie auf die Wichtigkeit des reziproken Wertes des agM. aufmerksam wurde, während er früher (vergl. das *Specimen*, oben S. 172) nur das agM. selbst betrachtet hatte. Vergl. dafür auch den Schluß des art. 5. der Abhandlung von 1800, Werke III, S. 366.

KLEIN. SCHLESINGER.

[99.]

In principiis Geometriae egregios progressus fecimus.

Br[unsvigae, 1799] Sept.

Für diese Arbeiten über die ersten Gründe der Geometrie siehe den Brief von GAUSS an WOLFGANG BOLYAI vom 16. Dezember 1799, Werke VIII, S. 159. Wahrscheinlich stammt auch der Beweis des Lehr-

satzes vom Flächeninhalt des Dreiecks, den GAUSS in dem Briefe an WOLFGANG BOLYAI vom 6. März 1832 mitteilt (Werke VIII, S. 221), aus dieser frühen Zeit; vergl. den Aufsatz »GAUSS als Geometer«, Werke X 2. STÄCKEL.

[100.]

Circa terminos medios arithmetico-geometricos multa nova deteximus.

Br[unsvigae, 1799] Novemb.

Man wird als Belege für die hier angezeigten Entdeckungen die Leisteaufzeichnungen im Abschnitt [II.], oben S. 177 und die artt. [1.]-[3.] aus der Scheda Ac des Abschnitts [IV.], oben S. 184 anzusehen haben. Natürlich sind nicht alle diese Entdeckungen im November gemacht worden, die Eintragung ins *Tagebuch* wird vielmehr nur die Bedeutung haben, daß vor der Abreise nach Helmstedt ein Teil der erlangten Ergebnisse in die damals begonnene Scheda Ac eingetragen worden ist.

KLEIN. SCHLESINGER.

[101.]

Medium arithmetico-geometricum tamquam quotientem duarum functionum transcenduntium repraesentabile esse iam pridem inveneramus; nunc alteram harum functionum ad quantitates integrales reducibilem esse deteximus.

Helmst[adii, 1799] Dec. 14.

Der erste Satz bezieht sich auf die Quotientendarstellung [7], oben S. 186, der zweite auf die Formeln [13]-[16] des art. [4.], oben S. 187, nach denen der Zähler dem reziproken Werte von

$$\int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{(1-r^2)(x^2-r^2)}}$$

gleich gefunden wird. Das ursprünglich irrtümlicherweise hingeschriebene Integral zweiter Gattung hat GAUSS vergessen durchzustreichen.

KLEIN. SCHLESINGER.

[102.]

Medium Arithmetico-Geometricum ipsum est quantitas integralis. Dem[onstratum].

[1799] Dec. 23.

Man könnte diese Notiz mit der Gleichung [20], oben S. 187, in Verbindung bringen, die ja vermöge der Integraldarstellung [16] von Q auch eine Integraldarstellung für den reziproken Wert des agM. liefert; für eine solche Verbindung spräche auch das hier wie dort später hinzugeschriebene demonstr[atum]. Dagegen wäre es nicht recht verständlich, weshalb GAUSS neun Tage (14.—23. Dezember) gebraucht haben sollte, um aus der Darstellung [16] die Folgerung [20] zu ziehen; auch machen die Aufzeichnungen auf S. 11 der Scheda Ac dem Ansehen der Schriftzüge nach den Eindruck, unmittelbar hintereinander geschrieben zu

sein. Und in der Tat scheint die fast wörtliche Übereinstimmung mit der Bemerkung im art. 8. der Abhandlung von 1800, Werke III, S. 370: »hoc itaque modo media nostra arithmetico-geometrica ad quantitates integrales revocata sunt« eher darauf hinzudeuten, daß es sich hier darum handelt, daß der reziproke Wert des agM. als das Integral einer einfachen Differentialgleichung definiert werden kann, so daß der Abschnitt [III.], oben S. 181, hier als Beleg heranzuziehen wäre.

KLEIN. SCHLESINGER.

[103.]

In theoria formarum trinarum formas reductas assignare contigit.

1800 Febr. 13.

Dasselbe Datum Werke I, S. 476, Bemerkung zum art. 272. der *Disquisitiones arithmeticae*, Werke I, S. 307. Während die Notizen Nr. 100 bis Nr. 102 mit den Aufzeichnungen auf S. 7—15 der Scheda Ac (siehe oben S. 184—193) in Verbindung stehen, gehört zu dieser Notiz eine Eintragung auf S. 22 der Scheda, die Werke II, S. 311 abgedruckt ist.

KLEIN. SCHLESINGER.

[104.]

Series[*]]

$$a \cos A + a' \cos (A + \varphi) + a'' \cos (A + 2\varphi) + \text{etc.}$$

ad limitem convergit, si a, a', a'' etc. constituunt progressionem sine mutatione signi ad 0 continuo convergentem. Demonstratum.

Brunov[ici, 1800] Apr. 27.

Es ist hier der Satz ausgesprochen, daß die Reihen

$$\begin{aligned} a + a' \cos \varphi + a'' \cos 2\varphi + \dots, \\ a' \sin \varphi + a'' \sin 2\varphi + \dots \end{aligned}$$

konvergieren, wenn die a, a', a'', \dots monoton**) der Null zustreben. Dieser Satz ist zuerst veröffentlicht und bewiesen von HJALMAR HOLMGREN, *Journal de Mathematiques* 16, 1851, S. 186, mit einer überflüssigen Einschränkung schon von C. J. MALMSTEN, *Nova acta Upsal.* 12, 1844, S. 255.

SCHLESINGER.

[*] Die Handschrift hat Seriem.]

***) Das liegt in dem continuo des Tagebuchttextes. Ohne diese Einschränkung ist der Satz bekanntlich nicht richtig.

[105.]

Theorian quantitatum transcendentium:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-\alpha xx)(1-\beta xx)}}$$

ad summam universalitatem perduximus.

Brunov[ici, 1800] Mai. 6.

Die Aufdeckung des Zusammenhangs zwischen dem agM. und dem vollständigen elliptischen Integral erster Gattung, sowie die in dem besondern Falle der lemniskatischen Functionen gewonnenen Einsichten, führten GAUSS zu der Erkenntnis, daß die Größen

$$(*) \quad \frac{c}{M(1, c)}, \quad \frac{e}{M(1, s)} \quad (s = \sqrt{1-c^2})$$

(siehe den art. [7.], oben S. 190, aus Scheda Ac, S. 13) für das elliptische Integral mit dem Modul s die analoge Rolle spielen, wie die Größe

$$\frac{1}{M(\sqrt{2}, 1)} = \frac{\pi}{\pi}$$

auf die sie sich für $s = \sqrt{\frac{1}{2}}$ reduzieren, für die Lemniskate. Daß GAUSS' Auffassung dieser Größen (der Periodizitätsmoduln) dem neuern Standpunkte sehr nahe gewesen sein muß, zeigt die folgende Aufzeichnung, die sich auf einem Zettel ohne Datum findet:

Der Radicalfehler, woran meine bisherigen Bestrebungen, den Geist der elliptischen Function zu verkörpern, gescheitert sind, scheint der zu sein, dass ich dem Integral

$$(**) \quad \int \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-e^2 \sin^2 \varphi^2)}}$$

die Bedeutung als Ausdruck eines endlichen Theils der Kugelfläche habe unterlegen wollen, während es wahrscheinlich nur einen unendlich schmalen Kugelsector ausdrücken soll.

Offenbar bedeutet hier die »Kugelfläche« den Ort der komplexen Veränderlichen, der »endliche Theil«, dessen »Ausdruck« das Integral (***) sein sollte, den Fundamentalbereich oder das Periodenparallelogramm; wenn dann GAUSS von »einem unendlich schmalen Kugelsector« spricht, so zeigt dies, daß er damals, als er diesen Zettel schrieb, es für wahrscheinlich hielt, daß man die reellen Größen (*) selbst, oder genauer (vergl. oben S. 194 Gln. [1])

$$\frac{2\pi}{M(1, \sqrt{1-e^2})}, \quad \frac{2\pi}{M(1, e)}$$

als die Periodizitätsmoduln des Integrals (***), für e reell und kleiner als Eins, anzusehen habe. Am 6. Mai hatte er sich zur völligen Klarheit über diese Verhältnisse durchgerungen, und damit war der Weg frei für weitere Fortschritte. Vergl. den Abschnitt IV des Aufsatzes »Über GAUSS' Arbeiten zur Functionentheorie«, Werke X 2.

KLEIN. SCHLESINGER.

[106.]

Incrementum ingens huius theoriae Brunov. Mai. 22 invenire contigit, per quod simul omnia praecedentia nec non theoria mediorum arithmetico-geometricorum pulcherrime nectuntur infinitesque augentur.

[Brunovici, 1800 Mai. 22.]

Es handelt sich hier um die in der Scheda Ac, S. 26 ff. aufgezeichneten Entdeckungen, die oben im Abschnitt [V.] der *Theorie des agM.*, S. 194 ff. artt. [1.]—[8.] abgedruckt sind. »Omnia praecedentia« bedeutet die Theorie der lemniskatischen Funktionen. Der Zusammenhang mit dem agM. tritt besonders im art. [5.] hervor; er besteht darin, daß die im art. [3.] aufgestellten Formeln für die Transformation zweiter Ordnung der Funktionen

$$T\varphi, W\varphi, T\left(\frac{\varpi}{2} - \varphi\right), W\left(\frac{\varpi}{2} - \varphi\right)$$

(die im wesentlichen nichts anderes sind als die JACOBISCHEN Thetafunktionen), wenn man $\varphi = 0$ setzt, für die Reihen

$$W_0, T\frac{\varpi}{2}, W\frac{\varpi}{2}$$

die Beziehungen des agM. liefern. Der Zusammenhang zwischen dem agM. und den Reihen, deren Exponenten die Quadratzahlen sind, erscheint also hier gleichsam als die Projektion der Transformationsformeln des art. [3.] auf die Ebene $\varphi = 0$.

KLEIN. SCHLESINGER.

[107.]

Iisdem diebus circa (Mai. 16.) problema chronologicum de festo paschali eleganter resolvimus.

(Promulgatum in ZACHII Comm. liter. Aug. 1800, p. 121, 223.)

[1800 Mai. 16.]

Der erste, der das Osterfest aus der Jahreszahl mittels arithmetischer Regeln zu bestimmen versucht hat, scheint LAMBERT*) gewesen zu sein, und zwar gilt seine Regel für den julianischen Kalender. Nach CARLINI**) sind unter den Vorläufern von GAUSS noch ORIANI***) und die Patres CANOVAI und DEL RICCO †) zu nennen, die arithmetische Formeln zur Lösung von Aufgaben der Kirchenrechnung aufgestellt haben. Was GAUSS im Jahre 1800 von diesen Arbeiten gekannt haben mag, hat sich nicht feststellen

*) JOH. HEINRICH LAMBERT, *Einige Anmerkungen über die Kirchenrechnung*, Astronom. Jahrbuch für das Jahr 1778, Berlin 1778, S. 210.

**) *Formole analitiche pel calcolo della Pasqua* di LODOVICO CICCOLINI, Roma 1817, Biblioteca italiana 13, 1819, S. 346. Nach dem anschließenden Briefe ebenda S. 350, *Al signor Francesco Carlini astronomo di Brera* ist CARLINI als der Verfasser der Besprechung anzusehen.

***) BARNABA ORIANI, *De usu fractionum continuarum ad inveniendos cyclos calendarii novi et veteris*, Effemeridi di Milano 1786.

†) STANISLAO CANOVAI e GAËTANO DEL RICCO, *Elementi di fisica matematica*, Firenze 1788.

lassen. Seine allgemeine Osterformel, die sowohl für den julianischen als auch für den gregorianischen Kalender gilt, veröffentlichte er unter dem Titel *Berechnung des Osterfestes* in v. ZACHS Monatlicher Correspondenz der Erd- und Himmelskunde, August 1800, S. 121, Verbesserungen S. 223, Werke VI, S. 73; vergl. *Noch etwas über die Bestimmung des Osterfestes*, Braunschweigisches Magazin 12. September 1807, Werke VI, S. 82, ferner *Eine leichte Methode, den Ostersonntag zu finden*, Astronom. Jahrbuch für das Jahr 1814, Berlin 1811, S. 273, und die durch P. TITTEL veranlaßte *Berichtigung zu dem Aufsätze: Berechnung des Osterfestes u.s.w.*, Zeitschrift für Astronomie, herausgeg. von v. LINDENAU und BOHNENBERGER 1, 1816, S. 158 *). Daß die GAUSSsche Osterregel in ihrer ursprünglichen Form vom Jahre 4200 an ihre Gültigkeit verliert, hat zuerst FRANÇAIS **) öffentlich festgestellt und gleichzeitig die folgende Abänderung angegeben, durch die die GAUSSsche Vorschrift unbeschränkte Geltung erlangt: Bezeichnet man den Quotienten, der sich bei der Division der ganzen Zahl a durch die ganze Zahl b ergibt, durch $Q\left(\frac{a}{b}\right)$, bedeutet A die Jahreszahl und setzt man $k = Q\left(\frac{A}{100}\right)$, so hat man die Zahl p , die nach GAUSS ursprünglicher Festsetzung (Werke VI, S. 73) gleich $Q\left(\frac{k}{3}\right)$ zu nehmen ist, nach FRANÇAIS durch die Formel

$$p = Q\left(\frac{k - Q\left(\frac{k-17}{25}\right)}{3}\right)$$

zu bestimmen, was mit der von GAUSS in der Zeitschrift für Astronomie 1816 angegebenen Festsetzung ***)

$$p = Q\left(\frac{8k + 13}{25}\right)$$

übereinstimmt, aber für die Rechnung etwas bequemer ist.

LOEWY.

[108.]

Numeratorem et denominatorem sinus lemniscatici (universalissime accepti) ad quantitates integrales reducere contigit; simul omnium functionum lemniscaticarum, quae excogitari possunt, evolutiones in series infinitas ex principiis genuinis haustae; inventum pulcherrimum sane nullique praecedentium inferius.

Praeterea iisdem diebus principia deteximus, secundum quae series arithmetico-geometricae interpolari debent, ita ut terminos in progressionem data ad indicem quemcunque rationalem pertinentes per aequationes algebraicas exhibere iam in potestate sit.

[1800] Mai. ult. Iun. 2. 3.

Der *sinus lemniscaticus universalissime acceptus* ist die in der Scheda Ac, S. 26, siehe oben S. 194, nach der Analogie des sinus lemniscaticus aufgebaute Funktion $S\varphi$. Die Zurückführung des Zählers und

*) Die beiden letztgenannten Aufsätze sind im VI. Bande der Werke nicht enthalten; sie werden mit noch einigen zur Chronologie gehörigen Nachlaßstücken im Bande XI 1 abgedruckt.

**) J. F. FRANÇAIS, *Solution directe des principaux problèmes du calendrier*, Annales de Mathématiques pures et appliquées 4, 1813, S. 273.

***) Siehe auch die Werke VI, S. 79, Zeile 5 v. u. abgedruckte handschriftliche Bemerkung.

des Nenners dieser Funktion, d. h. der Funktionen $T\varphi$ und $W\varphi$, auf *quantitates integrales* liefert den unmittelbaren Nachweis dafür, daß ihr Quotient $x = S\varphi$ der Differentialgleichung

$$\left(\frac{dS\varphi}{d\varphi}\right)^2 = (1 + \mu^2 x^2)(1 - x^2)$$

Genüge leistet. Dieser Nachweis ist in der Scheda Ac nicht aufgezeichnet und hat sich auch in keinem andern aus dieser Zeit herrührenden Teile des Nachlasses gefunden. Er ist uns jedoch in zwei späteren Fassungen erhalten, die sich beide in dem Handbuch 16, Bb (begonnen November 1801) befinden. Die ältere, die wahrscheinlich aus dem Jahre 1825 stammt, steht S. 111, 112 des Handbuchs und ist mit Änderungen gegen die Handschrift Werke III, S. 401, 402, unverändert oben S. 308—310 abgedruckt; die spätere, die nach GAUSS' eigener Angabe im August 1827 verfaßt ist, steht S. 139 des Handbuchs und ist Werke III, S. 473, art. [5.] abgedruckt. Daß wir aber diesen Nachweis für die Zeit unserer Tagebuchnotiz in Anspruch nehmen dürfen, folgt daraus, daß er wesentlich auf den Formeln für die Transformation zweiter Ordnung der Funktionen

$$T\varphi, W\varphi, T\left(\frac{\varpi}{2} - \varphi\right), W\left(\frac{\varpi}{2} - \varphi\right)$$

beruht, die auf S. 31 der Scheda Ac aufgezeichnet sind (siehe oben S. 195, 196, art. [3.]), so daß dieser Umstand erst den Grund dafür erkennen läßt, weshalb GAUSS diese Transformationsformeln in der Scheda Ac entwickelt. Ferner wird die für die Ausführung jenes Nachweises erforderliche Formel, S. 111 des Handbuchs 16, Bb,

$$ab' - ba' = \frac{1}{2} ab(a^4 - b^4),$$

(siehe oben S. 310) von der GAUSS a. a. O. sagt, daß der Beweis davon tiefer liegt, in der Scheda Af, S. 13 (abgedruckt oben S. 212, art. [5.]) als besonderes *Theorema* abgeleitet; diese Scheda Af ist aber ganz im Jahre 1801 geschrieben worden. —

Die im zweiten Satze des ersten Absatzes unseres Tagebuchttextes bezeichnete Entwicklung »aller nur denkbaren lemniskatischen Funktionen in unendliche Reihen aus genuinen Prinzipien abgeleitet« bezieht sich auf die S. 41 und 43 der Scheda Ac befindlichen Rechnungen (abgedruckt oben S. 202, art. [10.] und S. 204, art. [12.]), die auf die Ableitung der berühmten Identität zwischen den Reihen- und den Produktentwicklungen der Thetafunktionen:

$$\begin{aligned} & (1 + \alpha x)(1 + \alpha x^3)(1 + \alpha x^5) \dots \left(1 + \frac{x}{\alpha}\right)\left(1 + \frac{x^3}{\alpha}\right)\left(1 + \frac{x^5}{\alpha}\right) \\ & = P\left(1 + x\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + x^4\left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}\right) + x^9\left(\alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3}\right) + \dots\right), \end{aligned}$$

wo P von α unabhängig ist, hinzielen. Vermöge dieser Identität ist GAUSS nämlich imstande, für eine beliebige Thetafunktion die durch Kenntnis ihrer Nullstellen gegebene Produktentwicklung in eine Reihenentwicklung umzusetzen.

Der zweite Absatz der Notiz Nr. 108 betrifft die Gleichung für die Teilung der Perioden. Eine darauf bezügliche Aufzeichnung aus dieser Zeit ist uns nicht erhalten.

KLEIN. SCHLESINGER.

[109.]

Inter duos numeros datos semper dantur infinite multi termini medii tum arithmetico geometrici tum harmonico geometrici, quorum nexum mutuuum ex asse perspiciendi felicitas nobis est facta.

[1800] Iunio 3. Brunov[ici]

Eine mit dieser Notiz gleichzeitige Aufzeichnung, die sich auf die unendlich vielen Werte des agM. bezieht, ist uns nicht erhalten. Dagegen steht der »nexum mutuuum« auf einem Zettel, der oben S. 218 ff., art. [2.]—[6.], abgedruckt ist, und der schon durch das Wasserzeichen FHF 1810 auf eine wesentlich spätere Zeit verwiesen wird; er dürfte (vergl. die Bemerkungen oben S. 282) etwa 1825 geschrieben sein. Die hier in Betracht kommende Stelle ist namentlich die Formel

$$(*) \quad \frac{1}{(\mu)} = \frac{1}{\mu} + \frac{4ik}{\lambda},$$

wo

$$\mu = M(m, n), \quad \lambda = M(m, \sqrt{m^2 - n^2})$$

ist und (μ) einen der Werte bedeutet, die man für das agM. zwischen m und n erhält, wenn man »für ein n' , n'' , n''' etc. einen negativen Wert wählt«. Die Formel $(*)$ setzt überdies voraus, daß wenn der reale Teil von $\frac{\mu}{\lambda}$ wesentlich positiv ist, das gleiche auch für den realen Teil von $\frac{(\mu)}{\lambda}$ gilt (vergl. oben S. 281). Der Weg, auf dem GAUSS zu diesem Ergebnis vorgedrungen ist, kann, da Aufzeichnungen aus der Zeit der Entdeckung fehlen, nicht mit voller Sicherheit angegeben werden. Die Aufzeichnung von 1825 weist darauf hin, daß GAUSS die Formel $(*)$ wohl aus der Darstellung der $m, n, \sqrt{m^2 - n^2}$ mit Hilfe der Thetanullreihen p, q, r gefunden hat (siehe besonders den art. [6.] oben S. 222, 223, wo der allgemeinste Wert von M aufgestellt wird, für den $\frac{q^2}{p^2} = \frac{n}{m}$ ungeändert bleibt). Die Wendungen »ex asse perspiciendi« und das sonst nur bei zahlentheoretischen Ergebnissen vorkommende »felicitas nobis est facta« (siehe die Nummern 30, 73, 114, 141 des *Tagebuchs*) geben der Annahme Raum, daß GAUSS auch sogleich die Beziehungen zur Theorie der binären quadratischen Formen durchschaut haben wird.

Das harmonische Mittel zwischen zwei Zahlen m, n ist durch die Gleichung

$$m_1 = \frac{2mn}{m+n}$$

erklärt. Der Algorithmus des harmonisch-geometrischen Mittels ist demnach:

$$\frac{1}{m_{x+1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_x} + \frac{1}{n_x} \right), \quad \frac{1}{n_{x+1}} = \sqrt{\frac{1}{m_x} \cdot \frac{1}{n_x}}$$

$(x = 0, 1, 2, \dots; m_0 = m, n_0 = n),$

so daß sich

$$\lim_{x \rightarrow \infty} m_x = \lim_{x \rightarrow \infty} n_x = \frac{mn}{M(a, b)}$$

ergibt, wodurch das harmonisch-geometrische Mittel auf das agM. zurückgeführt ist*). In der Scheda Ac findet sich auf S. 20 die folgende Notiz:

*) Vergl. TH. LOHNSTEIN, Zeitschrift für Math. und Physik **33** (1888), S. 316.

Terminus constans expressionis

$$\frac{A d\varphi}{\sqrt{(f + 2g \cos \varphi + h \cos \varphi^2)}}$$

est Medium Geometrico harmonicum inter

$$\frac{A}{\sqrt{\frac{\sqrt{(f+h)^2 - 4gg} + f - h}{2}}} \text{ et } \frac{A}{\sqrt[4]{(f+h)^2 - 4gg}}$$

An einer andern, oben S. 14—16 abgedruckten Stelle der Scheda Ac, hat GAUSS in Verbindung mit gewissen mittleren Werten der Zahlentheorie ein arithmetisch-harmonisches Mittel betrachtet (siehe besonders S. 16, art. [3.]).

KLEIN. SCHLESINGER.

[110.]

Theoriam nostram iam ad transcendentem ellipticas immediate applicavimus.

1800 Iunio 5.

Transcendentem ellipticam sind (vergl. den oben bei der Nr. 105 wiedergegebenen Zettel) Integrale erster Gattung. Man wird also diese Notiz auf den Algorithmus beziehen, den GAUSS z. B. auf den oben S. 227, 228, artt. [10.] und [12.] abgedruckten Zetteln und im art. 18. der *Determinatio attractionis*, Werke III, S. 354 entwickelt hat, und der nach dem geeignet normierten Integral erster Gattung mit veränderlicher oberer Grenze als Grenzwert hinstrebt. Vergl. auch den »bilinearen Algorithmus« der Scheda An, oben S. 213.

KLEIN. SCHLESINGER.

[111.]

Rectificatio Ellipseos tribus modis diversis absoluta.

[1800] Iun. 10.

Zwei dieser Methoden sind auf dem oben S. 227 ff. abgedruckten Zettel und zwar in den artt. [12.] und [13.] wiedergegeben. Vergl. auch die Anzeige der Abhandlung *Determinatio attractionis*, Werke III, S. 360 und den art. 17. dieser Abhandlung selbst, ebenda S. 354.

KLEIN. SCHLESINGER.

[112.]

Calculus Numerico-Exponentialis omnino novum invenimus.

[1800] Iun. 12.

Es handelt sich vermutlich um die numerischen Berechnungen von Potenzen der Zahl e , die in einem besondern Päckchen gesammelt im Nachlaß vorhanden (Fh, Nr. 2, Kapsel 50) und Werke III, S. 426—431 unter der Überschrift *Sammlung von Rechnungen, vornehmlich solchen, bei denen von meinen Methoden, die*

Factoren grosser Zahlen zu finden, und von den Wolframschen Logarithmentafeln Gebrauch gemacht ist abgedruckt sind. Es werden daselbst die gesuchten Exponentialgrößen durch Produkte ganzer Zahlen approximiert, und da man die Logarithmen nach WOLFRAM sehr genau kennt, so bleibt nur noch e^δ zu berechnen, wo δ eine sehr kleine, sehr genau bekannte Zahl ist.

Die WOLFRAMSchen Tafeln *), auf die GAUSS in der Überschrift ausdrücklich hinweist, sind zum ersten Male in der SCHULZESchen *Sammlung logarithmischer u.s.w. Tafeln* veröffentlicht worden; einen Abdruck dieser Tafeln hat GAUSS im Jahre 1791, als er zum ersten Male in Braunschweig bei Hofe vorgestellt wurde, von dem damaligen braunschweigischen Staatsminister Geheimen Rat FERONCE v. ROTHENKREUZ zum Geschenk erhalten**). Dieser Abdruck mit vielen handschriftlichen Eintragungen von GAUSS (vergl. oben S. 11, in der Überschrift) befindet sich im GAUSSarchiv.

KLEIN. SCHLESINGER.

[113.]

Problema e calculo probabilitatis circa fractiones continuas olim frustratentatum solvimus.

[1800] Oct. 25.

Das Problem, von dem hier die Rede ist, erwähnt GAUSS in dem oben S. 371 abgedruckten Briefe an LAPLACE vom 30. Januar 1812, in dem er von einer Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung schreibt, mit der er sich vor 12 Jahren beschäftigt habe. Es handelt sich danach um die folgende Frage: Es sei M eine unbekannte, zwischen 0 und 1 gelegene Größe, für die alle Werte in gleichem Maße wahrscheinlich sind; man verwandle M in einen Kettenbruch

$$M = \frac{1}{a' + \frac{1}{a'' + \text{etc.}}}$$

mit positiven ganzzahligen Nennern a', a'', \dots und frage nach der Wahrscheinlichkeit $P(n, x)$ dafür, daß der Wert des Kettenbruchs

$$\frac{1}{a^{(n+1)} + \frac{1}{a^{(n+2)} + \text{etc.}}}$$

zwischen den Grenzen 0 und x liege, wo auch x einen positiven echten Bruch bedeutet. — Hieraus geht hervor, daß eine in dem als Scheda Ab bezeichneten Hefte des Nachlasses befindliche Aufzeichnung vom 5. Februar 1799 ***) die Untersuchungen wiedergibt, auf die GAUSS in der vorliegenden Tagebuchnotiz mit den Worten hinweist: *olim frustra tentatum*. Wir lassen zunächst diese ältere Aufzeichnung hier folgen.

*) *Natürliche oder hyperbolische Logarithmen bis auf 48 Decimalstellen, von Herrn Wolfram berechnet.*

**) Vergl. L. HÄNSELNANN, *K. F. Gauss*, Leipzig 1878, S. 25, 26.

***) Diese Aufzeichnung hat SCHLESINGER in der Scheda Ab bemerkt und für den nachstehenden Abdruck bearbeitet.

Disquisitiones ad Calculum probabilitatis pertinentes. Febr. 5.

[Aus Scheda Ab, Exercitationes atque Schedae analyticae, 1798 Nov., S. 5 und 4.]

Quantitas quaedam incognita A , quae supponitur iacere inter 0 et 1, ita ut probabilitas eam iacere inter binos arctiores limites aequo-distantes eadem sit, transmutatur in fractionem continuam formae [*]

$$\frac{1}{a' + \frac{1}{a'' + \frac{1}{a''' + \text{etc.}}}}$$

Quanta est probabilitas, ut aliquis denominatorum a', a'', a''' etc., cuius locus datur, numero integro dato sit aequalis?

Brevitatis gratia designamus per $\varphi'x$ probabilitatem fractionem primariam esse inter 0 et x ; per $\varphi''x$ prob[abilitatem] fractionem secundam

$$\frac{1}{a'' + \frac{1}{a''' + \text{etc.}}}$$

iacere inter 0 et x ; similiterque $\varphi'''x$ etc. Tum erit

[1] $\varphi'x = x,$

[2] $\varphi^{n+1}x = \varphi^n 1 - \varphi^n \frac{1}{1+x} + \varphi^n \frac{1}{2} - \varphi^n \frac{1}{2+x} + \text{etc.}$

Quare erit

[3] $\varphi''x = 1 \left[-\frac{1}{1+x} \right] + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2+x} \right] + \frac{1}{3} \left[-\frac{1}{3+x} \right] + \dots [**].$

[4] $\varphi^{n+1} \frac{1}{2} = 1 - \varphi^n \frac{2}{3} + \dots,$ $\varphi'' \frac{1}{2} = \frac{2}{2} - \frac{2}{3} + \frac{2}{4} - \frac{2}{5} + \dots$

$\left[\psi x = \varphi^n \frac{1}{x}, \quad \psi'x = \varphi^{n+1} \frac{1}{x}, \right]$ $\varphi'' \frac{2}{3} = \frac{3}{3} - \frac{3}{5} + \frac{3}{6} - \frac{3}{8} + \dots$

$\psi' \frac{1}{x} = \psi 1 - \psi(1+x)$ $\varphi'' \frac{2}{5} = \frac{5}{5} - \frac{5}{7} + \frac{5}{10} - \frac{5}{12} + \dots$

$+ \psi 2 - \psi(2+x)$

$+ \dots \dots \dots$

[*] In der Handschrift sind die im folgenden auftretenden Nenner statt mit a', a'', a''', \dots mit [1], [2], [3], ... bezeichnet.

[**] In der Handschrift lautet diese Stelle: »Quare $\varphi''x$ erit $= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{x}$ «, was aber nur für positive ganzzahlige Werte von x gilt, vergl. *Disquisitiones circa seriem*, 1812, art. 31., Gl. [67], Werke III, S. 154.]

x	$\varphi'' x$	$\varphi''' x$
0	0	
1	1	
$\frac{1}{2} = 0,5$	$2 - 2 \log 2 = 0,6137$	0,5748
$\frac{1}{3} = 0,333 \dots$	$3 - \frac{3}{2} \log 3 - \frac{\pi}{\sqrt{12}} = 0,4451818$	
$\frac{2}{3} = 0,666 \dots$	$\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \log 3 + \frac{\pi}{\sqrt{12}} = 0,7590$	

[S. 4]

Tam complicatae evadunt, ut nulla spes superesse videatur.

Dazu ist folgendes zu bemerken. Wenn die erste Stufe der Kettenbruchentwicklung des positiven echten Bruches M

$$M = \frac{1}{a' + \mu}$$

ist, wo a' eine positive ganze Zahl und μ wieder einen echten Bruch bedeutet, so können die positiven echten Brüche M nach den Werten von a' in Klassen eingeteilt werden und die Werte einer Klasse werden in abnehmender Folge durchlaufen, wenn μ von 0 einschließlich bis 1 ausschließlich wächst; es sind die Zahlen des Intervalls von $\frac{1}{a'}$ bis $\frac{1}{a'+1}$, dessen Länge $\frac{1}{a'} - \frac{1}{a'+1}$ ist.

Nach der Fragestellung von GAUSS werden jetzt die Zahlen herausgehoben, bei denen μ zwischen 0 und x liegt, wo $0 < x < 1$. In der Klasse a' sind dies die Zahlen zwischen $\frac{1}{a'}$ und $\frac{1}{a'+x}$. Sind diese gleich wahrscheinlich, so liefert also das Intervall den Beitrag $\frac{1}{a'} - \frac{1}{a'+x}$, und da das Gesamtintervall der Werte M die Länge 1 hat, so ergibt sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit in Übereinstimmung mit der Gleichung [3] auf voriger Seite

$$(5) \quad P(1, x) = \varphi''(x) = \sum_{a'=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{a'} - \frac{1}{a'+x} \right\} = \Psi(x) - \Psi(0),$$

wenn (vergl. die *Disquis. circa seriem*, 1812, Werke III, S. 153)

$$\Psi(x) = \frac{d \log \Pi(x)}{dx}$$

die logarithmische Ableitung der GAUSSschen Π -Funktion bedeutet. Damit ist die Angabe von GAUSS in dem Briefe an LAPLACE (siehe oben S. 372), daß $P(1, x)$ von der inexplikablen Funktion EULERS

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{x}$$

abhänge, bestätigt.

Beim nächsten Schritt wird

$$M = \frac{1}{a' + \frac{1}{a'' + \nu}}$$

gesetzt, wo a', a'' ganze, positive Zahlen sind und ν einen echten Bruch bedeutet. Man findet

$$P(2, x) = \varphi'''(x) = \sum_{a' \equiv 1}^{\infty} \sum_{a'' \equiv 1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{a' + \frac{1}{a'' + x}} - \frac{1}{a' + \frac{1}{a''}} \right\},$$

indem die Zahlen der Klasse a' in Unterklassen nach dem Werte der Zahlen a'' eingeteilt werden, die jetzt, wenn v von 0 bis 1 wächst, in zunehmender Folge durchlaufen werden.

Allgemein ist *)

$$P(n, x) = \varphi^{(n+1)}(x) = \sum_{a', \dots, a^{(n)}} \left| \frac{1}{a' + \frac{1}{a'' + \dots + \frac{1}{a^{(n)}}}} - \frac{1}{a' + \frac{1}{a'' + \dots + \frac{1}{a^{(n)} + x}} \right|$$

Bezeichnet man den n -ten Näherungsbruch des Kettenbruchs für M mit $\frac{A_n}{B_n}$, wo

$$|A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n| = 1$$

ist, so erhält man

$$(6) \quad P(n, x) = \sum_{a', \dots, a^{(n)}} \left| \frac{A_n}{B_n} - \frac{A_n + x A_{n-1}}{B_n + x B_{n-1}} \right| = \sum_{a', \dots, a^{(n)}} \frac{x}{B_n (B_n + x B_{n-1})}.$$

Da nun

$$B_{n+1} = a^{(n+1)} B_n + B_{n-1}$$

ist, so ergibt sich

$$\begin{aligned} P(n+1, x) &= \sum_{a', \dots, a^{(n+1)}} \frac{x}{(a^{(n+1)} B_n + B_{n-1})(a^{(n+1)} B_n + B_{n-1} + x B_n)} \\ &= \sum_{a', \dots, a^{(n)}} \sum_{a^{(n+1)} \equiv 1}^{\infty} \left\{ \frac{\frac{1}{a^{(n+1)}}}{B_n \left(B_n + \frac{1}{a^{(n+1)}} B_{n-1} \right)} - \frac{\frac{1}{a^{(n+1)} + x}}{B_n \left(B_n + \frac{1}{a^{(n+1)} + x} B_{n-1} \right)} \right\}, \end{aligned}$$

also indem man die n -fache Summe nach (6) auswertet

$$(7) \quad P(n+1, x) = \sum_{v=1}^{\infty} \left\{ P\left(n, \frac{1}{v}\right) - P\left(n, \frac{1}{v+x}\right) \right\},$$

und dies ist nichts anderes, als die von GAUSS aufgestellte Gleichung [2].

Nach der Tagebuchaufzeichnung Nr. 113 ist es GAUSS im Oktober 1800 gelungen »das Problem zu lösen«. Gemeint ist damit der von ihm in dem Briefe an LAPLACE (oben S. 372) angegebene asymptotische Wert

$$(8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(n, x) = \frac{\log(1+x)}{\log 2}.$$

Wie GAUSS diesen Wert gefunden haben mag, hat sich nicht feststellen lassen. Unter der Voraussetzung, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n, x) = f(x)$ existiert, ergibt sich aus (7)

$$(9) \quad f(x) = \sum_{v=1}^{\infty} \left\{ f\left(\frac{1}{v}\right) - f\left(\frac{1}{v+x}\right) \right\}$$

und diese Funktionalgleichung wird offenbar durch den Wert

$$(10) \quad f(x) = \text{const.} \log(1+x)$$

*) Für diesen Absatz benutzen wir eine briefliche Mitteilung von O. PERRON.

befriedigt. Da für $P(n, x)$ als Wahrscheinlichkeit sofort $P(n, 1) = 1$ folgt, ist auch $f(1) = 1$, mithin ergibt sich aus (10) in Übereinstimmung mit (8)

$$f(x) = \frac{\log(1+x)}{\log 2}.$$

STÄCKEL.

[114.]

Nov. 30. Felix fuit dies, quo multitudinem classium formar[um] binar[ia-
rum] per triplicem methodum assignare largitum est nobis; puta:

1. per prod[uctum] infin[itum],
2. per aggregatum infinitum,
3. per aggregatum finitum cotangentium seu logarithm[orum] sinuum.

Brun[ovici, 1800 Nov. 30.]

Siehe Werke II, S. 285. Vergl. auch die folgende Nummer.

BACHMANN.

[115.]

Dec. 3. Methodum quartam ex omnibus simplicissimam deteximus pro
det[erminantibus] negativis ex sola mult[itudine] numeror[um] ρ, ρ' etc. petitam,
si $Ax + \rho, Ax + \rho'$, etc. sunt formae lineares divisor[um] for[mae] $\square + D$.

Ibid. [Brunovici, 1800 Dec. 3.]

Siehe Werke II, S. 286. Vergl. zu den Nummern 114 und 115 auch die oben S. 91 abgedruckten
Aufzeichnungen und den Schluß des oben S. 235 abgedruckten Briefes von PFAFF vom 8. Dezember 1800,
ferner Werke I, S. 476 die Bemerkung und ebenda S. 466 das Additamentum zu dem art. 306. X der
Disquisitiones arithmeticae, Werke I, S. 375, sowie endlich den Art. 27 des Aufsatzes »Über GAUSS' zahlen-
theoretische Arbeiten« Werke X 2, S. 66.

KLEIN. BACHMANN.

[116.]

Impossibile esse, ut sectio circuli ad aequationes inferiores, quam theoria
nostra suggerit, reducat, demonstratum.

Brunov[ici, 1801] Apr. 6.

Dieselbe Aussage findet sich auch in den *Disquisitiones arithmeticae* (1801) und zwar im art. 365.
(Werke I, S. 462) für den Fall, wo die Anzahl n der Teile, in die der Kreis zu teilen ist, eine Primzahl,
im art. 366. (ebenda, S. 463) für die Fälle, wo diese Anzahl eine Primzahlpotenz und eine beliebige zu-
sammengesetzte Zahl ist. Wahrscheinlich sind diese Bemerkungen ebenso wie die entsprechenden, ihnen im

art. 336. (ebenda, S. 413) vorausgehenden erst während der Drucklegung eingefügt worden*). Ein Beweis für GAUSS' Behauptung ist aber weder in seinen Veröffentlichungen noch in seinem Nachlasse enthalten, auch ist ein Beweis, der nur solche Hilfsmittel benutzt, wie GAUSS sie im Jahre 1801 sonst angewandt hat, bisher nicht veröffentlicht worden. Es soll darum hier ein elementarer Beweis ohne GALOISSche Theorie gegeben werden; er gründet sich auf den folgenden Satz:

Gegeben sei eine Gleichung $J(x) = 0$ vom n -ten Grade, deren Koeffizienten dem Rationalitätsbereiche P angehören und die in P irreduzibel ist. Eine Wurzel ξ_1 dieser Gleichung sei rational mit Koeffizienten aus P dargestellt durch die Größen $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$, wo ρ_1 einer Gleichung $X_1(x) = 0$ genügt, deren Koeffizienten P angehören, und die in P irreduzibel ist, ρ_2 einer Gleichung $X_2(x) = 0$, deren Koeffizienten dem durch Adjunktion von ρ_1 erweiterten Rationalitätsbereiche (P, ρ_1) angehören und die in diesem Bereiche irreduzibel ist u.s.w., endlich ρ_k einer Gleichung $X_k(x) = 0$, deren Koeffizienten dem Rationalitätsbereiche $(P, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{k-1})$ angehören und die in diesem Bereiche irreduzibel ist. Dann ist das Produkt der Grade aller Gleichungen $X_1(x) = 0, X_2(x) = 0, \dots, X_k(x) = 0$ durch den Grad n von $J(x) = 0$ teilbar.

Adjungiert man nämlich dem Bereiche P der Reihe nach ρ_1, ρ_2, \dots , so sei ρ_α die erste dieser Größen, durch deren Adjunktion $J(x) = 0$ reduzibel wird; die Wurzel ξ_1 genügt dann in dem Rationalitätsbereiche $(P, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\alpha)$ einer irreduziblen Gleichung, deren Grad n' kleiner als n ist. Es sei h_α der Grad der in $(P, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{\alpha-1})$ irreduziblen Gleichung $X_\alpha(x) = 0$, der ρ_α genügt; dann ist nach dem Satze von KRONECKER-KNESER**) $\frac{n}{n'} = \frac{h_\alpha}{h'_\alpha}$, wenn h'_α der Grad derjenigen irreduziblen Gleichung ist, die nach Adjunktion von ξ_1 zum Rationalitätsbereiche $(P, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{\alpha-1})$ durch ρ_α befriedigt wird. Bei weiterer Adjunktion der auf ρ_α folgenden Größen bleibe die Gleichung n' -ten Grades für ξ_1 irreduzibel bis zur Adjunktion von ρ_β . In dem Bereiche $(P, \rho_1, \dots, \rho_\alpha, \dots, \rho_\beta)$ genüge ξ_1 einer irreduziblen Gleichung vom Grade $n'' < n'$. Bezeichnet dann h_β den Grad der im Bereiche $(P, \rho_1, \dots, \rho_\alpha, \dots, \rho_{\beta-1})$ irreduziblen Gleichung $X_\beta(x) = 0$, der ρ_β genügt, und h'_β den Grad der irreduziblen Gleichung, die sich für ρ_β im Bereiche $(P, \rho_1, \dots, \rho_\alpha, \dots, \rho_{\beta-1}, \xi_1)$ ergibt, so ist $\frac{n'}{n''} = \frac{h_\beta}{h'_\beta}$. Derart fortfahrend erhält man die weiteren Beziehungen

$$\frac{n''}{n'''} = \frac{h_\gamma}{h'_\gamma}, \quad \frac{n'''}{n^{(4)}} = \frac{h_\delta}{h'_\delta}, \quad \dots$$

Da ξ_1 schließlich rational in $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$ wird, also einer Gleichung ersten Grades genügt, so ergibt sich die Beziehung $\frac{n^{(t-1)}}{1} = \frac{h_t}{h'_t}$, wo $t \leq k$ und h_t der Grad jener irreduziblen Gleichung $X_t(x) = 0$ ist, deren Wurzel ρ_t bewirkt, daß ξ_1 rational bekannt wird, während h'_t den Grad der irreduziblen Gleichung bedeutet, der ρ_t in dem Rationalitätsbereiche $(P, \rho_1, \dots, \rho_\alpha, \dots, \rho_{t-1}, \xi_1)$ genügt. Die Multiplikation der gefundenen

*) Vergl. auch den oben S. 121 abgedruckten Brief von GAUSS an GERLING vom 6. Januar 1819, wo es (oben S. 125) heißt: »Alles hängt dabei von den Factoren der Zahl $\frac{1}{2}(p-1)$ ab; ist diese Zahl eine Potenz von 2, z. B. $p = 3, 5, 17, 257, 65537$, so kommen bloß quadratische Gleichungen vor; hingegen z. B. für $p = 31$, wo $\frac{1}{2}(p-1) = 3 \cdot 5$, ist eine cubische und eine Gleichung vom 5. Grade unausweichlich.

**) Dieser Satz lautet wie folgt: Sind $J_1(x) = 0$ und $J_2(x) = 0$ zwei im Rationalitätsbereiche P irreduzible Gleichungen der Grade n_1 und n_2 mit den Wurzeln η_1 und η_2 und sind die Grade der irreduziblen Gleichungen, denen η_1 nach Adjunktion von η_2 und η_2 nach Adjunktion von η_1 genügen, n'_1 und n'_2 , so ist $\frac{n_1}{n'_1} = \frac{n_2}{n'_2}$. Siehe A. KNESER, Mathem. Annalen 30, 1887, S. 195, CRELLES Journal für Mathem. 106, 1890, S. 51, O. HÖLDER, Mathem. Annalen 38, 1891, S. 309, G. FROBENIUS, ebenda 70, 1911, S. 457. Der Beweis, den KNESER im 106. Bande des CRELLESchen Journals für diesen Satz gibt, erfordert nur die einfachsten Hilfsmittel. Vgl. auch A. LOEWY, Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung 1917.

Beziehungen liefert

$$\frac{h_\alpha \cdot h_\beta \dots h_\tau}{n} = h'_\alpha \cdot h'_\beta \dots h'_\tau.$$

Da sich das Produkt $h_\alpha \cdot h_\beta \dots h_\tau$ als durch n teilbar erweist, trifft dies umso mehr für das Produkt der Grade aller Hilfsgleichungen $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, ..., $X_k = 0$ zu, und damit ist unser Satz bewiesen.

Der bequemeren Ausdrucksweise wegen wollen wir unter einer Gleichungskette $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, ..., $X_k = 0$ für $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$ ein Gleichungssystem verstehen, bei dem ρ_i ($i = 1, 2, \dots, k$) stets Wurzel von $X_i = 0$ ist und $X_1 = 0$ Koeffizienten aus dem ursprünglichen Rationalitätsbereiche P , $X_2 = 0$ aus dem durch ρ_1 erweiterten, u.s.w. schließlich $X_k = 0$ aus dem Bereiche $(P, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{k-1})$ besitzt. Die Irreduzibilität der Gleichungen $X_i = 0$ in den Rationalitätsbereichen, denen ihre Koeffizienten angehören, wird hier nicht vorausgesetzt.

Wir ziehen nun aus unserem Satz die folgenden Schlüsse:

Corollar I. Die irreduzible Gleichung $J(x) = 0$ mit Koeffizienten aus P habe den Grad $n = p_1 \cdot p_2 \dots p_f$, wobei p_1, p_2, \dots, p_f lauter (auch eventuell gleiche) Primzahlen bedeuten. Es sei eine Gleichungswurzel ξ_1 irgendwie als rationale Funktion von Größen $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$ mit Koeffizienten aus P mittels einer Gleichungskette $Y_1 = 0$, $Y_2 = 0$, ..., $Y_k = 0$ für $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$ dargestellt, und man ersetze jede Hilfsgleichung $Y_i = 0$, die in dem Rationalitätsbereiche $(P, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{i-1})$, dem ihre Koeffizienten angehören, reduzibel ist, durch die irreduzible Gleichung $X_i = 0$, der ρ_i genügt, also durch eine Gleichung von niedrigerem Grade. Dann ist für das so gebildete Gleichungssystem, das wir mit $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, ..., $X_k = 0$ bezeichnen, nach unserem Satze erstens das Produkt der Grade aller Gleichungen $X_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, k$) durch $p_1 \cdot p_2 \dots p_f$ teilbar, und zweitens enthält dieses System mindestens f Gleichungen der Grade p_1, p_2, \dots, p_f oder wenigstens eine Gleichung, deren Grad eine zusammengesetzte Zahl ist. Diese zusammengesetzte Zahl ist wenigstens durch eine und, wenn $k < f$ ist, sogar durch zwei der Primzahlen p_1, p_2, \dots, p_f teilbar.

Alles dies ergibt sich unmittelbar aus der Tatsache, daß das Produkt der Grade von $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, ..., $X_k = 0$ durch $p_1 \cdot p_2 \dots p_f$, den Grad von $J(x) = 0$, teilbar ist und p_1, p_2, \dots, p_f lauter Primzahlen sind.

Corollar II. Hat man eine Wurzel ξ_1 der im Rationalitätsbereiche P irreduziblen Gleichung $J(x) = 0$ vom n -ten Grade mittels einer Gleichungskette $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, ..., $X_k = 0$ für die Größen $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$ durch diese Größen rational mit Koeffizienten aus P dargestellt und ist das Produkt der Grade aller Gleichungen der Kette gleich n , so sind die Gleichungen $X_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, k$) in den Bereichen, denen ihre Koeffizienten angehören, irreduzibel. Sind weiter hierbei noch die Grade aller Gleichungen der Kette Primzahlen p_1, p_2, \dots, p_k , so kann man nicht unter die Grade der Gleichungen $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, ..., $X_k = 0$ heruntersteigen und nicht mit einer Kette niedrigerer Gleichungen operieren.

Wäre nämlich, wenn das Produkt der Grade der Gleichungen der Kette gleich n ist, eine der Gleichungen $X_i = 0$ reduzibel, so könnte man sie durch einen ihrer irreduziblen Faktoren ersetzen, wodurch das Produkt der Grade der Hilfsgleichungen $< n$ würde; dies stünde aber mit unserem Satze im Widerspruch. Mithin erweisen sich die Gleichungen $X_i = 0$ ausnahmslos als irreduzibel. Sind ferner die Grade der Gleichungen $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, ..., $X_k = 0$ Primzahlen p_1, p_2, \dots, p_k und ist $p_1 \cdot p_2 \dots p_k = n$, so besagt Corollar I, daß man nicht unter die Grade p_1, p_2, \dots, p_k der Gleichungskette $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, ..., $X_k = 0$ heruntersteigen kann.

Ist die Anzahl n der Teile, in die der Kreis geteilt werden soll, eine Primzahl und wird $n-1$ irgendwie zerlegt in $n-1 = \alpha \cdot \beta \dots \zeta$, so führt GAUSS im art. 352. der *Disquisitiones arithmeticae*, (Werke I, S. 431) die Auflösung der Kreisteilungsgleichung $X = 0$, von der er im art. 341. (Werke I, S. 417) zeigt, daß sie irreduzibel ist, zurück auf eine Gleichungskette $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, ..., $X_k = 0$ von den Graden

$\alpha, \beta, \dots, \zeta$. Diese Gleichungen sind nach Corollar II in den Bereichen, denen ihre Koeffizienten angehören, irreduzibel. Wählt man die Zerlegungszahlen $\alpha, \beta, \dots, \zeta$ sämtlich als Primzahlen, so erfüllt die Gleichungskette von GAUSS sämtliche Bedingungen unseres Corollars II. Mithin ist die Behauptung der GAUSSschen Tagebuchnotiz für einen Primzahlgrad, d. h. also die Behauptung des art. 365. der *Disquisitiones arithmeticae* (Werke I, S. 462) bewiesen.

Im allgemeinen Fall, wo der Grad $N = a^\alpha \cdot b^\beta \dots$ ist und a, b, \dots lauter verschiedene Primzahlen bedeuten, gilt Folgendes: Die Kreisteilungsgleichung $X = 0$ vom Grade $\varphi(N) = a^{\alpha-1}(a-1)b^{\beta-1}(b-1)\dots$ ist irreduzibel. Ihre Auflösung wird zurückgeführt auf die Hilfsgleichungen, die bei der Teilung des Kreises in a, b, \dots Teile auftreten und auf $\alpha-1$ Gleichungen a -ten Grades, $\beta-1$ Gleichungen b -ten Grades u.s.w. Man kann also die Auflösung der Gleichung $X = 0$ auf eine Gleichungskette zurückführen, die nur Gleichungen vom Primzahlgrade enthält, und für die das Produkt der Grade gleich dem Grade $\varphi(N)$ von $X = 0$ ist. Nach unserem Corollar II ist es unmöglich, die Grade der Gleichungen dieser Kette zu erniedrigen, und jede andere für die Lösung von $X = 0$ benutzbare Kette würde mindestens eine gleiche Anzahl von Gleichungen derselben Grade oder wenigstens eine Gleichung enthalten, deren Grad eine größere, zusammengesetzte Zahl ist.

GAUSS' in den *Disquisitiones arithmeticae* art. 366. (Werke I, S. 463) enthaltene eigene Aussage für den allgemeinen Fall (quando vero [numerus $\varphi(N)$] factores primos alios quam 2 puta p, p' etc. implicat, aequationes gradus p -ti, p' -ti etc. nullo modo evitari possunt) ist übrigens nicht so genau wie die obige und wie die von GAUSS für den Fall einer Primzahlpotenz (a. a. O. tunc enim [si circulus in a^α partes secandus est] praeter eas aequationes, quae ad sectionem in a partes requiruntur, necessario adhuc $\alpha-1$ alias α -ti gradus solvere oportet; etiam has nullo modo nec evitare nec deprimere licet), wo nämlich nicht nur davon, daß die in $\varphi(N)$ enthaltenen Primzahlen als Gradzahlen nicht vermieden bzw. nicht unterschritten werden können, sondern auch von ihrer Vielfachheit die Rede ist. Z. B. für die Teilung des Kreises in $3^2 \cdot 7$ Teile könnte man, da $\varphi(N) = 2^2 \cdot 3^2$ ist, nach GAUSS a. a. O. nur die Unvermeidlichkeit von Gleichungen zweiten und dritten Grades aussagen, während nach dem oben Bewiesenen zwei Gleichungen zweiten und zwei Gleichungen dritten Grades unvermeidlich sind. Vielleicht hängt dies damit zusammen, daß GAUSS bei der Abfassung der *Disquisitiones arithmeticae* noch nicht im Besitz des Beweises für die Irreduzibilität der allgemeinen Kreisteilungsgleichung war, den er nach Nr. 136 des *Tagebuchs* erst am 12. Juni 1808 gefunden hat. Das, was GAUSS für den allgemeinen Fall in den *Disquisitiones arithmeticae* ausspricht (siehe oben), kann nämlich aus seinen Angaben für den Fall der Primzahlpotenz unmittelbar gefolgert werden. Denn, hat man die Kreisteilungsgleichung für den Fall $N = a^\alpha \cdot b^\beta \dots$ gelöst, so hat man sie auch für die in N enthaltenen einzelnen Primzahlpotenzen a^α, b^β, \dots mitgelöst. Folglich sind nach GAUSS' Angaben über die Primzahlpotenzgrade die Primfaktoren von $(a-1)a^{\alpha-1}$ bzw. $(b-1)b^{\beta-1}$ u.s.w., d. h. alle Primfaktoren von $\varphi(N) = a^{\alpha-1}(a-1)b^{\beta-1}(b-1)\dots$ als Gradzahlen unvermeidlich; inbezug auf die Vielfachheit versagt dieses Verfahren. Daß GAUSS für die Primzahlpotenz auch die Vielfachheit genau bezeichnet, deutet darauf hin, daß er zur Zeit der Veröffentlichung der *Disquisitiones arithmeticae* die Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung für einen Primzahlpotenzgrad schon gekannt haben dürfte. In der Tat läßt sich diese durch eine leichte Abänderung des im art. 341. der *Disquisitiones arithmeticae* (Werke I, S. 417) enthaltenen Beweises für den Primzahlgrad erschließen, während für den allgemeinen Fall eines beliebigen Grades andere Hilfsmittel erforderlich sind.

In den artt. 365. und 366. der *Disquisitiones arithmeticae* (Werke I, S. 462, 463) hat GAUSS aus seiner allgemeinen Aussage über die Unvermeidlichkeit der durch seine Theorie gegebenen Hilfsgleichungen den Schluß gezogen, daß der Kreis mit Zirkel und Lineal nur dann in N gleiche Teile geteilt werden kann, wenn $\varphi(N) = 2^k$ ist, d. h. wenn N von ungeraden Primteilern bloß solche von der Form $2^m + 1$ und zwar

nur in der ersten Potenz enthält. Dieses besondere Ergebnis hat zuerst L. WANTZEL*) zu beweisen versucht, indem er den folgenden Satz aufstellte: Soll sich eine Wurzel einer irreduziblen Gleichung durch Quadratwurzeln, d. h. durch eine Kette von Hilfgleichungen zweiten Grades finden lassen, so muß der Gleichungsgrad notwendig eine Potenz von 2 sein. Die WANTZELSche Aussage folgt unmittelbar aus unserem oben bewiesenen Satze.

LOEWY.

[117.]

Iisdem diebus Pascha Iudaeorum per methodum novam determinare docuimus.

[1801] (Apr. 1.)

Über die Einrichtung des jüdischen Kalenders dürfte GAUSS sich aus CHRISTIAN WOLFS *Elementa matheseos universae****) unterrichtet haben. Seine *Berechnung des jüdischen Osterfestes* ist in v. ZACHS Monatlicher Correspondenz der Erd- und Himmelskunde 5, Mai 1802, S. 435 veröffentlicht worden (Werke VI, S. 80); den ersten Beweis der GAUSSschen Regel gab CISA GRESY***) auf Veranlassung des Freiherrn von ZACH †); CH. Z. SLONIMSKY ††) hat die GAUSSsche Formel so ausgestaltet, daß sie auf alle Fragen des jüdischen Kalenders eines Jahres Auskunft erteilt; einen durchsichtigen Beweis gab M. HAMBURGER †††).

KLEIN. LOEWY.

[118.]

Methodus quinta theorema fundamentale demonstrandi se obtulit adiumento theorematis elegantissimi theoriae sectionis circuli, puta

*) L. WANTZEL, *Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas*, Journal de Mathém. 2, 1837, S. 366. Der bekannte elementare Beweis, wie er von J. PETERSEN, *Theorie der algebraischen Gleichungen*, Kopenhagen 1878, S. 156 und von F. KLEIN, *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie*, Leipzig 1895, S. 4 gegeben wird, ist eine Verschärfung des in seiner ursprünglichen Form unzureichenden Beweises von WANTZEL auf derselben Grundlage.

**) Tomus IV., qui geographiam cum hydrographia, chronologiam etc. complectitur, handelt im Cap. VII. der *Elementa chronologiae*, S. 182, de calendariis iudaico et muhamedano. In dem von GAUSS 1800 erworbenen Abdruck des WOLFSchen Werkes findet sich eine handschriftliche Eintragung *Die Berechnung des Neumonds Tisri für jedes jüdische Jahr A*, die Werke XI 1 zum Abdruck gelangt.

***) CHEVALIER CISA GRESY, *Démonstration des formules de M. Gauss pour déterminer le jour de Pâque des juifs*, Correspondance astronom. 1, 1818, S. 556.

†) Siehe ebenda, S. 568.

††) CH. Z. SLONIMSKY, *Eine allgemeine Formel für die gesammte jüdische Kalenderberechnung*, CRELLES Journal für Mathematik 28, 1844, S. 179.

†††) M. HAMBURGER, *Ableitung der Gausssschen Formel zur Bestimmung des jüdischen Osterfestes*, ebenda 116, 1896, S. 90.

$$\sum_{\cos} \left. \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} \right\} \frac{nn}{a} P = \begin{matrix} +\sqrt{a} & 0 & 0 & +\sqrt{a} \\ +\sqrt{a} & +\sqrt{a} & 0 & 0 \end{matrix}$$

prout $a \equiv 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \pmod{4}$

substituendo pro n omnes numeros a 0 usque ad $(a-1)$.

Bruns[vigae, 1801] Mai. medio.

Vergl. hierzu die oben S. 23 abgedruckte Aufzeichnung *Theorema novissimum pulcherrimum*. Siehe auch die Notiz Nr. 123 vom 30. August 1805.

KLEIN.

[119.]

Methodus nova simplicissima expeditissima elementa orbitarum corporum coelestium investigandi.

Brunsv[igae, 1801] Sept. m[edio]

GAUSS hatte sich schon seit längerer Zeit mit dem Studium der theoretischen Astronomie und nach Ausweis der Schedae Ac (begonnen Nov. 1799), S. 23, auch mit der OLBERSschen Methode der Bestimmung parabolischer Bahnen*) beschäftigt, als der am 1. Januar 1801 von PIAZZI in Palermo entdeckte erste kleine Planet Ceres bei seinem bevorstehenden Wiedererscheinen gegen Ende des Sommers 1801 von den Astronomen vergeblich am Himmel gesucht wurde. Die Schwierigkeit der Bahnbestimmung lag hauptsächlich darin, daß die Beobachtungen von PIAZZI sich nur über den kurzen Zeitraum von 42 Tagen erstreckten, für welchen Fall die bis dahin üblichen Methoden nicht ausreichten. Die Aufgabe, durch genauere Bestimmung seiner Bahn die Wiederauffindung doch noch zu ermöglichen, übte auf GAUSS eine starke Anziehungskraft aus und er verwandte von nun ab einen großen Teil seiner Arbeitszeit zu Untersuchungen und Rechnungen zur Bahnbestimmung, aus denen schließlich als vollendetes Werk die *Theoria motus* (erschieden 1809) hervorging.

Auf welche besondere Methode die vorstehende Eintragung Bezug nimmt, ob auf die in der Monatlichen Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde, Juni 1802, abgedruckte**) oder auf eine Vorgängerin dieser, läßt sich nicht entscheiden, da die ältesten im Nachlaß, namentlich in den Schedae Ag und Ah vorhandenen Aufzeichnungen und Rechnungen über diesen Gegenstand erst aus dem November 1801 stammen. Das gleiche gilt von der Tagebucheintragung Nr. 121.

In der Vorrede zur *Theoria motus* (Werke VII, 1906, S. 7) sagt GAUSS:

»satis mirum videtur, problema generale

Determinare orbitam corporis coelestis, absque omni suppositione hypothetica, ex observationibus tempus haud magnum complectentibus neque adeo delectum, pro applicatione methodorum specialium, patientibus

*) W. OLBERS, *Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode, die Bahn eines Cometen zu berechnen*, Weimar 1797, Sein Leben und seine Werke I, Berlin 1894, S. 3.

**) *Vorschriften, um aus der geocentrischen Länge und Breite eines Himmelskörpers, dem Orte seines Knotens, der Neigung der Bahn, der Länge der Sonne und ihrem Abstände von der Erde abzuleiten: Des Himmelskörpers heliocentrische Länge in der Bahn, wahren Abstand von der Sonne und wahren Abstand von der Erde*, Werke VI, S. 87.

usque ad initium huius saeculi penitus propemodum neglectum esse, vel saltem a nemine serio ac digne tractatum, quum certe theoreticis propter difficultatem atque elegantiam sese commendare potuisset, etiamsi apud practicos de summa eius utilitate nondum constaret. Scilicet invaluerat apud omnes opinio, impossibilem esse talem determinationem completam ex observationibus breviori temporis intervallo inclusis, male sane fundata, quum nunc quidem certissimo iam evictum sit, orbitam corporis coelestis ex observationibus bonis paucos tantummodo dies complectentibus, absque ulla suppositione hypothetica, satis approximate iam determinari posse.

Incideram in quasdam ideas, quae ad solutionem problematis magni de quo dixi facere videbantur, mense Septembri a. 1801, tunc in labore plane diverso occupatus[*]. eodem circiter tempore rumor de planeta novo Ian. 1. istius anni in specula Panormitana detecto per omnium ora volitabat, moxque ipsae observationes inde ab epocha illa usque ad 11. Febr. ab astronomo praestantissimo PIAZZI institutae ad notitiam publicam pervenerunt. Unquamne opportunius experiri potuissem, ecquid valeant ideolae meae ad usum practicum, quam si tunc istis ad determinationem orbitae Cereris uterer, qui planeta inter 41 illos dies geocentrice arcum trium tantummodo graduum descriperat, et post annum elapsam in coeli plaga longissime illinc remota indagari debebat? Prima haecce methodi applicatio facta est mense Oct. 1801, primaque nox serena, ubi planeta ad normam numerorum inde deductorum quaesitus est (Dec. 7, 1801 a clar. DE ZACH) transfugam observationibus reddidit.

Siehe auch die *Anzeige der Theoria motus*, Werke VI, S. 56 und den Brief an OLBERS vom 25. Mai 1802, *Wilhelm Obers, Sein Leben und seine Werke* II 1, Berlin 1900, S. 48.

Vergl. die Nummern 122, 125, 126, 127, 129.

BRENDEL.

[120.]

Theoriam motus Lunae aggressi sumus.

[1801] Aug.

Die um diese Zeit entstandene *Theorie der Bewegung des Mondes* ist im Nachlaß vorhanden und Werke VII, 1906, S. 611—639 abgedruckt. In einem Briefe an SCHUMACHER vom 23. Januar 1842 (*Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher* IV, Altona 1862, S. 51) schreibt GAUSS:

Eben im Sommer 1801 hatte ich mir vorgesetzt, ähnliche Arbeit über den ☾ [Mond] auszuführen, aber kaum hatte ich die theoretischen Vorarbeiten angefangen (denn diese sind es, auf welche in der Vorrede meiner *Th[eoria] M[otus] C[orporum] C[oelestium]* angespielt wird), als das Bekanntwerden von PIAZZI'S ☿ [Ceres] Beob[achtungen] mich in eine ganz andere Richtung zog.

Die in diesem Briefe erwähnte Stelle aus der Vorrede zur *Theoria Motus* ist oben bei der Nr. 119 abgedruckt. Augenscheinlich sind die Tagebucheintragungen Nr. 119 und Nr. 120 gleichzeitig gemacht.

BRENDEL.

[*] Vergl. die folgende Nr. 120.]

[121.]

Formulas permultas novas in Astronomia Theorica utilissimas eruimus.

1801 Mense Octobr.

Siehe die beiden vorhergehenden Eintragungen, sowie die folgende.

BRENDL.

[122.]

Annis insequentibus 1802, 1803, 1804 occupationes astronomicae maximam otii partem abstulerunt, calculi imprimis circa planetarum novorum theoriam instituti. Unde evenit, quod hisce annis catalogus hicce neglectus est. Dies itaque, quibus aliquid ad matheseos incrementa conferre datum est, memoriae exciderunt.

Im November 1801 hatte GAUSS mehrere Bahnen der Ceres berechnet, die PIAZZI'S Beobachtungen (Vergl. die Bemerkung zu der Nr. 120) hinreichend gut darstellten, und die nebst einer Ephemeride zur Aufsuchung unter der Überschrift *Fortgesetzte Nachrichten über den längst vermutheten neuen Haupt-Planeten unseres Sonnen-Systems* in der Monatlichen Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde, Dezember 1801 (Werke VI, S. 199), veröffentlicht wurden. Die Rechnungen nebst den Rechnungsvorschriften finden sich ganz oder doch zum größten Teil in den bei der Nr. 119 genannten Schedae Ag und Ah. Hiernach wurde Ceres auch am 7. Dezember von VON ZACH aufgefunden und ihre Identität durch eine weitere Beobachtung von OLBERS am 1. Januar 1802 bestätigt.

GAUSS benutzte die neuen Beobachtungen sogleich zu einer genaueren Bahnbestimmung und vertiefte sich auf lange Zeit, auch noch über das Jahr 1804 hinaus, so in die Bahnrechnungen der Ceres und der später entdeckten Pallas, daß er seine übrigen Untersuchungen fast ganz liegen ließ. Die Schedae Ai, Ak, Al sind voll von solchen Berechnungen. Im Jahre 1802 beschäftigte er sich außerdem mit der Berechnung der Störungen der Ceres, welche Werke VII, 1906, S. 377 ff. abgedruckt sind.

An der eigentlichen Verbesserung seiner Methode zur Bahnbestimmung scheint GAUSS auch in dieser Zeit weniger gearbeitet zu haben, denn aus den Eintragungen Nr. 125 bis Nr. 127 ist zu schließen, daß die Form, in der diese Methode uns in der *Theoria motus* entgegentritt, erst im Jahre 1806 entstanden ist.

Man vergleiche GAUSS' Briefwechsel mit OLBERS und Werke VI.

BRENDL.

[123.]

Demonstratio theorematis venustissimi supra 1801 Mai. [*] commemorati, quam per 4 annos et ultra omni contentione quaesiveramus, tandem perfecimus. Comment[ationes] rec[entiores], I.

1805 Aug. 30.

Es handelt sich um die Untersuchungen der im I. Bande der Commentationes societatis regiae scien-

[*] Nr. 118, oben S. 560.]

tiarum Göttingensis recentiores veröffentlichten Abhandlung *Summatio quarundam serierum singularium* (vorgelegt am 24. August 1808), Werke II, S. 9, siehe auch die Anzeige ebenda S. 155. Eine lebhaft Schilderung seiner fortgesetzten, lange vergeblich gebliebenen Bemühungen um den Beweis und seines endlichen Erfolgs gibt GAUSS in dem oben S. 24 abgedruckten Briefe an OLBERS vom 3. September 1805. Vergl. den Artikel 18 des BACHMANNschen Aufsatzes, Werke X 2, S. 45.

KLEIN.

[124.]

Theoriam interpolationis ulterius excoluimus.

1805 Novbr.

Das im Oktober 1805 begonnene Handbuch, betitelt *Mathematische Brouillons* (18, Bd), wird mit einer Aufzeichnung über Interpolation eröffnet, die (vergl. die Bemerkung von SCHERING Werke III, S. 328) als ein erster Entwurf der Werke III, S. 265 aus dem Nachlaß abgedruckten Abhandlung *Theoria interpolationis methodo nova tractata* anzusehen ist. Daraus folgt im Einklang mit unserer Tagebuchnotiz, daß diese Abhandlung nicht vor dem November 1805 verfaßt sein kann. Andererseits ist sie aber jedenfalls vor dem 25. August 1806 geschrieben, weil bei dem im art. 41. (Werke III, S. 325) gegebenen Beispiel die Exzentrizität der Juno entsprechend den V. Elementen dieses kleinen Planeten gleich 0,254236 genommen wird, vergl. die auf eben diesen Wert bezügliche Bemerkung, oben S. 443.

KLEIN. SCHLESINGER.

[125.]

Methodum ex duobus locis heliocentricis corporis circa solem moventis eiusdem elementa determinandi novam perfectissimam deteximus.

1806 Ianuar.

GAUSS berichtet hierüber in dem Briefe an OLBERS vom 3. Februar 1806 (*Wilhelm Olbers, Sein Leben und seine Werke* II 1, Berlin 1900, S. 287); man vergleiche die Bemerkungen zu den Nummern 120 und 122 und die artt. 88.—97. der *Theoria motus* (Werke VII, 1906, S. 112), sowie den Bericht*) über die letzteren in der Monatlichen Correspondenz 20, 1809, S. 322. — Im Nachlaß finden sich die entsprechenden Untersuchungen im Handbuch 18. Bd, S. 52 und an anderen Stellen. Bei seinen früheren Bahnbestimmungen hat sich GAUSS einer weniger vollkommenen Methode bedient.

BRENDEL.

[126.]

Methodum e tribus planetae locis geocentricis eius orbitam determinandi ad summum perfectionis gradum eveximus.

1806 Mai.

*) Über die Aufgabe: »Aus zwey ihrer Grösse und Lage nach gegebenen Radii Vectores und der verflossenen Zeit die elliptischen Elemente der Planetenbahn zu bestimmen«. Nach § 88—97 der *Theoria motus corporum coelestium etc. etc.* des Hrn. Prof. GAUSS. [Der ungenannte Verfasser ist vermutlich v. ZACH.]

Man vergleiche *Theoria motus*, liber secundus, artt. 115—163. (Werke VII, 1906, S. 155). Im Nachlaß stehen die entsprechenden Untersuchungen im Handbuch 18, Bd, S. 94.

BRENDEL.

[127.]

Methodus nova ellipsin et hyperbolam ad parabolam reducendi.

1806 April.

Man vergleiche *Theoria motus*, artt. 33 ff., Werke VII, 1906, S. 45, sowie im Nachlaß das Handbuch 18, Bd, S. 70.

BRENDEL.

[128.]

Eodem circiter tempore resolutionem functionis $\frac{x^p-1}{x-1}$ in factores quatuor absolvimus.

[1806 April.—Mai.]

Im art. 22. der am 5. April 1825 der Gesellschaft der Wissenschaften vorgelegten *Theoria Residuorum biquadraticorum Commentatio prima*, Werke II, S. 89 sagt GAUSS in bezug auf die hier angezeigte Zerlegung, daß sie im engsten Zusammenhang stehe mit den in den artt. 15.—20. jener Abhandlung enthaltenen Untersuchungen, und daß sie sich mit Hilfe dieser Untersuchungen ohne Schwierigkeit vollständig erledigen lasse. Sed — fährt er fort — hanc tractationem ad aliam occasionem nobis reservamus. Im Nachlaß hat sich keine auf diesen Gegenstand bezügliche Aufzeichnung vorgefunden.

BACHMANN.

[129.]

Methodus nova e quatuor planetae locis geocentricis, quorum duo extremi sunt incompleti, eius orbitam determinandi.

1807 Ian. 21.

Man vergleiche den Brief von GAUSS an OLBERS vom 27. Januar 1807, *Wilhelm Olbers, Sein Leben und seine Werke* II 1, Berlin 1900, S. 320, sowie *Theoria motus*, liber secundus, artt. 164.—171., Werke VII, 1906, S. 222, ferner im Nachlaß das Handbuch 18, Bd, S. 133.

BRENDEL.

[130.]

Theoria Residuorum cubicorum et biquadraticorum incepta

1807 Febr. 15,

[131.]

ulterius exculpta et completa reddita Febr. 17. Demonstratione adhuc eget:

[1807 Febr. 17.]

[132.]

Demonstratio huius theoriae per methodum elegantissimam inventa ita ut penitus perfecta sit nihilque amplius desideretur.

Hinc simul residua et non residua quadratica egregie illustrantur.

1807 Febr. 22.

[133.]

Theoremata, quae theoriae praecedenti incrementa maximi pretii adiungunt, demonstratione eleganti munita (scilicet pro quibusnam radicibus primitivis statuere oporteat ipsum b positivum pro quibusque negativum,

$$aa + 27bb = 4p; \quad aa + 4bb = p).$$

[1807] Febr. 24.

In den Nummern 130—133 sind die Ergebnisse der *Theoria Residuorum biquadraticorum, Commentatio prima* (vorgelegt am 5. April 1825), Werke II, S. 65 gemeint. In dieser Abhandlung (a. a. O. S. 67) und in ihrer Anzeige (ebenda S. 165), ebenso in dem Briefe an DIRICHLET vom 30. Mai 1828 (ebenda, zweiter Abdruck, S. 516) setzt GAUSS den Anfang seiner Beschäftigung mit den biquadratischen Resten auf 1805; in dem Briefe an SOPHIE GERMAIN vom 30. April 1807 (siehe oben S. 70, insbesondere S. 72) wird »der letzte Winter« — also die Zeit der hier vorliegenden Tagebuchaufzeichnungen erwähnt. Vergl. auch die Bemerkung zu der Nr. 128, sowie die Werke VIII, S. 3—11 und 15—19 abgedruckten Nachlaßstücke und die zugehörigen Bemerkungen, ferner die oben S. 37 abgedruckte Aufzeichnung und die Briefstellen an SOPHIE GERMAIN (oben S. 72, I, II) und an OLBERS (oben S. 75).

KLEIN. SCHLESINGER.

[134.]

Demonstrationem omnino nova[m] theorematis fundamentalis principii omnino elementaribus innixam deteximus.

[1807] Maii 6.

In einem am 8. Mai 1807 begonnenen und am 12. desselben Monats abgeschlossenen Briefe an OLBERS (Siehe *Wilhelm Olbers, Sein Leben und seine Werke* II, 1, 1900, S. 357, besonders S. 359, 360) schreibt GAUSS:

Hierbei alle meine von Mlle. SOPHIE GERMAIN erhaltenen Briefe. Personalien weiss ich eigentlich weiter keine, als die sich daraus abnehmen lassen. Bloss von einem franz[ösische]n Officier, der im Nov[ember] 1806 hier durchkam, erfuhr ich, dass SOPHIE GERMAIN, unter der ich aber damals meinen LEBLANC noch nicht ahndete, ein in Paris sehr geehrter und bewunderter Name sei. Neulich als ich ihr antwortete und einige Arithmetica mit-

theilte[*]) wurde ich dadurch veranlasst, wieder eine Untersuchung vorzunehmen, und gleich zwei Tage nachher gelang mir eine äusserst angenehme neue Entdeckung. Es ist ein neuer, sehr zierlicher und kurzer Beweis des Fundamentalsatzes art. 1[31. der *Disquisitiones arithmeticae*], dessen erster, sehr mühsamer (obwol im Grunde auch einfacher, aber langes Detail erfordernder) Beweis mich über ein Jahr gekostet hatte. . . .

Nach der durch das *Tagebuch***) gegebenen Zählung handelt es sich bei der vorliegenden Aufzeichnung und in der Briefstelle an OLBERS um den sechsten Beweis des Reziprozitätsgesetzes der quadratischen Reste. Die zugehörige Abhandlung führt den Titel *Theorematis arithmetici demonstratio nova* (Werke II, S. 1, vergl. auch die *Anzeige* ebenda S. 151); sie wurde der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften am 15. Januar 1808 vorgelegt, also früher als die in den Tagebuchaufzeichnungen Nr. 118 und Nr. 123 angezeigte *Summatio quarundam serierum singularium* (Werke II, S. 9, vorgelegt am 24. August 1808). Daraus erklärt es sich, daß GAUSS die *demonstratio nova* in der *Anzeige*, Werke II, S. 153, abweichend von der Zählung des *Tagebuchs*, als fünften Beweis bezeichnet. Vergl. auch den Artikel 20 des BACHMANNschen Aufsatzes »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten« Werke X 2, S. 50.

KLEIN.

[135.]

Theoria divisionis in periodos tres (art. 358) ad principia longe simpliciora reducta.

1808 Maii 10.

Hier sind wohl die Prinzipien gemeint, die in dem Aufsätze *Disquisitionum circa aequationes puras ulterior evolutio*, Werke II, S. 243, dargelegt sind. Die Artikelnummer bezieht sich auf die *Disquisitiones arithmeticae*, Werke I, S. 445.

KLEIN. BACHMANN.

[136.]

Aequationem

$$X - 1 = 0,$$

quae continet omnes radices primitivas aequationis

$$x^n - 1 = 0,$$

in factores cum coefficientibus rationalibus discerni non posse, demonstr[at]um] pro valoribus compositis ipsius n .

1808 Jun. 12.

Vergl. die Notiz Nr. 40 vom 9. Oktober 1796, in der die Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung für den Fall, wo n eine Primzahl ist, angezeigt wird. Daß GAUSS die Irreduzibilität für den Fall, wo n

[*] Siehe den Brief vom 30. April 1807, oben S. 70.]

**] Vergl. die Nr. 118 vom Mai 1801, oben S. 560.

eine Primzahlpotenz ist, schon bei Abfassung der *Disquisitiones arithmeticae* gekannt haben dürfte, ist in der Bemerkung zu der Nr. 116, oben S. 559, auseinandergesetzt worden. Von dem Beweise der Irreduzibilität im allgemeinen Fall enthält der Nachlaß nur das oben S. 116 abgedruckte Bruchstück, aus dem man aber nicht auf das Beweisverfahren schließen kann, das GAUSS im Auge hatte. Auch eine Reihe von Einzelheiten in diesem Bruchstück bleiben unklar, so vor allem die letzten Zeilen von S. 117; vergl. auch die Bemerkung zu der Nr. 38. Im Text der obigen Tagebuchnotiz Nr. 136 dürfte, wie DEDEKIND beim ersten Abdruck bemerkt hat, die Form $X-1=0$ der Gleichung ein Schreibfehler für $X=0$ sein; diese Vermutung wird durch das S. 116 abgedruckte Bruchstück bestätigt. Über die verschiedenen Arten von Irreduzibilitätsbeweisen für die Kreisteilungsgleichung sehe man M. RUTHINGER, *Die Irreducibilitätsbeweise der Kreisteilungsgleichung*, Straßburger Dissertation 1907.

LOEWY.

[137.]

Theoriam formarum cubicarum, solutionem aequ[ationis]

$$x^3 + ny^3 + nnz^3 - 3nxyz = 1$$

aggressus sum.

[1808] Dec. 23.

Vergl. die Ausführungen von R. FRICKE, Werke VIII, S. 24–26 und eine Bemerkung von SCHERING, Werke II, S. 398. Die dort zitierte, Werke II, S. 243 abgedruckte Abhandlung *Disquisitionum circa aequationes puras ulterior evolutio* stammt (siehe die Bemerkung von DEDEKIND a. a. O. S. 265 und die Tagebuchnotiz Nr. 135) in der Tat aus dem Jahre 1808.

Vergl. den Artikel 25 des BACHMANNschen Aufsatzes Werke X 2, S. 60.

KLEIN.

[138.]

Theorema de residuo cubico 3 per methodum specialem elegantem demonstratum per considerat[iones] valorum $\frac{x+1}{x}$, ubi terni semper habent a , $a\epsilon$, $a\epsilon\epsilon$ exceptis duobus, qui dant ϵ , $\epsilon\epsilon$, hi vero sunt

$$\frac{1}{\epsilon-1} = \frac{\epsilon\epsilon-1}{3}, \quad \frac{1}{\epsilon\epsilon-1} = \frac{\epsilon-1}{3}$$

adeoque productum $\equiv \frac{1}{3}$.

1809 Ian. 6.

Hier ist ϵ nicht als dritte Wurzel aus 1, sondern als rationale Wurzel der Kongruenz

$$\epsilon^2 + \epsilon + 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

aufzufassen, wo p eine natürliche Primzahl von der Form $3n+1$ bedeutet.

DEDEKIND.

[139.]

Series ad Media arithmetico geometrica pertinentes fusius evolutae.

1809 Iun. 20.

Man kann annehmen, daß der Brief SCHUMACHERS an GAUSS vom 2. April 1808 (abgedruckt oben S. 242, [4.]), namentlich die darin erwähnte Aufgabe des PEDRAYES (vergl. GAUSS' Antwortschreiben vom 17. September 1808, abgedruckt oben S. 243, [6.]) die äußere Veranlassung dazu geboten hat, daß GAUSS die Untersuchungen über elliptische Funktionen, die seit 1800 zurückgetreten waren, wieder aufnahm. An die hier zu besprechende Tagebuchaufzeichnung erinnert der Anfang der im III. Bande der Werke, S. 446 abgedruckten nachgelassenen Abhandlung, die S. 221—233 des im Oktober 1805 begonnenen Handbuchs 18, Bd aufgezeichnet ist. Diese Abhandlung beginnt nämlich mit den Worten: »Die Theoreme in Beziehung auf diejenigen Reihen und unendlichen Producte, welche zu der Theorie der Arithmetisch Geometrischen Mittel gehören, ordnen wir so«. Da sie unmittelbar auf eine astronomische Rechnung folgt, der die Bemerkung beigefügt ist: »geendigt d. 28. April 1809« (vergl. SCHERINGS Bemerkung, Werke III, S. 494) ist ihr Zusammenhang mit unserer Tagebuchnotiz gesichert. Dasselbe gilt von der oben S. 213 abgedruckten Aufzeichnung, die den Seiten 37—40 der Scheda An entnommen ist; auf S. 35 der Scheda, am Schluß einer astronomischen Rechnung findet sich nämlich die Angabe: »geendigt d. 2. May 1809«.

KLEIN. SCHLESINGER.

[140.]

Quinquesectionem pro mediis arithm[etico] Geom[etricis] absol[vimus].

1809 Iun. 29.

Die Fünfteilung der Perioden wird in der bei der Nr. 139 genannten Abhandlung des Handbuchs 18 Bd, siehe Werke III, S. 456 ff. entwickelt.

KLEIN. SCHLESINGER.

[141.]

Catalogum praecedentem per fata iniqua iterum interruptum initio anni 1812 resumimus. In mense Nov. 1811 contigerat demonstrationem theorematis fundamentalis in doctrina aequationum pure analyticam completam reddere; sed quum nihil chartis servatum fuerit, pars quaedam essentialis memoriae penitus exciderat. Hanc per satis longum temporis intervallum frustra quaesitam tandem feliciter redinvenimus.

1812 Febr. 29.

Es handelt sich um die *Demonstratio nova altera* des Fundamentalsatzes der Algebra, vorgelegt am 7. Dezember 1815, *Commentationes soc. reg. sc. Göttingensis* rec. 3, 1846, Werke III, S. 31; vergl. die Anzeige ebenda, S. 105. In einem Briefe an OLBERS vom 19. Februar 1826, *Wilhelm Olbers, Sein Leben und seine Werke* II 2, Berlin 1909, S. 439, schreibt GAUSS:

X1.

72

Ich habe in meinem wissenschaftlichen Leben öfters den Fall gehabt, dass ich durch äussere Umstände veranlasst, Beschäftigungen, die nicht glückten, bei Seite legte, und die allerdings später glückten, z. B. mein Beweis für das Haupttheorem der Lehre von den Gleichungen, der in dem 3. Bande unsrer Comment[ationes] steht; aber ich habe nachher die 10fache Anstrengung gehabt, nur erst wieder auf den Punkt zu kommen, auf dem ich schon früher mehr als einmahl gewesen war.

Vergl. auch die Bemerkung von M. BRENDL, Werke VII, 1906, S. 610.

KLEIN. SCHLESINGER.

[142.]

Theoriam Attractionis Sphaeroidis Elliptici in puncta extra solidum sita prorsus novam invenimus.

Seeberg[ae], 1812 Sept. 26.

Siehe die folgende Nummer. Die Ortsangabe bezieht sich auf die Sternwarte Seeberg bei Gotha.

KLEIN.

[143.]

Etiam partes reliquas eiusdem theoriae per methodum novam mirae simplicitatis absolvimus.

1812 Oct. 15. Gott[ingae.]

Die Abhandlung: *Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum, methodo nova tractata* wurde am 18. März 1813 der Königl. Societät d. W. übergeben und ist im zweiten Bande der Commentationes, Göttingen 1813 veröffentlicht worden; sie ist abgedruckt Werke V, S. 1—22. In der Selbstanzeige (Gött. gel. Anzeigen, 5. April 1813, Werke V, S. 281) heisst es: »Der Verfasser der gegenwärtigen Abhandlung, welcher seit lange schon die Überzeugung hatte, daß die echte Auflösungsmethode jener berühmten Aufgabe erst noch gefunden werden müsse, wurde vor einem halben Jahre veranlaßt, sich mit derselben näher zu beschäftigen«. Am 15. November 1812 schreibt GAUSS an GERLING über diese Untersuchung das folgende:

In der letzten Zeit habe ich mich mit der berühmten Aufgabe der Anziehung der elliptischen Sphäroide beschäftigt. Ich habe die Freude gehabt, eine Auflösung zu finden, deren Einfachheit und Eleganz alle meine Erwartungen noch übertroffen hat. Ich werde sie sobald es sich thun lässt in einer Vorlesung der Societät übergeben.

Vergl. auch den Brief von GAUSS an LAPLACE vom 5. November 1812, oben S. 379 und die zugehörigen Bemerkungen S. 380, sowie den Brief von GAUSS an SCHUMACHER vom 31. Dezember 1812, *Briefwechsel* I, Altona 1860, S. 95.

KLEIN. STÄCKEL.

[144.]

Fundamentum theoriae residuorum biquadraticorum generalis, per septem propemodum annos summa contentione sed semper frustra quaesitum tandem feliciter deteximus eodem die, quo filius[*] nobis natus est.

1813 Oct. 23. Gott[ingae].

[145.]

Subtilissimum hoc est omnium eorum, quae umquam perfecimus. Vix itaque operae pretium est, his intermiscere mentionem quarundam simplificationum ad calculum orbitarum parabolicarum pertinentium.

Vergl. zu den Nummern 144 und 145 die folgende Stelle aus dem Briefe von GAUSS an DIRICHLET vom 30. Mai 1828, Werke II, zweiter Abdruck, S. 516: »Die ganze Untersuchung, deren Stoff ich schon seit 23 Jahren vollständig besitze, die Beweise der Haupttheoreme aber (zu welchen das in der ersten Commentation noch nicht zu rechnen ist), seit etwa 14 Jahren — (obwohl ich wünsche und hoffe, an letzteren, den Beweisen, noch einiges vereinfachen zu können) — habe ich auf ungefähr drei Abhandlungen berechnet«. Man sehe auch die Bemerkung zu der Nr. 133 sowie den letzten Absatz des Artikels 22 von BACHMANN'S Aufsatz, Werke X 2, S. 56.

In Bezug auf die in der Nr. 145 erwähnten Vereinfachungen zur Berechnung parabolischer Bahnen vergleiche man die Abhandlung *Observationes Cometae secundi a. MDCCCXIII*, Werke VI, S. 25, sowie Werke VII, 1906, S. 338—349.

KLEIN. BRENDL.

[146.]

Observatio per inductionem facta gravissima theoriam residuorum biquadraticorum cum functionibus lemniscaticis elegantissime nectens. Puta si $a + bi$ est numerus primus, $a - 1 + bi$ per $2 + 2i$ divisibilis, multitudo omnium solutionum congruentiae

$$1 \equiv xx + yy + xxyy \pmod{a + bi} [^{**}].$$

inclusis

$$x = \infty, \quad y = \pm i; \quad x = \pm i, \quad y = \infty,$$

fit

$$= (a - 1)^2 + bb.$$

1814 Iul. 9.

[*] Dieser am 23. Oktober 1813 geborene zweite Sohn aus GAUSS' zweiter Ehe mit MINNA WALDECK hieß WILHELM, widmete sich der Landwirtschaft und folgte später seinem älteren Bruder EUGEN nach Amerika.]

[**] In der Handschrift steht statt des Kongruenzzeichens \equiv das Gleichheitszeichen $=$.]

72*

Die Anzahl Lösungen der Kongruenz (mod. $a + bi$) ist die gleiche wie die der Kongruenz

$$2 \equiv (1 + x^2)(1 + y^2) \pmod{p},$$

wo $p = a^2 + b^2$, in reellen ganzen Zahlen (nach DEDEKIND, Brief an KLEIN). Man hat also zu suchen, wie groß die Anzahl der Lösungen von

$$2 \equiv u \cdot v \pmod{p}$$

ist, bei denen gleichzeitig $u-1$, $v-1$ quadratische Reste von p sind. DEDEKIND hat für alle Primzahlen $p < 100$ auf diese Weise die GAUSSsche Aussage bestätigt gefunden. Andererseits hat R. FRICKE (Brief an KLEIN) darauf hingewiesen, daß die Gleichung

$$1 = x^2 + y^2 + x^2 y^2$$

die zwischen

$$x = \sin \text{lemn } u, \quad y = \cos \text{lemn } u$$

bestehende Beziehung ist. Der Zusammenhang aber der Theorie der biquadratischen Reste mit den lemnistischen Funktionen, der durch die Anzahl der Lösungen jener Kongruenz vermittelt wird, bleibt aufzuklären.

BACHMANN.

SCHLUSSBEMERKUNG*).

Hinter der Nr. 146, mit der die Aufzeichnungen des *Tagebuchs* als solche schließen, sowie auch zwischendurch eingehftet, finden sich in der Handschrift noch einige Blätter, die mit verschiedenartigen, teils mathematischen, teils nicht mathematischen Aufzeichnungen beschrieben sind**). Auf der Innenseite der Einbanddecke endlich stehen in eine Falte hineingeschrieben die folgenden Sinnsprüche:

Nil Desperare.

Habeant sibi.

QVA EXEAS HABES.

*) Diese Schlußbemerkung und das folgende Sachverzeichnis sind mit einigen geringfügigen Änderungen aus der ersten Ausgabe des *Tagebuchs* übernommen worden.

**) Eine dieser Aufzeichnungen mathematischen Inhalts ist oben S. 515 in der Bemerkung zu der Nr. 60 wiedergegeben.

SACHVERZEICHNIS ZUM TAGEBUCH.

I. ZAHLENTHEORIE.

- A) Anzahlbestimmungen und asymptotische Gesetze: Nr. 9, 11, 12, 13, 14, 31.
- B) GOLDBACHscher Satz: Nr. 5.
- C) Quadratische Reste.
 - a) Restcharaktere von -1 , ± 2 : Nr. 56.
 - b) Reziprozitätsgesetz *).
 - 1. Beweis: Nr. 2.
 - 2. Beweis: Nr. 16.
 - 3. und 4. Beweis: Nr. 23, 25, 30, 68.
 - 5. Beweis: Nr. 118, 123.
 - 6. Beweis: Nr. 134.
 - c) Allgemeine Restcharaktere: Nr. 4, 64.
- D) Kubische und biquadratische Reste: Nr. 130, 131, 132, 133, 138, 144, 145, 146.
- E) Kongruenzen.
 - a) Nr. 22, 26.
 - b) Nr. 68, 75, 76, 77, 78, 79, 146.
- F) Formen.
 - a) Quadratische binäre Formen: Nr. 15, 19.
Insbesondere Klassenanzahl: Nr. 84, 114, 115.
 - b) Quadratische ternäre Formen: Nr. 17, 18, 57, 96, 103.
 - c) Kubische Formen: Nr. 137.
- G) Kreisteilungszahlen: Nr. 70.

II. ALGEBRA.

- A) Existenz der Wurzeln: Nr. 80, 141.
- B) Teilbarkeit ganzer Funktionen: Nr. 69.
- C) Potenzsummen der Wurzeln: Nr. 6, 28.
- D) Umformung und algebraische Auflösbarkeit allgemeiner Gleichungen: Nr. 34, 35, 37, 41, 42, 43.
- E) Elimination: Nr. 36, 89.
- F) Unbestimmte Gleichung ersten Grades: Nr. 27.
- G) Kreisteilung.
 - a) Allgemeine Auflösung. Konstruktion der Polygone: Nr. 1, 38, 55, 65, 66, 74, 116.
 - b) Kubische und biquadratische Resolventen: Nr. 39, 67, 128, 135.
 - c) Irreduzibilität und Verwandtes: Nr. 3, 40, 71, 73, 136.

*) Die hier folgende Zählung der Beweise entspricht den Angaben des *Tagebuchs*; vergl. den Artikel 20 des BACHMANNschen Aufsatzes »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten« Werke X 2, S. 50.

III. ANALYSIS.

- A) Kettenbrüche: Nr. 7, 58, 113.
- B) Interpolation und mechanische Quadratur: Nr. 44, 48, 124.
- C) Differentialrechnung: Nr. 47.
- D) Integralrechnung: Nr. 50, 52, 53, 54, 59.
- E) Unendliche Reihen.
 - a) LAGRANGEScher Umkehrungssatz: Nr. 49, 86.
 - b) Rekurrente Reihen: Nr. 8, 10, 20.
 - c) Besondere Reihenentwicklungen: Nr. 24, 32, 33, 45, 46.
 - d) Summierung besonderer Reihen: Nr. 29, 87.
 - e) Trigonometrische Reihen: Nr. 87, 104.
 - f) Asymptotische Entwicklungen: Nr. 82, 83, 113.
- F) Lemniskatische Integrale und Funktionen: Nr. 50, 51, 60, 61, 62, 63, 91a, 91b, 92, 95, 98, 112, 146.
- G) Arithmetisch-geometrisches Mittel: Nr. 98, 100, 101, 102, 106, 108, 109, 139, 140.
- H) Allgemeine elliptische Integrale und Funktionen: Nr. 105, 106, 108, 110, 111.

IV. GEOMETRIE.

- A) PYTHAGOREIScher Lehrsatz: Nr. 81.
- B) Grundlagen der Geometrie: Nr. 72, 99.
- C) Algebraische Kurven: Nr. 21.

V. WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG.

Nr. 88, 113.

VI. MECHANIK.

- A) Zusammensetzung von Kräften: Nr. 85.
- B) Anziehung von Kugel und Ellipsoid: Nr. 90, 142, 143.
- C) Ballistisches Problem: Nr. 93.

VII. ASTRONOMIE.

- A) Parallaxe: Nr. 97.
- B) Berechnung des Osterfestes: Nr. 107, 117.
- C) Planetenbahnen: Nr. 119, 121, 122, 125, 126, 129.
- D) Kometenbahnen: Nr. 94, 121, 127, 145.
- E) Mondbewegung: Nr. 120.

BERICHTIGUNGEN.

S. 7. Die Überschrift soll lauten: Vorrede. Mathematische Abhandlungen besonders aus dem Gebiete der Höheren Arithmetik und der Elliptischen Functionen von Dr. G. EISENSTEIN. Berlin 1847.

S. 110, Zeile 1, 2. Die Urschrift des Briefes von GAUSS an DROBISCH vom 14. August 1834 befindet sich im GAUSSARCHIV.

S. 148, in der Formel für s_4 (letzte Gleichung des art. [6.]) muß der Nenner des zweiten Bruches lauten $1 + 20s^4 - 26s^8 + 20s^{12} + s^{16}$

S. 150, Gleichung (3) muß lauten $AB = \frac{\pi}{4}$.

S. 171, Zeile 9 ist das Komma hinter S c h e d a zu streichen.

» » , Zeile 20, 21 in der Klammer ist zu lesen: es folgen nämlich auf die dreizehnte Dezimalstelle 0 noch die Stellen 73164.

S. 188, wo die Nummer [24] zweimal auftritt, ist das erste Mal [23] zu lesen.

S. 192, letzte Zeile ist statt $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ zu lesen $\left(\frac{1}{2}\right)^3$.

S. 251, zweite Fußnote ist statt S. 247 zu lesen S. 249.

S. 254, Gleichung (19) ist statt $\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^2$ zu lesen $\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4$

S. 379, dritte Fußnote ist statt *ново* zu lesen *нова*.

S. 389, in der Fußnote ist statt $\frac{1}{2} \pi \left(k + \frac{1}{2}\right)$ zu lesen $\frac{1}{2} \pi \left(k + \frac{1}{4}\right)$.

S. 444, vorletzte Textzeile und

S. 445, erste Fußnote ist statt 27. Januar zu lesen 24. Januar.

S. 509, fünfte Zeile der Bemerkung zu der Nr. [49] ist statt *) zu lesen **).

S. 535, Zeile 11 ist hinter »= 0« ein Komma zu setzen.

BEMERKUNGEN ZUR ERSTEN ABTEILUNG DES ZEHNTEN BANDES.

Die vorliegende erste Abteilung des zehnten Bandes von GAUSS' Werken enthält zunächst einige kleinere, bisher in den Werken noch nicht abgedruckte Veröffentlichungen, dann eine Reihe von Nachlaßstücken und Briefstellen aus den verschiedenen Gebieten der Reinen Mathematik, die eine erneute Durchforschung der Handschriften von GAUSS noch zu Tage gefördert hat, endlich eine Nachbildung des wissenschaftlichen *Tagebuchs* oder *Notizenjournals* und einen Abdruck des Textes dieser wichtigen Urkunde mit ausführlichen Erläuterungen. Die Nachlaßstücke und Briefstellen sind entsprechend den in den Werken bisher befolgten Grundsätzen nach ihrer Zugehörigkeit zur *Arithmetik*, *Algebra*, *Analysis* und *Geometrie* in Gruppen zusammengefaßt worden; über Einzelheiten unterrichtet am besten das nachstehende *Inhaltsverzeichnis*. Es möge nur noch erwähnt werden, daß, mit Rücksicht auf den Zusammenhang mit den hier zum ersten Male veröffentlichten Stücken, einzelne schon im dritten und achten Bande der Werke ganz oder teilweise abgedruckte Aufzeichnungen noch einmal wiedergegeben worden sind; der Gesamtumfang dieser Wiederholungen beträgt etwa 20 Seiten. Zur Bequemlichkeit für eine spätere Nachprüfung wurden die Stellen, wo sich die Urschriften der hier abgedruckten Nachlaßstücke befinden, durch Angabe der zur Zeit im GAUSSARCHIV angewandten Bezeichnungswiese kenntlich gemacht. Über diese Bezeichnungswiese sei hier — ohne damit der in einem folgenden Bande zu gebenden ausführlichen Beschreibung des Nachlasses vorzugreifen zu wollen — das nachstehende bemerkt.

Die kleinen Notizheftchen, die GAUSS von 1798 ab benutzt und anfangs als *Schedae* bezeichnet hat, tragen den Leitbuchstaben A und werden durch die kleinen Buchstaben a, b, ..., n unterschieden; wir haben also die Schedae Aa, Ab, ..., An. Die steif gebundenen Handbücher, deren erstes im Jahre 1800 begonnen wurde, sind mit dem Leitbuchstaben B und weiter mit a, b, ..., h bezeichnet; die den so gebildeten Zeichen Ba, Bb, ... vorangestellten Zahlen 15, 16, ... entsprechen der ältern Nummerierung der Nachlaßstücke, wie sie der in dem *Verzeichniss der Handschriften im Preussischen Staate*, I. Hannover, 3. Göttingen, 3. (Berlin 1894), S. 101—113, enthaltene Katalog des GAUSSschen Nachlasses von WILHELM MEYER gibt. Neben den Schedae und Handbüchern kommen für die abgedruckten Nachlaßstücke noch einzelne Druckwerke in Betracht, die GAUSS besessen und deren unbedruckte Seiten oder Durchschußblätter er mit wissenschaftlichen Aufzeichnungen beschrieben hat, so namentlich der LEISTE (siehe oben, S. 78, Fußnote), ferner eine Reihe von losen Zetteln, die mit den Leitbuchstaben E beziehungsweise F versehen sind, jenachdem sie zahlentheoretischen oder analytischen Inhalts sind.

Die wiedergegebenen Briefstellen wurden, so weit uns die Urschriften zugänglich waren, nach diesen abgedruckt oder mit ihnen verglichen. Bei den Nachlaßstücken und Briefen wurde die Schreibung der

Vorlage unverändert beibehalten, dagegen bei allem, was von den Bearbeitern herrührt, durchweg die neuere allgemeine deutsche Rechtschreibung angewandt. Wie in den früheren Bänden sind Einschaltungen der Bearbeiter in den GAUSSschen Text in eckige Klammern [], Abdrücke von Briefstellen und Mitteilungen, die nicht von GAUSS herrühren, in geschweifte Klammern {} gesetzt.

Die Auswahl der in diesem Bande abgedruckten arithmetischen Nachlaßstücke erfolgte im Einvernehmen mit P. BACHMANN, der auch die Erläuterungen zu vielen dieser Stücke verfaßt hat. Die geometrischen Stücke hat P. STÄCKEL herausgegeben und erklärt. Die Bearbeitung der übrigen Teile dieses Bandes, wie auch die allgemeine Redaktion lag in den Händen von L. SCHLESINGER, der dabei von P. STÄCKEL und vom Unterzeichneten unterstützt wurde. Bei der Erläuterung einzelner Nachlaßteile und Tagebuchaufzeichnungen haben, wie an den betreffenden Stellen kenntlich gemacht ist, außer den bereits Genannten noch M. BRENDDEL, R. DEDEKIND †, L. FEJÉR, R. FRICKE, A. GALLE, S. GUNDELFINGER †, J. HORN, E. LANDAU, A. LOEWY, O. PERRON, K. SCHWERING mitgewirkt.

Die dem Text eingefügten Erläuterungen zu den abgedruckten Stücken werden weiterhin durch die *Aufsätze über Gauss' wissenschaftliche Tätigkeit auf den einzelnen Gebieten der Mathematik* ergänzt. Diese Aufsätze sollen soweit sie sich auf Reine Mathematik beziehen in der zweiten Abhandlung des vorliegenden zehnten Bandes abgedruckt werden, soweit sie Physik, Astronomie und Geodäsie betreffen, zusammen mit den noch nicht veröffentlichten auf diese Gebiete bezüglichen Stücken des Nachlasses im elften Bande. Vor dem Abdruck in den Werken werden sie in der von BRENDDEL, SCHLESINGER und mir herausgegebenen Sammlung: *Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauss* dem Urteil der Fachgenossen unterbreitet.

F. KLEIN.