Een kwestie van tijd

De ontwikkeling van de
maansafstandenmethode
voor lengtebepaling
op zee

Steven Wepster
begeleid door Jan Hogendijk

november 2000

With the sextant he made obeisance to the sun-god, he consulted ancient tomes and tables of magic characters, muttered prayers in a strange tongue that sounded like Indexerrorparallaxrefraction, made cabalistic signs on paper, added and carried one, and then, on a piece of holy script called the Grail — I mean, the Chart — he placed his finger on a certain space conspicuous for its blankness and said, “Here we are.” When we looked at the blank space and asked, “And where is that?” he answered in the cipher-code of the higher priesthood, “31–15–47 north, 133–5–30 west.” And we said, “Oh,” and felt mighty small.

Jack London,
The Cruise of the Snark

Voorwoord

Het onderwerp van deze afstudeerscriptie ligt me na aan het hart. Toen ik nog op de lagere school zat wekten een paar zeekaarten, die ergens verloren op zolder lagen, mijn belangstelling voor navigatie, en ik hield spreekbeurten over de ontdekkingsreizen van Willem Barentsz en Maggelan. Ik ging mijn eigen ontdekkingsreizen maken: eerst op de Bergsche Plas, later over zee. Navigatie is me blijven boeien. Het geeft me een gevoel van verbonden zijn met de kosmos als ik mijn weg zoek met niet meer dan een sextant en een paar tabellenboeken. Belangstelling voor wiskunde ontstond toen ik ging nadenken over kaartprojecties en over de richting van de terminator van de maan (de zichtbare scheidingslijn tussen het verlichte en onverlichte deel).

Toen ik dan eindelijk vond, na wat omzwervingen, dat ik maar eens iets serieus moest gaan doen, ben ik een opleiding voor wiskundeleraar gaan volgen. Zodoende kwam ik in aanraking met de schoonheid van de wiskunde. Mijn oorspronkelijke motivatie bleek niet verloren te zijn gegaan want ik schreef een afstudeerscriptie over Thomas Harriot (1560–1621) die de schaaltoename van de Mercator- of wassende kaart berekend had.

Helaas gingen we op die opleiding altijd over op iets anders juist als het interessant begon te worden. Omdat het lesgeven op een middelbare school niet zo beviel was het aantrekkelijk om wiskunde te gaan studeren aan de Universiteit van Utrecht. Dat bleek een goede keus. Ik kon mijn nieuwsgierigheid de vrije hand geven, en ik leerde accepteren dat er zaken zijn waar ik wel mijn tanden inzet, maar waar ik niet doorheen kom.

Bij de vakgroep Geschiedenis en Maatschappelijke Funktie van de Wiskunde voelde ik me bijzonder op mijn gemak door de stimulerende en persoonlijke sfeer die Henk en Jan weten te creëren. Na een onderbreking wegens een noodzakelijke en persoonlijke ontdekkingstocht kon ik bij Jan terecht om af te studeren. Hij heeft me gestimuleerd om vooral iets te doen wat ik *leuk* vond. De geschiedenis van de maansafstandenmethode leek me een mooi project om aan te werken, en Jan ging akkoord.

Het resultaat ligt nu voor u. Ik hoop dat ik iets van mijn fascinatie met u kan delen.

Van alle docenten, familie, en vrienden die me hebben aangemoedigd en bijgestaan wil ik er een paar speciaal bedanken. Allereerst bedank ik Jan

Hogendijk voor de begeleiding, de vrijheid, en de thee: drie ingrediënten van onschatbare waarde, en Henk Bos voor de inspirerende gesprekken en de gastvrijheid bij de vakgroeplunches. Ik bedank Ferdinand Verhulst voor het commentaar op hoofdstuk 5 en Bert Theunissen voor de kennismaking met de Geschiedenis van de Natuurwetenschappen. I would like to thank Curtis Wilson for his remarks on the open issues on Mayers lunar theory. Liesbeths hulp bij het lezen van Latijn heeft enorm geholpen en heeft me veel voldoening bezorgd. Joanne, die altijd voor me klaar staat, sleepte me door de moeilijkste fase: de planning. Sander las hoofdstuk 3 en bevestigde dat ik mijn doelgroep bereik. Bij Rob kon ik ongestoord tekstverwerken toen ik thuis te veel werd afgeleid door stapels zeekaarten en zeilkleren. Maar boven ieder bedank ik mijn vader, die niet alleen mijn belangstelling wekte voor deze materie, maar die ook mijn studie mogelijk maakte.

Bronvermelding illustraties De plaatjes bij de opening van elk hoofdstuk heb ik zonder toestemming overgenomen uit de volgende bronnen (de aanduidingen tussen rechte haken verwijzen naar de bibliografie). Hst. 1: [Dav85]. Hst. 2: [And96, p. 151]. Hst. 3: `www.astro.uni-bonn.de/~Epbrosche/pictures/p-bartsch_1611_detail.gif`. Hst. 4: `www.vma.bme.hu/mathhist/BigPictures/Mayer_Tobias.jpeg`. Hst. 5: [May67, p. 1]. Hst. 6: [And96, p. 159]. Het plaatje op pagina 102 is afkomstig van [And96, p. 160]. De overige figuren heb ik zelf gemaakt met MetaPost.

Inhoudsopgave

Inleiding

Het lengteprobleem werd van belang in de tijd dat de Europese staten, te beginnen met Portugal en Spanje, aan hun overzeese expansie begonnen. Al spoedig waren er verschillende oplossingen — in principe dan, want ze waren geen van alle direkt toepasbaar. Pas aan het eind van de achttiende eeuw kwamen vrijwel gelijktijdig twee methoden in gebruik. In de tussenliggende tijd zochten wetenschappers naar mogelijkheden om de ondervonden hindernissen te overkomen. Er bestond grote maatschappelijke belangstelling voor het probleem, en men beschouwde het als een van de grootste technisch-wetenschappelijke uitdagingen van de tijd. Het tijdperk van de maansafstandenmethode is ongeveer een eeuw geleden afgesloten, maar over de invloed die de wiskunde langs deze weg heeft uitgeoefend op de maatschappij (nl. de veiligheid van de scheepvaart) is nog weinig bekend.

Deze scriptie gaat over de ontwikkeling van de maansafstandenmethode voor lengtebepaling op zee. Het is een onderwerp dat zich bevindt op het kruispunt van wiskunde, astronomie, en navigatie: drie vakgebieden die in de te bespreken periode minder streng gescheiden waren dan nu. De maansafstandenmethode is een van de eerste, misschien wel de eerste, maatschappelijk relevante toepassingen van de differentiaal- en integraalrekening. Met deze wiskundige techniek werd het mogelijk voldoende vat te krijgen op de beweging van de maan aan de hemel, en daarmee werd het mogelijk om de lengte op zee te bepalen.

Mijn opzet is om de ontwikkeling van de maansafstandenmethode te onderzoeken vanuit wiskundig oogpunt. De nadruk is komen te liggen op de maantheorie van Tobias Mayer (1723–1762) die de methode uitvoerbaar maakte. Die theorie is een van de belangrijkste schakels, evenwel is hij in de geschiedschrijving tussen wal en schip geraakt. Daardoor is er op een aantal punten een scheef beeld van ontstaan wat ik recht zet.

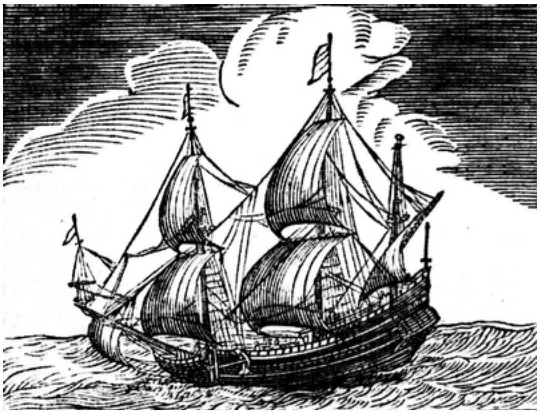
Het lezerspubliek dat ik voor ogen heb gehouden bij het schrijven bestaat uit tweedejaars wiskundestudenten en verder uit iedereen die belangstelling heeft voor de geschiedenis van de navigatie en/of astronomie en/of wiskunde. Als ik mijn werk goed gedaan heb dan kunnen tweedejaars studenten het verhaal volgen. Ik hoop dat de anderen het grootste deel kunnen verteren.

In hoofdstuk 1 behandel ik de maatschappelijke context van het lengteprobleem. Technische kwesties heb ik er zo veel mogelijk uit geweerd zodat het voor iedereen met historische belangstelling te lezen moet zijn. Hoofdstuk 2 gaat over de theorie van de maansafstandenmethode. Het bevat ook de benodigde kennis van astronomische navigatie. Wie niet van wiskunde houdt kan de methode van Borda overslaan. In hoofdstuk 3 komt de hemelmechanica aan de orde. Het heeft een tweeledig doel: om Mayers maantheorie in de context van de periode te plaatsen, en om de nodige technische begrippen te introduceren. Ik vind het zelf een erg mooi hoofdstuk en ik hoop dat u de 'smaak' van de hemelmechanica proeft, ook als de technische kwesties uw pet te boven gaan. In het volgende hoofdstuk stel ik u voor aan Tobias Mayer. Paragraaf 4.4 is de schakel tussen hoofdstukken 2 en 6. Hoofdstuk 5 is bedoeld voor wiskundigen en astronomen: het bevat een analyse van Mayers maantheorie. In hoofdstuk 6 staat hoe de maansafstandenmethode in gebruik kwam. De nadruk ligt er op de geschiedenis van de navigatie. In het laatste hoofdstuk vat ik mijn conclusies samen.

Tot slot nog een **waarschuwing** betreffende enkele gebruikte termen. Af en toe komen we een *klok* tegen; dat is een mechanisch instrument dat de tijd aanwijst, zoals u weet. Met een *tijdmeter* bedoel ik een instrument dat hetzelfde doet met een veel grotere mate van precisie. Het woord *chronometer* gebruik ik niet om consequent te blijven. Twee woorden komen voor in onalledaagse betekenissen; en tot overmaat van verwarring ook nog in *verschillende* betekenissen. *Lengte* is bijna altijd een hoek in graden: soms geografische lengte (oost of west op aarde), soms astronomische lengte (langs de ecliptica). Als niet uit de context blijkt welke betekenis ik bedoel, zeg ik het erbij. *Afstand* is soms radiaal zoals de afstand van de maan tot de aarde, maar in navigatiecontext veel vaker de boogafstand van de maan tot een ander hemellichaam zoals die vanaf de aarde wordt waargenomen. De term *maansafstand* is een nogal ongelukkige die ik toch maar aanhoud omdat hij in de literatuur geaccepteerd is.

Hoofdstuk 1

Het probleem van de lengtebepaling



De redenen waarom men zo veel belang hechtte aan het lengteprobleem zijn minder duidelijk dan doorgaans wordt verondersteld. In alle literatuur over de geschiedenis van het lengteprobleem is betrekkelijk weinig aandacht voor de motieven die er waren om het lengteprobleem zo hoog op de agenda te plaatsen. Het nautisch belang geeft volgens mij onvoldoende verklaring. Daarnaast worden economische, militaire, en strategische belangen genoemd. Het is echter zeer de vraag of het lengteprobleem met recht belangrijker werd gevonden dan andere problemen waarmee de navigatie en de zeevaart te kampen hadden[1].

1.1 Uitbreiding van de zeevaart

De Portugese en Spaanse pogingen om direkt, dat wil zeggen buiten de Arabische tussenhandelaren om, handel te drijven met Indië, vormden de aanleiding voor de grote ontdekkingsreizen van de vijftiende en zestiende eeuw. Vasco da Gama bereikte in 1498 Malabar (de tegenwoordige westkust van het Indiase schiereiland), Christoffel Columbus ontdekte in 1492 het Caraïbisch gebied, en in 1497 nam Cabot in naam van Groot-Brittanië bezit

[1]Een versie van dit hoofdstuk heeft gediend als scriptie voor het vak Geschiedenis van de Natuurwetenschappen II.

van een deel van Noord-Amerika. Reeds in 1494 sloten Spanje en Portugal op pauselijk gezag een verdrag (het Verdrag van Tordesillas) waarbij zij het eigendom van de nieuwe ontdekkingen regelden. Alle nieuwe ontdekkingen ten westen van een zekere meridiaan (370 *leguas* van 3,6 mijl ten westen van de Kaapverdische Eilanden) zouden toevallen aan de Spaanse kroon, en ten oosten ervan aan Portugal. Binnen dertig jaar bereikten de Spanjaarden de Specerijeneilanden (nu de Molukken) door naar het westen te zeilen, en de Portugezen door naar het oosten te zeilen; en niemand was in staat de geografische lengte van de eilanden vast te stellen[2].

Tot dan toe vonden zeereizen bijna allemaal in de Middellandse Zee of langs de kusten van West- en Noord-Europa plaats, en plaatselijke bekendheid speelde een grote rol in de navigatie. De ontdekkingstochten stonden aan het begin van een nieuwe fase in de navigatie, de scheepvaart en de wereldhandel[3]. De Portugese zeelieden leerden van astronomen hoe zij met de hoogte van de Poolster of de zon hun breedte konden bepalen. Ook leerden zij om de afstand die het schip in een bepaalde richting aflegde om te rekenen in lengte- en breedteverschil, weliswaar op een grove en onnauwkeurige manier, maar dat was niet zo'n bezwaar omdat de basisgegevens koers en snelheid onnauwkeurig waren[4]. Een van de belangrijkste Portugese wiskundig-astronomen was Pedro Nuñes (1502–1578), die de kenmerken van navigatie op een bolvormige aarde onderzocht: zoals het feit dat de meridianen convergeren naar de polen, en dat de kortste weg tussen twee plaatsen op aarde langs een grootcirkel gaat. Dit soort theorie lag evenwel ver buiten het bereik van de zeeman, die niet wiskundig geschoold was en slechts niet-begrepen, uit het hoofd geleerde regels toepaste[5].

1.2 Het lengteprobleem

Weliswaar kon een navigator een grove berekening maken van de plaats waar hij zich moest bevinden op basis van gezeilde koers en afstand, en hij kon de geografische breedte controleren met een hoogtemeting van de zon of de Poolster, maar hij had geen mogelijkheid om zijn geografische lengte te controleren. Lengtebepaling is onverbrekelijk met tijdmeting verbonden[6].

[2][Wil92, pp. 77–78].

[3][Tay56, p. 154]; [KGzj, pp. 40–41].

[4][Tay56, hst. 7].

[5][Tay56, pp. 177 e.v.; 215, 216].

[6]Voor lengtebepaling door middel van variatie (zie verderop) geldt dat niet; het was helaas geen werkzame methode. Dat breedte zo veel makkelijker is te bepalen dan lengte komt doordat het systeem van geografische coördinaten is gebaseerd op de rotatieas van de aarde, of, wat op hetzelfde neerkomt, op de equator die een vlak bepaalt loodrecht op die as. Door de rotatie van de aarde bewegen de hemellichamen schijnbaar in cirkels; hierop is onze tijdmeting gebaseerd. Lokale tijd is de tijd die zo geregeld is, dat de zon om 12 uur haar hoogste punt bereikt. In een oostelijker gelegen plaats is het dus later volgens de lokale tijd.

Columbus heeft op een van zijn reizen geprobeerd de lengte van een Caraïbisch eiland te bepalen door middel van een maansverduistering, volgens een principe dat al in de oudheid bekend was: vergelijking van de lokale tijden waarop de verduistering zich op twee verschillende plaatsen op aarde voordoet, is een maat voor het lengteverschil tussen die plaatsen. Columbus had een voorspelling door Regiomontanus (Johannes Müller, 1436–1476) van het tijdstip van de maansverduistering in Neurenberg bij zich. De lengte die hij vond was vele graden westelijker dan waar hij zich werkelijk bevond, hetzij doordat de voorspelling niet klopte, hetzij door een gebrekkige waarneming, hetzij doordat hij toerekende naar een positie dichter bij Indië. Een soortgelijke waarneming van Amerigo Vespucci in 1499 is omstreden[7].

Zelfs al zou in Columbus' tijd lengtebepaling door maansverduisteringen technisch uitvoerbaar zijn geweest, dan nog zou het weinig praktisch nut hebben gehad voor de scheepvaart. Maansverduisteringen komen namelijk te zelden voor. Dat bezwaar geldt veel minder voor sterbedekkingen (wanneer de maanschijf een vaste ster aan het oog onttrekt). Maar voorspellingen van sterbedekkingen zijn in hoge mate afhankelijk van de voorspelling van de beweging van de maan, die in de 16^{e} eeuw nog niet goed begrepen werd[8].

De maansafstandenmethode, ons hoofdonderwerp, is iets algemener. Bij deze methode leidt men het lengteverschil tussen twee plaatsen af uit de positie van de maan ten opzichte van de sterren. Natuurlijk was ook hiervoor goede kennis van de beweging van de maan onmisbaar. Het principe van de methode beschrijf ik uitgebreider in §2.2. Doorgaans wordt aangenomen[9] dat de eerste gepubliceerde beschrijving van de methode van de maansafstanden van de hand van Johann Werner (1468–1522) is, in een boek over astronomie dat in 1514 in Neurenberg verscheen. Maar W. Randles[10] wijst erop dat Gerard van Cremona (12^{e} eeuw) het principe al noemde. De beschrijvingen van Cremona en Werner trokken waarschijnlijk niet zoveel aandacht. Daarna kwam de methode voor in het indertijd populaire *Cosmographicus Liber* (1524) van Petrus Apianus (1495–1552), en in *Introductio Geometrica* (1533) van dezelfde auteur, waar hij de hele vroegere uitgave van Werner in had opgenomen. *Cosmographicus Liber* kreeg een ruime verspreiding, onder meer door de edities die Gemma Frisius (1508–1555) ervan verzorgde.

Gemma opperde zelf een heel andere oplossing voor het lengteprobleem. Het behelsde het 'meenemen' van de lokale tijd van de meridiaan van vertrek. Door deze tijd te bewaren middels een nauwkeurig lopende klok, en te vergelijken met de lokale tijd van de plaatselijke meridiaan, kon de lengte worden vastgesteld. Hoewel Werner en Gemma aanvankelijk niet aan leng-

[7] [And96, p. 378].

[8] Zie hst. 3 en 5. Voorspellingen van maansverduisteringen zijn om bepaalde redenen, die ik verder buiten beschouwing laat, iets makkelijker.

[9] [And96, Appendix C].

[10] [Ran85, p. 236].

tebepaling op zee dachten, werd het nut van hun ideeën al gauw daarmee in verband gebracht. Het probleem met Gemma's voorstel was dat goed lopende klokken niet bestonden — Christiaan Huygens (1629–1695) paste de slinger als regulator pas ruim een eeuw later toe, en vele andere technische problemen (waaronder de onregelmatige gang van een slingeruurwerk op een onvast platform zoals een schip) zouden pas ruim 240 jaar later zijn bedwongen. De Britse klokkenmaker John Harrison (1693–1776) slaagde er toen als eerste in om een klok te maken die lang genoeg goed bleef lopen op zee om bruikbaar te zijn voor navigatie.

In de tijd dat Johann Werner en Gemma Frisius hun ideeën om lengte te bepalen te berde brachten, begon het duidelijk te worden dat magnetische kompassen gewoonlijk niet naar het noorden wijzen, maar enige graden ten oosten of ten westen daarvan. De afwijking (de nautische term is *variatie*) bleek bovendien afhankelijk van de plaats op aarde. Dit suggereerde dat de variatie van het kompas informatie over de lengte zou kunnen geven. Het idee vond aanhangers onder onze landgenoten Petrus Plancius en Simon Stevin, Henry Bond in Groot-Brittanië, en het was de aanleiding voor een expeditie waarbij Edmond Halley de variatie op verschillende plaatsen op de Atlantische Oceaan in kaart bracht. Twee belangrijke problemen die aan deze methode kleven zijn dat de lijnen van gelijke variatie niet overal in noord-zuidrichting lopen (waar zij in oost-westrichting gaan levert variatie totaal geen bijdrage aan kennis van de lengte), en bovenal dat de variatie op één plaats niet constant is.

Dan was er nog de mogelijkheid om de manen van Jupiter als hemelklok te gebruiken: alle waarnemers op aarde kunnen het regelmatige verdwijnen en verschijnen van de manen in en uit de schaduw van die planeet gelijktijdig waarnemen. De tijdstippen waarop de verduisteringen plaats vinden zijn vrij nauwkeurig vooruit te berekenen. Galileo Galileï (1564–1642) heeft dit uitgewerkt nadat hij vier manen van Jupiter had ontdekt. Maar er is een sterrenkijker (met een vergroting van ongeveer 50×) nodig om de manen te zien, en zo'n kijker heeft maar een smal blikveld, waardoor op het dek van een bewegend schip de waarneming ondoenlijk is. Voor lengtebepaling op land was het wel een succesvolle methode. De opmeting van Frankrijk, één van de eerste projecten van de in 1666 opgerichte *Académie Royale des Sciences*, maakte er gebruik van. Als middel om de lengte op land te bepalen heeft deze methode bijgedragen aan betere zeekaarten, zonder welke de kennis van lengte op zee van weinig betekenis is.

1.3 Plaats in de wetenschap

Het reizen naar verre streken vergrootte de kennis van de wereld, en die kennis moest worden vastgelegd in coördinaten op kaarten. De kennis van de wereld en het heelal, en van de wetten die er gelden, maakte in deze periode een stormachtige ontwikkeling door. Het lengteprobleem paste daar uitstekend in. Volgens Bennett[11] staat het lengteprobleem model voor de verbinding die wetenschap en technologie in de zeventiende eeuw aangaan. Zo stond de ontwikkeling van nauwkeurige tijdmeters in verband met toenemend begrip van de slinger en van gravitatie; en dat een klok langzamer loopt dichter bij de equator vormde een aanwijzing voor de afplatting van de aarde. De ontwikkeling van de fijnmechanische techniek om een tijdmeter zo precies mogelijk te laten lopen bracht onder andere ingenieuze constructies voor temperatuurcompensatie. Een ander voorbeeld betreft Galileï's ontdekking van de manen van Jupiter, kort na de uitvinding van de telescoop. Afwijkingen in de waargenomen tijden van de verduisteringen van die manen leidden Ole Rømer tot de conclusie dat de lichtsnelheid eindig is.

Ook op het niveau van de overkoepelende wetenschappelijke organisaties speelde het lengteprobleem een rol. In 1662 werd de *Royal Society of London for Improving Natural Knowledge* opgericht. Het vinden van de lengte was één van de onderwerpen waarmee zij zich bezig zou gaan houden, aanvankelijk vooral door onderzoek naar Henry Bonds ideeën over de bruikbaarheid van magnetische variatie daarvoor. De Franse tegenhanger, de *Académie Royale des Sciences*, heb ik hierboven al genoemd in verband met de opmeting van Frankrijk. Een commissie bestaande uit vooraanstaande leden van dit instituut, waaronder Colbert en Huygens, was betrokken bij de beoordeling van een snelheidsmeter die het lengteprobleem oploste — volgens de uitvinder Reusner althans; de commissie oordeelde negatief.

De geschiedenis van het *Royal Observatory* te Greenwich is wel heel nauw verweven met het lengteprobleem. Deze sterrenwacht werd in 1675 opgericht door koning Charles II van Groot-Brittanië, nadat die had vernomen dat omtrent de kennis van de positie van hemellichamen nog veel te verbeteren viel. En dat had juist zijn aandacht omdat een onbekende Fransman, Sieur de St. Pierre, zich aan zijn hof vervoegd had, op zoek naar des konings geldelijke waardering voor een methode om de lengte op zee te bepalen. Zijn methode was een variant op maansafstanden, en het probleem met de maan was nog steeds dat het niet mogelijk was de positie ervan nauwkeurig te voorspellen. De astronoom John Flamsteed (1646–1719) liet dat aan de koning weten, die daarover zeer verbaasd was. De koning stichtte daarom de sterrenwacht en hij benoemde Flamsteed als hoofd (later kreeg deze funktie de titel van *Astronomer Royal*). Flamsteed kreeg als opdracht[12]:

> "...to apply himself with the most exact care and diligence to the rectifying the tables of the motions of the heavens, and the places of the fixed stars, so as to find out the so much desired longitude of places for the perfecting the art of navigation."

Flamsteed heeft veel waarnemingen van de plaats van de maan verzameld.

[11] [Ben85].
[12] [For75, p. 19].

Ook in de waarnemingen van zijn opvolgers Edmund Halley, James Bradley, en Nevil Maskelyne nam de maan een belangrijke plaats in.

1.4 Prijzen en politieke belangstelling

Wetenschappers werden in hun zoektocht naar de lengte aangemoedigd doordat verschillende overheden en particulieren prijzen uitloofden, te beginnen met twee Spaanse koningen (in 1567 en 1598). Het Spaanse hof keerde aanzienlijke sommen uit als aanmoediging aan veelbelovende onderzoeken[13].

De Hollandse Staten-Generaal stelde in 1600 een prijs in van 5000 pond ineens plus 1000 pond per jaar voor degene die een bruikbare methode aandroeg. Deze prijs werd ingesteld onder druk van de wetenschappers Petrus Plancius (1552–1622) en Matthijs Lakeman, precies in de periode dat de Hollandse handelsvaart op Indië op gang kwam[14]. In de loop der jaren zijn er vele voorstellen ingediend, maar slechts zelden kwam het tot praktische proefnemingen. Onder de plannenmakers, waarvan Davids een overzicht geeft[15], komen personen uit diverse geledingen van de samenleving voor, maar slechts een enkele zeeman. Het is mij niet duidelijk of dat komt omdat zeelieden geen belangstelling voor het lengteprobleem hadden, of omdat zij niet de tijd, de kennis, of de mogelijkheden hadden om voorstellen te doen.

De beloning die de Staten-Generaal uitloofden werd twee keer verhoogd. Dit heeft misschien te maken met het veranderen van de route van de Hollandse schepen. In de beginjaren zeilde men dwars over de Indische Oceaan naar Batavia, maar vanaf 1616 was de door de VOC voorgeschreven route op ca. 40° zuiderbreedte tot ongeveer de lengte van Batavia, en dan noordwaarts. Deze zuidelijke route had een aantal belangrijke voordelen: tijdwinst door de frequente westenwinden, en bovendien door het minder warme klimaat minder bederf van proviand en minder ziekte. Op deze route deed zich het lengteprobleem bijzonder sterk voor, vooral om het juiste moment van koersverandering naar het noorden te bepalen. Deed men dat te vroeg, dan kwam men terecht op de kust van Sumatra waarvandaan Straat Soenda en Batavia moeilijk te bezeilen waren, maar deed men het te laat, dan verdaagde men op de gevaarlijke kust van Australië, wat bij voorbeeld het schip *Batavia* fataal is geworden.

In Groot-Brittanië begon de transoceanische handel pas serieuze vormen aan te nemen in de laatste decennia van de 17^{e} eeuw[16]. Vóór die tijd besteedde men in boeken over navigatie wel enige aandacht aan het lengteprobleem, maar er kwam maar weinig nieuw werk tot stand. Thomas Streete was een van de uitzonderingen. In 1664 beweerde hij dat hij een methode had om lengte te bepalen, maar hij was alleen bereid tot publicatie

[13] [Gou23, p. 12].
[14] [Dav85, p. 69].
[15] [Dav85, pp. 130–131,181].
[16] [Tur96, pp. 117–120].

over te gaan indien daar een beloning tegenover stond. De vooruitzichten op het krijgen van een beloning waren echter minimaal. Volgens Turner is dat misschien voor Thomas Axe (overl. 1691) aanleiding geweest om een voorziening voor een dergelijke beloning in zijn testament op te nemen, voor degene die een bruikbare methode had om de lengte tot op een halve graad nauwkeurig te bepalen.

De bekendste prijs die is uitgeloofd voor het lengteprobleem staat bekend als de *Longitude Act*, bij wet geregeld door het Britse parlement in 1714. Deze prijs werd ingesteld nadat twee wiskundigen (William Whiston en Humphrey Ditton) een overigens tamelijk onzinnige oplossing voor het lengteprobleem hadden bedacht, waarvan zij de details, zoals wel vaker gebeurde, pas wilden onthullen als daar een beloning tegenover stond. Het lengteprobleem stond in Engeland inmiddels bijzonder in de belangstelling na een reeks ernstige scheepsrampen. De *Longitude Act* beloofde £10000 voor de uitvinder van een methode om de lengte te bepalen tot op 1° van een grootcirkel (60 zeemijlen); £15000 voor een nauwkeurigheid van $\frac{2}{3}^\circ$; en £20000 voor een nauwkeurigheid van $\frac{1}{2}^\circ$. De methode moest 'uitvoerbaar en bruikbaar' (*practicable and useful*) blijken op een reis naar West-Indië en terug. Om de wet uit te voeren werd een commissie ingesteld, later bekend als de *Board of Longitude*, waarin onder andere hoge vertegenwoordigers van de admiraliteit, de *Astronomer Royal*, vooraanstaande wiskundigen, en leden van het parlement zitting hadden.

Het direkte gevolg van de wet was een ware stortvloed aan zinnige en onzinnige oplossingen van het lengteprobleem. Maar ook de zinnige oplossingen brachten geen verbetering in de bestaande situatie: men wist al lang methoden om de lengte te bepalen, maar het lukte niet om die in praktijk te brengen. Een tijdmeter die voldoende nauwkeurig liep op zee kon technisch nog niet vervaardigd worden, de beweging van de maan was nog niet nauwkeurig voorspelbaar, en de planeten van Jupiter waren vanaf het dek van een slingerend schip niet waar te nemen. De *Act* hield in ieder geval wel een maatstaf in voor wat *voldoende nauwkeurig* was. *Finding the longitude* werd in het Engels een uitdrukking voor iets wat net zo moeilijk was als *squaring the circle.*

De Franse overheid heeft niet een prijs ingesteld, behalve een enkele keer op individuele basis zoals in het geval van Reusner. Wel liet de politicus Rouillé de Meslay in 1715 in zijn testament vastleggen dat de *Académie des Sciences* twee prijsvragen jaarlijks uit moest schrijven voor: a) een onderwerp betreffende de bewegingen in het zonnestelsel; en b) verbeteringen op het gebied van lengtebepaling en navigatie. De prijsvragen die de *Académie* in de loop der jaren uitschreef waren een impuls voor het theoretische werk van Clairaut, Euler, d'Alembert en anderen op het gebied van de hemelmechanica[17].

[17] Volgens Marguet is Rouillé bij het opmaken van zijn testament mogelijk beïnvloed door de gebeurtenissen in Groot-Brittanië [Mar17, p. 48]. Als dat zo is, dan is er toch

Hoewel de prijsvragen van de *Académie des Sciences* invloed hebben gehad op de ontwikkeling van de hemelmechanica, en langs die weg op de vooruitgang van de navigatie, moet over het algemeen geconstateerd worden dat de ingestelde prijzen weinig of geen direkte vooruitgang hebben veroorzaakt op het gebied van het lengteprobleem[18]. De ter beoordeling ingediende voorstellen waren hetzij onwerkbaar, hetzij herhalingen van reeds bekende methoden zonder de praktische moeilijkheden daarbij op te lossen. Wel geven de prijzen aan hoezeer het lengteprobleem in de belangstelling stond. De hoogte van het prijzengeld volgens de *Longitude Act* lijkt buitensporig groot — een waarde van vele miljoenen in de huidige tijd. Bij nader inzien vind ik dat eigenlijk wel meevallen, want de waarde van een scheepslading afkomstig uit Indië heeft dezelfde grootte-orde[19].

1.5 Belangen

Uit het bovenstaande blijkt zeer duidelijk *dat* er grote belangstelling was voor het lengteprobleem. Laten we proberen na te gaan *waarom* die belangstelling bestond. De eerste gedachte die opkomt, is dat kennis van lengte onmisbaar is voor navigatie. Ik denk echter dat daar niet de belangrijkste drijfveer ligt. Lengte bepalen is voor ons zo iets vanzelfsprekends dat we ons bijna niet voor kunnen stellen dat iemand het zonder moest stellen.

Het Britse Lagerhuis ontving in de aanloop naar de *Longitude Act* een petitie waaruit duidelijk blijkt hoe men over het lengteprobleem dacht[20]:

> "A Petition of several Captains of her Majesty's Ships, Merchants of *London*, and Commanders of Merchantmen, in behalf of themselves, and all others concerned in the navigation of *Great Britain*, was presented to the House, and read; setting forth, That the Discovery of the Longitude is of such Consequence to *Great Britain*, for Safety of the Navy, and Merchant Ships, as well as Improvement of Trade, that, for want thereof, many Ships have been retarded in their Voyages, and many lost"

Het betrof dus een probleem van nationaal belang, voor de veiligheid van oorlogs- en koopvaardijschepen en voor de handel, waarbij ook enig eergevoel meespeelde. Dat was de opinie in de achttiende eeuw. Ik wil het belang van het lengteprobleem enigszins relativeren.

---

enige invloed van de *Longitude Act* op het werk van Euler, Clairaut, en anderen. Chandler [Cha96, p. 38] heeft dit waarschijnlijk over het hoofd gezien, maar de kern van zijn betoog dat die ontwikkelingen het resultaat waren van wetenschappelijke nieuwsgierigheid blijft overeind, lijkt me.

[18] [Cha96, pp. 38–42].

[19] [Dav85, hst. 2].

[20] Overgenomen uit [How80, p. 50].

Navigatie Het bepalen van de lengte was voor de Nederlandse schepen, in verband met de routevoorschriften van de VOC, belangrijk bij het kruisen van de paardebreedten (het gebied met veelvoorkomende windstilte nabij de equator), en aan het eind van het traject over de zuidelijke Indische Oceaan (zie p. 8). Vermoedelijk minder belangrijk was het bepalen van lengte nabij de kust van Brazilië en bij de aanloop van Kaapstad, omdat er dan wel andere tekenen waren die de nabijheid van land verraadden zoals de aanwezigheid van vogels of het aanloden van de zeebodem. In het algemeen is lengtebepaling belangrijker om een klein eiland terug te vinden, dan om een continent aan te doen[21]. Verhalen over scheepsrampen die veroorzaakt zouden zijn door gebrek aan kennis van lengte speelden zich dan ook meestal af rondom zulke eilanden. Marguet[22] vermeldt vele zulke voorvallen.

In een onbekend aantal gevallen was het echter niet het gebrek aan lengte als zodanig, maar eerder de slechte uitoefening van de totale navigatie, die geheel of gedeeltelijk verantwoordelijk was voor de scheepsramp. Dit gold zeker voor de ramp van de Britse admiraliteitsschepen onder leiding van Sir Clowdisley Shovel in 1707, die vaak genoemd wordt als belangrijke factor in de vorming van de publieke opinie en later bij het instellen van de *Longitude Act*[23]. Onderzoek heeft aangetoond dat ook op de vloot van Anson (de latere admiraal en voorzitter van de *Board of Longitude* toen die Harrisons tijdmeter en Mayers maantabellen beoordeelde) de navigatie leed onder een gebrek aan standaardisatie[24]. De navigatie in de 17e en 18e eeuw was meer een kunst dan een kunde. Samuel Pepys, secretaris van de Britse admiraliteit, noteerde in 1683[25]:

> "It is most plain from the confusion all these people are to be in how to make good their reckonings (even each man's with himself) and the nonsensical arguments they would make use of to do it, and disorder they are in about it, that it is by God Almighty's providence and great chance and the wideness of the sea that there are not a great many more misfortunes and ill chances in navigation than there are."

Er lijkt meer aan de navigatie te schorten dan alleen het lengteprobleem.

Naast het lengteprobleem speelden er nog verschillende andere gevaren een rol bij de scheepvaart, zoals averij, gezondheid van de bemanning, oor-

[21] De exploratie van de Grote Oceaan komt dan ook pas op gang met de reizen van James Cook die, aan het eind van de achttiende eeuw, in staat is om zijn lengte te bepalen. Lengtebepaling is aan de westkust van Australië wél belangrijk omdat op grote afstand ervan veel gevaren voor de navigatie liggen die niet of nauwelijks boven water steken.

[22] [Mar17].

[23] [How80, p. 47].

[24] [May]. Het betreft dezelfde Anson, en dezelfde reis (1740–1743), die Gould in [Gou23, p. 2–3] aanvoert als voorbeeld van de gevolgen die onbekendheid van de lengte kon hebben. Anson had grote moeilijkheden om het eiland Juan Fernandez te vinden, waardoor tientallen bemanningsleden aan scheurbuik overleden. Dat de praktijk van de navigatie gebrekkiger was dan nodig maak ik ook op uit [Dav85, p. 290].

[25] Aangehaald van [Sti96, p. 72].

logen en kaapvaart. Deze andere gevaren relativeren het belang van het vinden van de lengte. Uitspraken als die van Gould[26]: dat het lengteprobleem "overshadowed the life of every man afloat, and the safety of every ship and cargo", lijken me meer gebaseerd op het belang dat men blijkbaar aan het probleem hechtte dan aan de werkelijke noodzaak om het op te lossen. Het is de vraag waarom het lengteprobleem zo veel meer aandacht kreeg dan de andere problemen. Achteraf bekeken zou het wel eens waardevoller kunnen zijn geweest als men meer aandacht had besteed aan standaardisatie, verbeteringen in het nautisch onderwijs, en betere leefomstandigheden voor de bemanning. Ook Davids merkt op dat het vinden van een oplossing voor het lengteprobleem minder belangrijk is geweest dan vele mensen in die tijd wel dachten, daar de zeelieden meestal toch op de plaats van bestemming kwamen[27].

Economie en strategie De handel op Indië en Amerika bracht eerst Spanje en Portugal, later Nederland, Groot-Brittanië en Frankrijk, grote rijkdom. De welvaart in deze landen was afhankelijk van de aanvoer van goederen uit de overzeese gebieden. De vele handelsoorlogen onderstrepen het strategisch belang dat de landen aan het handelsverkeer hechtten. In de afzonderlijke landen valt het toenemen van de aandacht voor het lengteprobleem samen met het toenemen van het belang van de handel.

Toch, ondanks de rivaliteit en de handelsoorlogen, lijkt er geen monopolie uitgeoefend te zijn op kennis. Huygens is met zijn klokken in de weer geweest in Frankrijk, Nederland, en Groot-Brittanië. Verschillende uitvinders (Galileï, Morin) wendden zich tot meer dan één overheid om hun producten van inventiviteit te verkopen. En de *Board of Longitude* beschikte over twee werkzame methoden om lengte te bepalen: de klokken van Harrison en de maantabellen van Mayer. De *Board* beschouwde dat niet als gevoelige kennis en stónd zelfs op openbaarmaking van de vernieuwingen. De gegevens van de *Nautical Almanac* waren in de jaren zeventig van de achttiende eeuw vrijelijk beschikbaar in Frankrijk, waar Lalande er een Franse uitgave van de *Connaissance des Temps* mee verzorgde[28]. Er was soms wel sprake van een zekere mate van geheimhouding door individuen die op zoek waren naar eigen voordeel: Streete, Whiston/Ditton, en zelfs de eerste *Astronomer Royals* die hun waarnemingen als privé-eigendom beschouwden (niet geheel ten onrechte overigens; Flamsteed moest zelf de instrumenten voor die waarnemingen bekostigen).

Een nauwkeurig en efficiënt gevoerde navigatie droeg bij aan het economisch succes van een handelsreis. Het uitrusten en bemannen van een schip om handel te drijven in Oost- of West-Indië vergde grote investeringen, en

[26] [Gou23, p. 3].

[27] [Dav85, p. 86].

[28] [How89, pp. 120–121]; zie ook p. 93. Dit was in de periode dat Groot-Brittanië en Frankrijk in conflict waren door de onafhankelijkheidsstrijd van Amerika.

hoe eerder een schip terug was met handelswaar, hoe eerder de investeringen hun vruchten afwierpen. Verlies van het schip betekende natuurlijk verlies van de gedane investeringen. Het risico werd des te groter naarmate de routes langer waren en de reizen langer duurden. Verschillende auteurs[29] concluderen dat lengtebepaling dus ook economisch belangrijk was. Ik denk dat dat verklaart waarom de inspanningen om de lengte te vinden synchroon liepen met het toenemen van de transoceanische handelsvaart, in Spanje en Portugal eerder dan de in de Noord-Europese landen. Zonder vooruitzicht op financieel voordeel zou niemand een geldprijs hebben ingesteld. Toch wil ik enkele kanttekeningen plaatsen bij het economisch belang.

De Hollandse VOC-schepen maakten een rondreis naar Oost-Indië in ongeveer anderhalf jaar. Eénderde van die tijd waren zij bezig met handel drijven en lading innemen. De timing van de uit- en thuisreis was afhankelijk van het moessonseizoen; en de vaarroutes werden gedicteerd door de heersende winden. Bovendien bleven de schepen zowel op de uit- als op de thuisreis weken in Kaapstad liggen om te provianderen en om averij te herstellen[30]. Schepen die naar West-Indië gingen, maakten een oversteek in ongeveer twee maanden, en met de tijd die nodig was voor handel drijven en laden bleef het meestal tot één reis per jaar.

Het lijkt me dat nauwkeurige lengtebepaling weinig kon bijdragen aan het verkorten van de reistijd. Weliswaar kostte de voorzichtigheid die men moest betrachten door gebrek aan positie-informatie enige tijd, maar op het geheel van een reis kan dat toch niet zo veel uitgemaakt hebben. Voor schepen van andere nationaliteiten zal de situatie niet veel anders zijn geweest.

Landes wijst op de afname van de reistijd aan het eind van de achttiende eeuw, en het economisch belang daarvan[31]. Hij wijt de afname voor een deel aan kortere overligtijd (efficiënter laden in de havens). Hij speculeert dat de mogelijkheid om lengte te bepalen een grotere onafhankelijkheid van de navigatie met zich meebracht. Dat zou betekenen dat de navigator meer vrijheid had in de keuze van de route, meer vrijheid om in elk seizoen zee te kiezen en gunstige wind op te zoeken. Ik vind dat een interessant idee, maar er is meer onderzoek nodig om Landes' stelling te onderbouwen.

1.6 Wetenschap

Er zijn dus zeker goede redenen waarom het lengteprobleem in de belangstelling stond. Ik ben de mening toegedaan dat die belangstelling groter was dan gerechtvaardigd: het lijkt erop dat men het lengteprobleem hét allesoverheersende probleem vond waarmee de navigatie te kampen had. Het

[29] Bijvoorbeeld [Sti96, pp. 78–79]. Ik bestrijd echter zijn stellige maar niet onderbouwde uitspraak dat "Inability to find a ship's longitude proved the greatest obstacle to the improvement of navigational practice"; zie hierboven.

[30] [ea78, deel II, pp. 196–199].

[31] [Lan96, pp. 28–29].

was weliswaar moeilijk probleem, maar niet het enige. De veiligheid van de scheepvaart zou ermee gediend zijn geweest als een aantal andere praktische problemen grondiger waren aangepakt. Ik baseer dat op de klachten van Pepys en anderen, en op de recentere onderzoeken van May, die betrekking hebben op de algehele toestand van de navigatie.

Er wás wel aandacht voor zulke zaken, zoals blijkt uit het werk van de *mathematical practitioners* in Groot-Brittanië en de Hollandse leermeesters in de wiskunde en de navigatie[32]. Ik heb me geen beeld kunnen vormen in hoeverre dat wat bekend en mogelijk was, ook daadwerkelijk in de praktijk is toegepast. Het feitenmateriaal is omvangrijk en complex; bovendien voert het te ver van het hoofdonderwerp af. Daarnaast vraag ik me af in hoeverre een zeeman belangstelling had voor het lengteprobleem, en meer in het algemeen voor een verwetenschappelijking van de navigatie. De zeelui van toen kwamen niet van een HTS af, zoals nu.

De beroepsgroep van de *mathematical practitioners* lijkt wel in het leven geroepen te zijn voor de problemen van de navigatie. De leden waren geen academici en geen handwerkslieden maar meer een soort ingenieurs; wiskundig onderlegd en met een sterke belangstelling voor praktische kwesties. Elke beoefenaar had wel een meet- of rekeninstrument van eigen vinding. Velen hielden zich bezig met verbeteringen en onderwijs op het gebied van navigatie. Als Bennett beweert dat de 17^e^-eeuwse navigatieliteratuur overloopt van de wanhopige verwijzingen naar de moeilijkheid van het lengteprobleem[33], dan neem ik aan dat hij doelt op de literatuur die deze *mathematical practitioners* en academici schreven. Precies deze mensen waren het die de toenadering tussen wetenschap en techniek (waar Bennett op doelde) bewerkstelligden; een toenadering die van groot belang is geweest voor de ontwikkeling van beide, en die deels draait om het lengteprobleem.

Daar ligt, denk ik, nog een drijfveer voor het zoeken naar lengte. Wetenschap was sterk in opkomst. Het lengteprobleem bood verschillende interessante perspectieven. Het was een concreet probleem waar althans in theorie verschillende oplossingen voor bekend waren, gebaseerd op verschillende principes. De moeilijkheid was om ten minste één van die oplossingen te implementeren, en dat maakte onderzoek op diverse terreinen nodig. De wissel- en samenwerking tussen technici en theoretici is daarbij een vruchtbare gebleken.

Daarnaast stonden wetenschap en techniek maatschappelijk in de belangstelling. Oplossen van het lengteprobleem zou zonder twijfel *scoren*. Het kwam verschillende keren voor dat iemand beweerde dat hij een oplossing had, en dat hij daarvoor financiële beloning wilde. Dit heeft vermoedelijk bijgedragen aan het instellen van enige prijzen: die van Axe, de *Longitude Act*, en misschien ook die van de Staten-Generaal. Het is een prikkelende

[32] Zie [Tay56], [Dav85].

[33] [Ben85, p. 220].

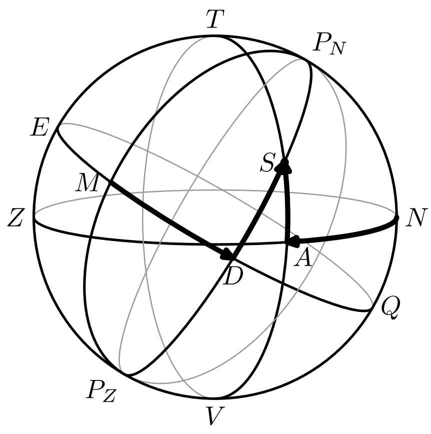
vraag in hoeverre primaire (intern wetenschappelijke) en secundaire (geld en aanzien) drijfveren van de wetenschap hebben bijgedragen aan de grote maatschappelijke belangstelling voor het lengteprobleem.

Hoofdstuk 2

Lengte uit maansafstand

In §1.2 heb ik enkele principes genoemd waarop pogingen om lengte op zee te vinden, waren gebaseerd. We beperken ons tot twee principes: ofwel een tijdmeter meenemen die nauwkeurig de lokale tijd van de meridiaan van de vertrekhaven bewaart (of de meridiaan van een andere bekende plaats); ofwel aan de hemel de lokale tijd van zo'n meridiaan aflezen. In beide gevallen moest een navigator, om zijn lengte te bepalen, de lokale tijd van de referentiemeridiaan vergelijken met de lokale tijd van zijn eigen meridiaan. Hoe dat in z'n werk gaat staat in §2.1 beschreven. Het tijdmeterprincipe blijft in dit verhaal op de achtergrond.

De beide genoemde principes waren gericht op het vinden van de referentietijd: de lokale tijd op de referentiemeridiaan waar de waarnemer zich in het algemeen *niet* bevindt. Aan het begin van de 18$^{\text{e}}$ eeuw waren beide principes nog niet in een realiseerbare fase gekomen. Een tijdmeter was een technisch moeilijk te realiseren instrument. Voor het alternatieve principe stonden in hoofdzaak twee methoden kandidaat. De ene betrof het waarnemen van verduisteringen van de manen van Jupiter; zoals gezegd was deze methode aan boord niet bruikbaar. De andere is die van de maansafstanden, waarvan ik in dit hoofdstuk de werking uit de doeken doe. De term maans*afstand* is wat verwarrend: het gaat niet om de afstand van de maan tot een of ander voorwerp zoals de aarde, maar om de *hoek*afstand van de maan tot een ander hemellichaam zoals die vanaf de aarde wordt waargenomen. Het obstakel bij deze methode was dat de loop van de maan aanvankelijk niet met de vereiste nauwkeurigheid te berekenen was. Waarom



Figuur 2.1: Coördinaten op de hemelsfeer.

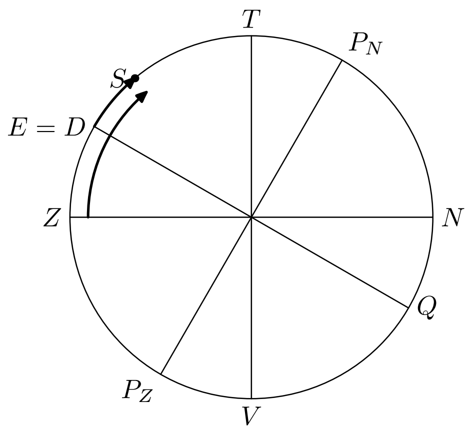
dat zo moeilijk was en hoe dat werd opgelost beschrijf ik respectievelijk in de hoofdstukken 3 en 5. We beginnen met een spoedcursus astronomische navigatie, vooral om de terminologie te leren kennen.

2.1 Astronomische navigatie

Voor het ongewapende oog van een waarnemer op aarde lijken alle hemellichamen zich te bevinden op een zeer ver verwijderde bolschil, met de aarde in het midden. Deze denkbeeldige bolschil noemen we de *hemelsfeer*. Het middelpunt van de aarde is ook het middelpunt van de hemelsfeer. In wiskundig opzicht is het precies wat we nodig hebben om richtingen in de ruimte aan te geven. Op de hemelsfeer brengen we twee coördinatensystemen aan: de ene onafhankelijk van de plaats van de waarnemer, de andere afhankelijk. Zie figuur 2.1.

Om de onafhankelijke coördinaten te definiëren snijden we het vlak van de aardse equator (het *equatorvlak*) met de hemelsfeer. De grootcirkel waar zij elkaar snijden is de *hemelequator* EDQ. We snijden de aardas (die loodrecht op het equatorvlak staat) met de hemelsfeer en verkrijgen zo de noordelijke en zuidelijke *hemelpolen* P_N en P_Z. Om een referentierichting aan de hemelequator te krijgen, kiezen we één meridiaan op aarde uit; deze projecteren we op de hemelsfeer in de halve grootcirkel $P_N M P_Z$ (M op de equator gekozen), die dus met de aardrotatie mee beweegt en na een dag de hele sfeer heeft doorlopen. Om de positie van een hemellichaam S aan de sfeer aan te geven, trekken we de halve grootcirkel $P_N S D P_Z$ (deze ligt in het vlak door de aardas en S). De coördinaten van S zijn de *declinatie* DS en de *uurhoek* MD.

Het andere stel coördinaten sluit nauw aan bij de manier waarop onze waarnemer de hemel ziet. Baseerden we ons hierboven op het equatorvlak



Figuur 2.2: Middagbreedte.

en de aardas, nu gaan we uit van het horizontale vlak en de verticaal van de waarnemer. Onder verwaarlozing van de aardse diameter snijdt het horizontale vlak de hemelsfeer in een grootcirkel, die we de *horizon* noemen; deze verdeelt de hemel in een zichtbare en een onzichtbare helft (afgezien van straalbuiging in de dampkring en afgezien van de ooghoogte van de waarnemer). Het snijpunt T van de verticaal met de zichtbare helft van de hemel heet het *toppunt* of *zenit*; het andere snijpunt V heet *voetpunt* of *nadir*. De grootcirkel TP_NNVP_ZZ snijdt de horizon in de punten N en Z, die de noord- en zuidrichting aangeven. Het vlak door de verticaal en het hemellichaam S snijdt de sfeer in de *verticaalcirkel*, waarvan $TSAV$ een helft vormt. De coördinaten van S zijn dan de *hoogte* AS en het *azimut* NA (of ZA, astronomen definiëren het azimut vanaf Z). In plaats van de hoogte van S kunnen we ook de *zenit-* of *topsafstand* TS opgeven: er geldt $TS + AS = 90°$.

Astronomische plaatsbepaling is de bezigheid waarbij de navigator zijn geografische positie achterhaalt door metingen aan de coördinaten van hemellichten te doen in het tweede coördinatensysteem. In de praktijk op zee kan alleen de hoogte voldoende betrouwbaar worden gemeten. Met de tijd (dat wil zeggen de stand van de referentiemeridiaan P_NMP_Z) van de waarneming kan de navigator de coördinaten van het hemellicht in het eerste systeem bepalen, gewoonlijk door die op te zoeken in astronomische tabellen, zgn. *efemeriden*. Hoe hij vervolgens zijn positie afleidt uit de transformatie tussen de coördinaten is niet relevant want er is een tijdmeter bij nodig, en we zijn juist bezig met navigatie *zonder* tijdmeter. Twee bijzondere gevallen behandel ik wel: de waarneming van de middagbreedte, en het vaststellen van de lokale tijd.

Het vaststellen van de middagbreedte gebeurt door het waarnemen van de hoogte ZS van de zon op het moment dat die in de meridiaan van de waarnemer staat, dat is de boog $TEZP_ZV$ in figuur 2.2. De geografische breedte van de waarnemer is de boog $DT = 90 + DS - ZS = DS + ST$, de som van topsafstand en declinatie. De breedte is dus verschrikkelijk simpel te berekenen. Bovendien kan de waarneming zonder tijdmeter plaatsvinden omdat de zon haar grootste hoogte bereikt in de meridiaan, en dat is te zien met het meetinstrument. Zo werd de breedte vaak bepaald door navigatoren vanaf de 15^{e} eeuw. Alleen was dat voor hun niet verschrikkelijk simpel: om negatieve getallen te vermijden hadden ze dertien verschillende regels uit het hoofd te leren.

Het vaststellen van de lokale tijd is belangrijk omdat het verschil tussen de lokale tijd van de waarnemer en de lokale tijd op een andere meridiaan direkt is om te rekenen in lengteverschil. De aarde draait in 24 uur om haar as, zodat 360° lengte overeenkomt met 24 uur, dat is 15° per uur. Elk uur tijdverschil komt dus overeen met 15° lengteverschil. In figuur 2.1 stelt S de zon voor; het is middag of 12 uur lokale tijd[1] als de zon in de meridiaan $TEZP_ZV$ staat. In de situatie die de figuur aangeeft moet P_NSDP_Z nog de boog ED aan de equator afleggen vóórdat de zon in de meridiaan staat. Dit is in de richting van de schijnbare beweging van de hemelsfeer, en het is dus vóór de middag. De boog DE is de *lokale uurhoek*; het is hoek P_N in de boldriehoek P_NTS. In die boldriehoek zijn de zijden: $TP_N = 90° - \text{breedte}$, $P_NS = 90° - \text{declinatie}$, en $TS = 90° - \text{hoogte}$. De hoogte kan de navigator meten, de declinatie opzoeken in de efemeriden, en zijn breedte ontleent hij aan de laatste middagbreedte en de sindsdien gevaren koers en afstand. Alle zijden van de boldriehoek zijn dus bekend. De hoek P_N berekent hij met[2]

$$\cos P_N = \frac{\cos TS - \cos P_NT \cos P_NS}{\sin P_NT \sin P_NS}.$$

De lokale tijd is dan, met P_N uitgedrukt in graden:

$$12 \text{ uur} \pm P_N \frac{24}{360},$$

$+$ of $-$ al naar gelang de zon ten westen of ten oosten van de meridiaan staat.

2.2 Principe van maansafstanden

Tussen twee Nieuwe Manen verlopen ongeveer $29\frac{1}{2}$ dagen, en in die tijd beschrijft de maan een volle cirkel aan de hemel ten opzichte van de zon. Ten opzichte van de sterren duurt een omwenteling van de maan iets korter (nl. $27\frac{1}{3}$ dagen) door de schijnbare beweging van de zon van ongeveer een

[1]Om precies te zijn: dit is de *ware* lokale tijd, zie voetnoot 7 op p. 94.

[2]Voor afleidingen van boldriehoeksformules zie een boek over sferische astronomie of zeevaartkunde.

graad per dag. Per uur beweegt de maan dus ruim $\frac{1}{2}^{\circ}$ ten opzichte van de andere hemellichamen. De maan is daardoor te beschouwen als de wijzer van een grote klok, en de sterren en de zon vormen dan de wijzerplaat. In deze metafoor is het dagelijkse opkomen en ondergaan van de zon toe te schrijven aan het feit dat de klok in z'n geheel ronddraait. De methode van de maansafstanden komt neer op het aflezen van deze hemelklok.

Werner (p. 5) beschreef het probleem om het verschil in lengte tussen twee ver verwijderde plaatsen te vinden. Hij dacht daarbij in eerste instantie aan plaatsen te land[3]. Hij liet een (denkbeeldige) geograaf naar één van de twee plaatsen gaan om daar op een vastgesteld tijdstip met een Jakobsstaf (een eenvoudig hoekmeetinstrument om hoeken op $20'$ nauwkeurig te meten) de hoek te meten tussen de maan en een ster in de dierenriem. De geograaf moest vervolgens, met behulp van een tabel die de beweging van de maan per uur gaf, de lokale tijd berekenen waarop de ster en de maan in samenstand[4] zouden zijn. Eveneens door berekening moest hij de lokale tijd van samenstand in de andere plaats vaststellen. Het verschil tussen de berekende tijden kwam overeen met het verschil in lengte volgens 1 uur $\doteq 15°$. De tussenstap met de samenstand is in feite niet nodig. Werner benadrukte dat de beweging van de maan nauwkeurig bekend moest zijn. Volgens hem was het niet nodig om de meting te herleiden naar het middelpunt van de aarde; wie dat niet gelooft verwees hij naar Ptolemaeus' *Almagest*. Hier maakte Werner een verkeerde inschatting want die herleiding is wel degelijk belangrijk, zoals we nog zullen zien. Daarnaast is de nauwkeurigheid van de Jakobsstaf volstrekt ontoereikend. Het gaat niet aan om daar kritiek op te hebben omdat de hele methode zuiver hypothetisch was; de noodzakelijke betrouwbare voorspellingen van de beweging van de maan waren pas 240 jaar later beschikbaar.

2.3 Herleiden van de waarneming

In 1634 claimde Jean-Baptiste Morin (1583–1656) dat hij het probleem om de lengte op zee te bepalen had opgelost met de maansafstandenmethode, en hij wendde zich eerst tot het Franse hof en later tot de Staten van Holland om er een beloning voor op te strijken. Zijn standpunt ten aanzien van tijdmeters was dat hij niet wist of het de duivel zou lukken er een te maken, maar dat het voor mensen waanzin was om het te proberen.

Volgens Morin waren nodig een waarneming van de maansafstand en een waarneming die de lokale tijd opleverde. Morin stelde voor om voor de lokale tijd de ware plaats van de maan te berekenen uit de efemeriden. Het verschil tussen berekende en waargenomen plaats van de maan gaf dan, samen met

[3]Dat blijkt uit de vertaling van zijn beschrijving, [And96, p. 385].

[4]Samenstand of conjunctie van twee hemellichamen is de gebeurtenis dat zij dezelfde astronomische lengte hebben.

de beweging van de maan per uur, het tijdverschil tussen de meridiaan van de waarnemer en de meridiaan waarop de efemeriden waren gebaseerd. Morin had de zaak goed begrepen, en hij gaf een goede behandeling van de boldriehoeksmeetkunde die nodig is om de waarneming te herleiden naar het middelpunt van de aarde. Hij had echter niet wat hij beweerde: een oplossing voor het lengteprobleem; omdat de beweging van de maan nog immer niet nauwkeurig bekend was. Wel stelde hij voor om een sterrenwacht op te richten om op dit punt verbetering te brengen, wat waarschijnlijk wel invloed gehad heeft op de oprichting van de Parijse sterrenwacht in 1667. Hij stelde ook een nauwkeuriger hoekmeetinstrument voor, dat echter te onpraktisch voor gebruik was (er hing een gewicht van 100 pond aan om het te stabiliseren).

Morins uitwerking van de herleiding naar het midden van de aarde[5] was niet spectaculair en bracht de oplossing van het probleem niet wezenlijk dichterbij, zegt Cotter: de enige reden waarom niemand dit eerder had uitgewerkt, was dat niemand er wat aan had zolang het probleem van de maanbeweging niet was opgelost. Het was een noodzakelijke stap die, als Morin het niet gedaan had, moeiteloos door iemand anders gezet zou zijn, uiterlijk op het moment dat de maantheorie in een bruikbaar stadium zou komen[6]. De herleiding vormt, zonder elektronische rekenmachines, een aanzienlijk deel van de totale hoeveelheid rekenwerk die bij de maansafstanden te pas komt, en er zijn vele verschillende uitwerkingen van gegeven met verschillende rekenkundige voor- en nadelen. Hieronder geef ik de herleiding volgens de methode van Borda (1787)[7]. Zijn methode werd lange tijd als de beste beschouwd.

In figuur 2.3 is S de zon, M de maan, en T het zenit van de waarnemer. De verticaalcirkels door S resp. M snijden een deel HO van de horizon af. SM is de ware maansafstand (gezien vanuit het middelpunt van de aarde); HS is de ware hoogte van de zon en OM is de ware hoogte van de maan. Doordat de waarnemer aan het oppervlak van de aarde staat en doordat de lichtstralen worden afgebogen door de breking in de atmosfeer neemt hij de hoogte van de zon te groot waar, en die van de maan (door de veel grotere parallax, zie p. 31) te klein: hij ziet de zon in S' en de maan in M', en hij meet de schijnbare afstand $S'M'$, en de schijnbare hoogten HS' en OM'. Alle bogen in de figuur zijn delen van grootcirkels. De opgave is om de ware afstand SM te berekenen[8].

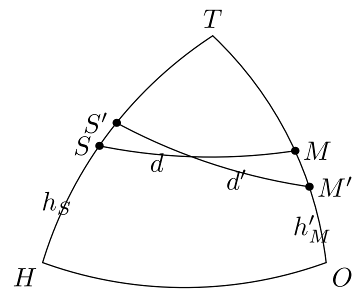
---

[5]De Engelsen gebruiken de beeldende uitdrukking *clearing a lunar distance*; een Nederlands equivalent schijnt niet te bestaan.

[6][Cot68, p. 198]. Andere referenties over Morin zijn [How80, pp. 14,15], [Mar17, pp. 7–10], en [Mor34].

[7]Ontleend aan [Cot68, pp. 207–212].

[8]In de praktijk meet de waarnemer niet $S'M'$ maar de afstand tussen de zichtbare randen van de hemellichamen. Correctie voor de diameter van de hemellichamen laat ik buiten beschouwing. De hoogten kunnen, ingeval de horizon slecht zichtbaar is, eventueel worden berekend voor een geschatte positie.



Figuur 2.3: Herleiden van schijnbare tot ware maansafstand.

Het principe van de berekening is als volgt. Door de hoogten HS' en OM' te meten, zijn hun complementen TS' en TM' bekend. Samen met de gemeten afstand $S'M'$ zijn dat drie zijden in de boldriehoek $S'TM'$. Daarmee is hoek T te berekenen. De schijnbare hoogten HS' en OM' zijn eenvoudig te corrigeren met beschikbare tabellen voor refractie en parallax, zodat in driehoek STM behalve de berekende hoek T ook de zijden TS en TM bekend zijn. Daarmee is zijde SM te berekenen. Merk op dat de hoogte HS van de zon ook gebruikt kan worden voor de berekening van de lokale tijd, die nodig is voor het uiteindelijke vaststellen van de geografische lengte.

Zij $h_S = HS$, de ware hoogte van de zon,
$h'_S = HS'$, de schijnbare hoogte van de zon,
$h_M = OM$, de ware hoogte van de maan,
$h'_M = OM'$, de schijnbare hoogte van de maan,
$d = SM$, de ware maansafstand,
$d' = S'M'$, de schijnbare maansafstand.

Volgens een formule uit de boldriehoeksmeting geldt in driehoek STM:

$$\cos T \sin TS \sin TM = \cos SM - \cos TS \cos TM$$

zodat

$$\cos T = \frac{\cos d - \sin h_S \sin h_M}{\cos h_S \cos h_M}.$$

Evenzo in driehoek $S'TM'$:

$$\cos T = \frac{\cos d' - \sin h'_S \sin h'_M}{\cos h'_S \cos h'_M}.$$

Uit gelijkstellen van de laatste twee formules volgt:

$$\frac{\cos d - \sin h_S \sin h_M}{\cos h_S \cos h_M} = \frac{\cos d' - \sin h'_S \sin h'_M}{\cos h'_S \cos h'_M}. \tag{2.1}$$

Hierin is d de enige onbekende. Het vervolg van Borda's afleiding is erop gericht om de berekening van d met logaritmetabellen te vergemakkelijken. Hij telt links en rechts 1 op en herleidt het linkerlid van (2.1):

$$\begin{aligned}
1+\frac{\cos d-\sin h_S\sin h_M}{\cos h_S\cos h_M} &= \frac{\cos h_S\cos h_M+\cos d-\sin h_S\sin h_M}{\cos h_S\cos h_M}\\
&= \frac{\cos d+\cos(h_S+h_M)}{\cos h_S\cos h_M}\\
&= \frac{-2\sin^2\frac{1}{2}d+2\cos^2\frac{1}{2}(h_S+h_M)}{\cos h_S\cos h_M}.
\end{aligned}$$

Het rechterlid ondergaat dezelfde behandeling, behalve in de laatste stap:

$$\begin{aligned}
1+\frac{\cos d'-\sin h'_S\sin h'_M}{\cos h'_S\cos h'_M} &= \frac{\cos d'+\cos(h'_S+h'_M)}{\cos h'_S\cos h'_M}\\
&= \frac{2\cos\frac{1}{2}(h'_S+h'_M+d')\cos\frac{1}{2}(h'_S+h'_M-d')}{\cos h'_S\cos h'_M}.
\end{aligned}$$

Met de definitie van de hulpvariabele θ door

$$\cos^2\theta=\frac{\cos h_S\cos h_M}{\cos h'_S\cos h'_M}\cos\tfrac{1}{2}(h'_S+h'_M+d')\cos\tfrac{1}{2}(h'_S+h'_M-d')$$

volgt

$$\begin{aligned}
\sin^2\tfrac{1}{2}d &= \cos^2\tfrac{1}{2}(h_S+h_M)-\cos^2\theta\\
&= \tfrac{1}{2}(1+\cos(h_S+h_M))-\tfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\\
&= \tfrac{1}{2}(\cos(h_S+h_M)-\cos 2\theta)\\
&= \sin(\tfrac{1}{2}(h_S+h_M)+\theta)\sin(\tfrac{1}{2}(h_S+h_M)-\theta).
\end{aligned}$$

Definieer nu nog

$$\begin{aligned}
\phi &= \tfrac{1}{2}(h_S+h_M),\\
L &= \tfrac{1}{2}(h'_S+h'_M+d'),
\end{aligned}$$

dan is

$$\begin{aligned}
\log\cos\theta = \tfrac{1}{2}(&\log\cos h_S+\log\cos h_M+\\
&\log\sec h'_S+\log\sec h'_M+\log\cos L+\log\cos(L-d'))
\end{aligned}$$

en

$$\log\sin\tfrac{1}{2}d=\tfrac{1}{2}(\log\sin(\phi+\theta)+\log\sin(\phi-\theta)).$$

Deze berekening is makkelijk in een éénduidig recept met logaritmetabellen te vangen, zodat de zeeman tussen de andere dagelijkse beslommeringen door ermee uit de voeten kan.

2.4 Nauwkeurigheidseisen

De beweging van de maan langs de hemel is relatief snel, maar nog altijd bijna dertig keer zo langzaam als de rotatie van de aarde om haar as. Onnauwkeurigheden in de meting van de maansafstand worden dus met een factor 30 opgeblazen in de berekening van de tijd van de referentiemeridiaan. Concreet betekent dat, dat om voor de hoogste beloning van de *Longitude Act* in aanmerking te komen (lengte bepalen beter dan 30 mijl, op de evenaar is dat $\frac{1}{2}$ lengtegraad), de totale fout in de meting van de maansafstand en in de berekeningen niet meer dan $1'$ mag zijn. Ogenschijnlijk was de marge die de *Longitude Act* toestond vrij ruim, maar eraan te voldoen bleek zowel voor de tijdmeter- als voor de maansafstandenmethode een moeilijke opgave. Wat de tijdmeter betreft: die moest, om de lengte tot op 1° te bepalen, niet meer dan 4 minuten verkeerd lopen, wat voor een reis van bijvoorbeeld negentig dagen neerkomt op een relatieve nauwkeurigheid van 0.003%. En dat terwijl het al een prestatie was om een klok aan het lopen te houden op zee.
Fouten in de maansafstand ontstaan uit:

- fouten in de voorspelling van de maanbeweging;
- fouten in de voorspelling van de plaats van het andere hemellichaam;
- fout in de meting van de maansafstand, waaronder instrumentfout, instelfout (zon en maan niet zorgvuldig met elkaar in contact brengen op een beweeglijk schip), en afleesfout.

Fouten in de berekening ontstaan uit:

- onzekerheid van de correcties voor parallax, refractie, en diameter van de maanschijf;
- interpolatiefouten bij het gebruik van tabellen of benaderende formules, weglaten van kleine correcties;
- fout in de berekening van de lokale tijd, veroorzaakt door alle voorgaande oorzaken behalve die van de maanbeweging;
- fout doordat de metingen van de maansafstand en de hoogten niet precies gelijktijdig gedaan worden.

Het moeilijkste probleem was om vat te krijgen op de beweging van de maan, wat in de volgende hoofdstukken aan de orde komt. Even belangrijk en iets minder moeilijk was het om te zorgen dat de positie van de zon en sterren goed bekend was (de tekens op de wijzerplaat, in de metafoor die ik eerder gebruikt heb). Stormachtige ontwikkelingen in de astronomie brachten op dit punt verbetering; de sterrenwachten in Parijs en Greenwich speelden een voorname rol als kenniscentra. Het waren de werkplaatsen van Bradley en Lacaille, die vele belangrijke ontdekkingen deden. Het zou te ver voeren om daar op in te gaan. In hoofdstuk 6 schets ik hoe de maansafstandenmethode in gebruik raakte.

Hoofdstuk 3

Wiskunde en astronomie

Al eeuwen bestuderen mensen de bewegingen van de hemellichamen, en al eeuwen proberen zij die bewegingen te begrijpen of op zijn minst te vatten in een model. De systematische waarnemingen die Tycho Brahe (1546–1601) aan de hemellichamen deed, waren van ongekende nauwkeurigheid. Zij vormden de basis waarop Johannes Kepler (1571–1630) zijn drie wetten voor de beweging van planeten baseerde. Daarna formuleerde Isaac Newton (1642–1727) het universele principe van gravitatie. In de *Principia*[1] toonde hij aan dat de wetten van Kepler zijn af te leiden uit het gravitatiebeginsel, waarmee hij de grondslagen van de hemelmechanica legde. In dit hoofdstuk behandel ik de astronomische kennis die nodig is om Mayers maantheorie te begrijpen. Ik besteed enige (maar zeker geen uitputtende) aandacht aan de specifieke moeilijkheden die zich voordoen bij het voorspellen van de beweging van de maan, en aan de ontwikkelingen in de wiskunde en de theoretische astronomie in de 18e eeuw voor zover ze voor ons onderwerp van belang zijn.

3.1 Belangstelling voor de maan

De belangstelling voor de beweging van de maan heeft vele achtergronden. Zij is onze naaste buur, en op de zon na het meest opvallende hemellichaam. Oude kalenders zoals de Babylonische en (ook nu nog) de Islamitische, zijn op de maan gebaseerd.

Toen Newton de *Principia* schreef, waarin hij de wetten van Kepler afleidde uit de gravitatiewet (de aantrekkende kracht die een lichaam uitoe-

[1]Isaac Newton, *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, London 1687.

fent is evenredig met de massa, en omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand), zocht hij een manier om aan te tonen dat die gravitatie *universeel* is: niet alleen verantwoordelijk voor de beweging van de hemellichamen, maar ook van toepassing op aardse voorwerpen. Newton berekende de kracht die nodig is om de maan in haar baan om de aarde te houden. Hij vergeleek die met de zwaartekracht die op aardse voorwerpen werkt: die was 3600 keer zo groot, terwijl de afstand van de maan 60 aardstralen is. Dit was in overeenstemming met zijn hypothese, dus gravitatie was inderdaad universeel. Zo speelde de maan een rol in het omverwerpen van het Aristotelische denkbeeld dat op aarde andere wetten gelden dan aan het uitspansel.

Het was wel duidelijk dat niet alle hemellichamen zich gedroegen zoals de wetten van Kepler voorschreven. Met name de maan, en in mindere mate Jupiter en Saturnus, weken af. Newton was zich er dan ook terdege van bewust dat Keplers wetten alleen uit de gravitatiewet volgen voor slechts twee massa's, dat wil zeggen in het ideale geval dat een planeet in z'n eentje om de zon beweegt, niet gehinderd door andere hemellichamen. De werkelijkheid is weerbarstiger dan dat: planeten draaien hun rondjes om de zon in elkaars aanwezigheid, en de maan draait weliswaar rondjes om de aarde maar ondervindt daarbij een aanmerkelijke invloed van vooral de zon. Daarom vormde de precieze beweging van de maan een belangrijke uitdaging voor de gravitatietheorie.

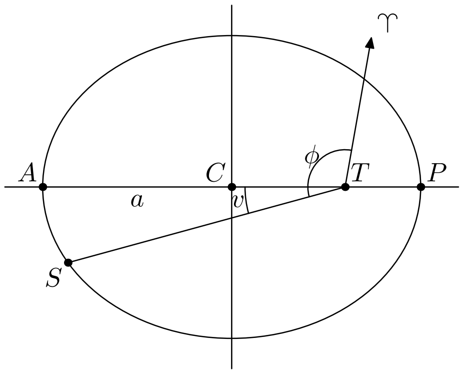
Goede kennis van de beweging van de maan is onmisbaar om zons- en maansverduisteringen nauwkeurig te voorspellen. Als de voorspellingen overeenkomen met de werkelijkheid is dat een aanwijzing dat de verschillende constanten die in de theorie voorkomen, bijvoorbeeld de omlooptijden van de hemellichamen, de juiste waarde hebben. Het geeft ook een aanwijzing of we de loop van de hemellichamen goed begrijpen. Daarnaast zijn en waren verduisteringen een manier om gebeurtenissen in de oudheid te dateren.

De gravitatiekrachten van zon en maan veroorzaken de getijdebeweging in de oceanen. Ten slotte is de maan schijnbaar een van de snelst bewegende hemellichamen, en daarmee een potentiële hemelklok, die bruikbaar is om de lengte te land en ter zee te bepalen. Dat is het onderwerp van dit onderzoek.

3.2 Baanelementen en Keplers wetten

Volgens de eerste wet van Kepler bewegen de planeten in elliptische banen om de zon. Wiskundig is er niets op tegen om te veronderstellen dat de aarde stilstaat en dat het de zon is die om de aarde beweegt. De *ecliptica* is het vlak waarin dat zich afspeelt[2]. Dit vlak valt niet samen met het

[2]Volgens sommige schrijvers heet dat het *vlak van de ecliptica*, en dan is de projectie daarvan op de hemelsfeer de ecliptica. Het verschil is hier niet van belang.



Figuur 3.1: De baan van de zon om de aarde, met overdreven excentriciteit.

equatorvlak; de aardas staat niet loodrecht op de ecliptica.

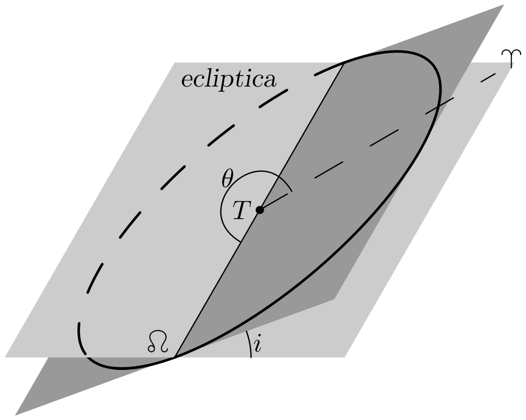
In de ecliptica kiezen we als referentierichting het lentepunt Υ, dat is één uiteinde aan de hemelsfeer van de snijlijn van de ecliptica en het equatorvlak, en wel dat uiteinde waar de zon in haar jaarlijkse beweging van Zuid naar Noord gaat. We kunnen punten in de ruimte aanduiden met bolcoördinaten afstand r, *astronomische lengte* ϕ (in de ecliptica, vanaf Υ, en positief in de richting waarin de zon beweegt), en *astronomische breedte* (vanaf de ecliptica, noordelijk of zuidelijk). De toevoeging *astronomisch* zal ik alleen gebruiken als verwarring met *geografische* coördinaten vermeden moet worden.

We veronderstellen dat de zon in een nagenoeg elliptische baan om de aarde beweegt, met de aarde in één van de brandpunten. In figuur 3.1 is T de aarde en C het middelpunt van de ellips; $a = AC = CP$ is de *halve lange as*, en de *excentriciteit* is $e = CT : CP$. Met deze twee parameters ligt de afmeting van de baan vast. In A bereikt de zon het verst van de aarde verwijderde punt van haar baan; dit is het *apogeum*. Er tegenover ligt het *perigeum* P. De oriëntatie van de baan in de ecliptica kennen we door de lengte van het apogeum, $\varpi = \angle \Upsilon TA$. De lijn AP heet de *apsidenlijn*.

Voor baanberekeningen komt het vaak beter uit om de positie van de zon niet uit te drukken in de astronomische lengte maar in de *anomalie* v, dat is de hoek $\angle ATS$ die de zon scheidt van het apogeum[3]. Dat dat beter uitkomt blijkt al direkt als we denken aan Keplers tweede wet of *perkenwet*, volgens welke de voerstraal ST van de zon in gelijke tijdsdelen gelijke oppervlakken beschrijft. Uit die wet volgt dat de snelheid van de zon groter is in de buurt van P dan in de buurt van A, en dat de snelheid symmetrisch is in de apsidenlijn.

Blijkbaar is de snelheid van de zon in haar baan niet constant, en neemt

[3]Sinds Laplace rekent men anomalie vanaf het perigeum, maar in de 18[e] eeuw was dat nog niet zo.



Figuur 3.2: De maanbaan ten opzichte van de ecliptica.

de anomalie (en lengte) van de zon niet lineair toe. Dat is jammer, want lineaire toenames rekenen veel makkelijker. Daarom definieert men de *middelbare beweging* n van de zon als de gemiddelde hoeksnelheid van de zon[4]. Naast de *ware* anomalie v krijgen we dan de *middelbare anomalie* $M = t \cdot n$ (t is tijd sinds apogeumdoorgang), en naast de *ware* lengte ϕ de *middelbare lengte* $\lambda = M + \varpi$. Het verband tussen M en v wordt gegeven door de *middelpuntsverevening*[5]:

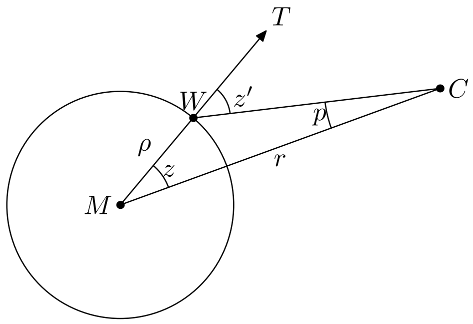
$$v - M \approx (2e - \frac{1}{4}e^3)\sin M + \frac{5}{4}e^2 \sin 2M + \frac{13}{12}e^3 \sin 3M,$$

waarin termen van orde e^4 en hoger verwaarloosd zijn. Merk op dat cosinustermen in deze Fourierreeks niet kunnen voorkomen vanwege de perkenwet, de symmetrie van de ellips in de apsidenlijn, en de definitie van M (nl. $M = 0$ als $v = 0$). De middelpuntsverevening valt op te vatten als een storing in de loop van de zon, veroorzaakt door de excentriciteit e.

Alles wat hierboven gezegd is voor de zon, is van toepassing op andere voorwerpen die om de aarde draaien, zoals de maan. Met één voorbehoud: de maan beweegt niet in de ecliptica maar (afgezien van storingen) in een vlak dat daar een hoek mee maakt (zie figuur 3.2). Deze hoek i heet *inclinatie*; hij is ongeveer 5°. De snijlijn van de baanvlakken van maan en zon is de *knopenlijn*. De *klimmende knoop* ☊ is de richting (plaats aan de hemelsfeer) waar de maan noordelijke astronomische breedte krijgt. De lengte van de

[4]Door planetaire storingen en door de afplatting van de aarde zijn de omlooptijden ten opzichte van het lentepunt en ten opzichte van het apogeum (resp. het tropische en het anomalistische jaar) niet gelijk aan elkaar. Volgens de *Glossary* van het *Bureau des Longitudes* [Bur] is de middelbare beweging gerelateerd aan de ellips, niet aan het lentepunt.

[5]Engels: *equation of (the) centre*. Voor de afleiding, en ook voor het verband tussen Keplers wetten en Newtons gravitatietheorie, zie [Sma56, hst. 5].



Figuur 3.3: Parallax.

klimmende knoop is $\theta = \angle\Upsilon T \Omega$. Liefhebbers van *scrabble* zullen misschien nog willen weten dat *syzygie* (Engels: *syzygy*) de verzamelnaam voor volle en nieuwe maan (oppositie en conjunctie) is.

Samenvattend kunnen we de vorm en oriëntatie van de maanbaan in de ruimte weergeven met de vijf parameters a, e, ϖ, i, en θ. Een zesde parameter geeft de positie van de maan in de baan voor een vastgelegd tijdstip (de *epoch*). Dat kan bijvoorbeeld de ware lengte of de middelbare anomalie zijn. Tezamen vormen deze zes parameters de *baanelementen* en ze zijn in verband te brengen met zes integratieconstanten uit de differentiaalvergelijkingen voor ongestoorde beweging. In afwezigheid van andere storingen dan de middelpuntsverevening zouden we met de baanelementen en de epoch de positie van de maan voor elk willekeurig tijdstip in toekomst of verleden kunnen berekenen[6]. De invloed van storende krachten is relatief klein. We kunnen ons indenken dat de maan op elk willekeurig moment een elliptische baan volgt, terwijl de vorm en oriëntatie van die ellips langzaam verandert. Anders gezegd: de baanelementen zijn geen constanten, maar langzaam veranderende funkties van de tijd. Deze funkties kunnen bepaald worden met de methode van variatie van constanten. Dit gezichtspunt werd het eerst aangenomen door Euler in een aanhangsel van zijn *Theoria motus lunæ* (1753). Het werd later vooral door Lagrange en Delauney uitgewerkt.

3.3 Parallax

In het algemeen neemt een waarneemster aan het aardoppervlak de richting van een hemellichaam anders waar dan indien zij in het middelpunt van de aarde zou staan. Dit verschil heet *verschilzicht* of *parallax*. Zie figuur 3.3. M is het middelpunt van de aarde, W de waarnemer op het aardoppervlak,

[6]De middelbare beweging n is gerelateerd aan de halve lange as door de uitdrukking $n^2a^3 = G(M+m)$, waarin G de gravitatieconstante, M, m de massa's van aarde en maan. Dit is de derde wet van Kepler.

T de richting van het zenit en C een hemellichaam. $\rho = MW$ is de straal van de aarde en $r = MC$ is de geocentrische afstand van het hemellichaam. De waargenomen topsafstand is $\angle TWC = z'$, de geocentrische topsafstand is $\angle TMC = z$, en de parallax is $\angle WCM = p$, want $z' = z + p$. Uit de sinusregel voor vlakke driehoeken volgt:

$$\sin p = \frac{\rho}{r} \sin z'.$$

Als $z' = 90^\circ$ staat M aan de horizon van de waarnemer W. Men definieert de *horizontale parallax* P door

$$\sin P = \frac{\rho}{r}.$$

De horizontale parallax is onafhankelijk van de topsafstand; uit de laatste formule blijkt dat het een maat is voor de *radiale afstand* van een hemellichaam. Hier hebben we een slang die in z'n eigen staart bijt: de afstand r kunnen we berekenen met de theoretische hemelmechanica, maar de oplossing van de bewegingsvergelijkingen is afhankelijk van de beginwaarden, die we moeten invullen met behulp van de waarnemingen. Zoals Curtis Wilson het uitdrukte[7]:

> "Until you know pretty well where the moon is, relative to the earth's centre, you can't get a measure of parallax and so subtract it out of the observations."

Voor de maan is de parallax[8] erg groot, ongeveer $57'$. Dat is groot genoeg om de parallax te kunnen bepalen door gelijktijdige waarnemingen op twee ver van elkaar verwijderde plaatsen op aarde. Het is zelfs zo groot dat de afplatting van de aarde niet verwaarloosd mag worden, maar dat laat ik buiten beschouwing.

Moeilijker is het om de zonneparallax te bepalen: die is slechts $8.8''$. Goede kennis van de zonneparallax (of de afstand van de zon) is uiterst belangrijk; niet zozeer omdat de kennis van de afmeting van het zonnestelsel ervan afhangt, maar wel bijvoorbeeld om de invloed ervan op waarnemingen en berekeningen aan de posities van planeten. In de maantheorie is de zonneparallax belangrijk vanwege de *parallactische ongelijkheid*. Albert van Heldens boeiende artikel[9] beschrijft de internationale expedities van 1761 en

[7] [Wil95a, p. 39].

[8] Hier en in het vervolg betekent *parallax* steeds *horizontale* parallax.

[9] [Hel95]. Terzijde: Mayer had voor de berekeningen in de *Theoria Lunæ* een waarde van $10.8''$ voor de parallax van de zon aangenomen. Door de theoretisch berekende coëfficiënt van de parallactische ongelijkheid in de beweging van de maan te vergelijken met de door waarnemingen verbeterde coëfficiënt, bepaalde hij de zonneparallax op $7.8''$ [May67, p. 53]. Laplace [Lap02, pp. 281–282] volgde dezelfde procedure.

1769 om door overgangen van Venus voor de zon de zonneparallax te bepalen[10]. Tegenwoordig kan men met laser en radar heel nauwkeurig de afstand van de maan en nabije planeten meten. Een planeetafstand samen met Keplers derde wet of goede baanvoorspellingen is voldoende om de afstand van de zon te berekenen.

3.4 Waarom drie lichamen

Met alleen Keplers wetten lukt het niet goed om de beweging van de maan te berekenen. Keplers wetten volgen uit de oplossing van het *twee*lichamenprobleem; blijkbaar is de beweging van de maan gecompliceerder. Sinds het werk van Poincaré weten we dat het drielichamenprobleem niet exact oplosbaar is (zie p. 39). We moeten gebruikmaken van benaderingen, en dat is ook wat Euler, Clairaut, Mayer en anderen gedaan hebben in de achttiende eeuw. Het lijkt me verhelderend als we stilstaan bij de vraag waarom het niet volstaat om het tweelichamenprobleem op te lossen.

Dat de zon invloed heeft op de loop van de maan moet al in de oudheid bekend zijn geweest[11]. Ptolemaeus (ca. 150 na Chr.) had de *evectie* gevonden, de eerstbekende en grootste storing na de middelpuntsverevening (de naam evectie werd er evenwel pas eeuwen later aan gegeven). Deze storing van maximaal $1\frac{1}{4}^\circ$ is afhankelijk van de plaats van de zon ten opzichte van de apsidenlijn. De invloed van de zon bleek ook uit de waarnemingen van Tycho Brahe. Die had twee storingen in de maanbeweging benoemd: de *variatie* (afhankelijk van de hoek tussen zon en maan) en de *jaarlijkse ongelijkheid*. De laatste, maximaal $11'$, wordt veroorzaakt door de veranderlijke afstand van de zon tot de aarde en heeft een periode van een jaar. Van deze en enkele andere storingen toonde Newton in de *Principia* aan dat de zon ze veroorzaakt.

Het is het *verschil* in aantrekking die de zon uitoefent op de aarde en op de maan, dat bepalend is voor de storing in de beweging van de maan. Een manier om dat in te zien is de volgende. Bedenk dat de aarde en de maan voortdurend in vrije val naar de zon verkeren (dat we niet op de zon storten komt omdat er evenwicht is tussen de zwaartekracht en de centrifugale kracht). Onafhankelijk van deze toestand van vrije val roteert de maan om de aarde. Indien de zon *precies dezelfde* kracht uitoefende op de aarde en de maan, dan zou de beweging van de maan ten opzichte van de

[10] Het tijdstip waarop en de plaats waar Venus voor de zon langs schuift zijn voor ver van elkaar verwijderde aardse waarnemers verschillend. De *verhouding* tussen de afstanden van Venus en de aarde tot de zon is bekend (Keplers wetten en de baanelementen); als de afstand tussen de waarnemers bekend is, zijn de afstand en de parallax van de zon berekenbaar uit de waarnemingen. Het waarnemen van de Venusovergang van 1769 was een van de redenen voor Cooks eerste expeditie naar de Grote Oceaan.

[11] Referenties voor de volgende passage zijn [Air84, pp. 86–87], [Wil95a, p. 39], en [Pan51, p. 173].

aarde daar totaal geen invloed van ondervinden: beide zijn dan onderhevig aan dezelfde vrije-valbeweging. Maar in werkelijkheid heeft de zon op de maan een iets andere aantrekking dan op de aarde, zowel in richting als in sterkte.

Dit verschil is minder dan 2% van de aantrekking van de aarde op de maan. Zo'n klein verschil is niet verwaarloosbaar: het gaat lineair over op de versnelling en komt na twee integraties voor de dag in de positie (bijvoorbeeld afstand, lengte, en breedte). Kwalitatief bekeken kun je zeggen dat bijvoorbeeld een klein verschil in afstand aanleiding geeft tot een klein verschil in snelheid en omlooptijd, wat toch al vrij snel een meetbare afwijking in positie geeft. Kwantitatief komt dit tot uitdrukking in de amplitude van de stoortermen waarvan ik de grootste hierboven heb genoemd.

Een bijzondere omstandigheid is dat de zon op zeer grote afstand van de maan en de aarde staat en ook een veel grotere massa heeft. Daardoor kan men veronderstellen dat de beweging van het gemeenschappelijk zwaartepunt van het aarde-maansysteem om de zon onafhankelijk is van de beweging van maan en aarde om elkaar. Dit maak ik hard in voetnoot 34 in hoofdstuk 5. De plaats van de zon aan de hemel kan men dus bekend veronderstellen en dat vereenvoudigt het probleem.

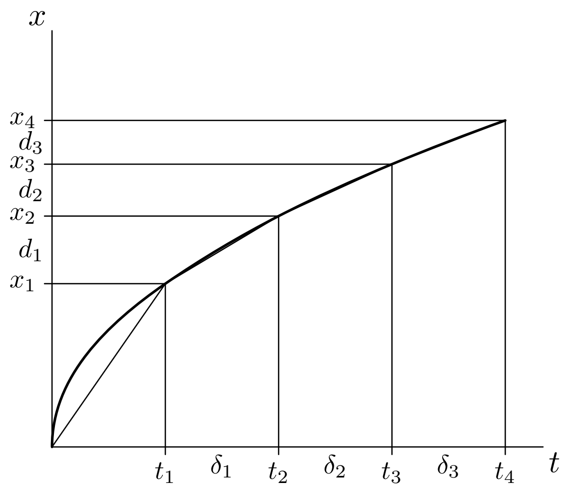
Een andere vereenvoudiging is mogelijk doordat de inclinatie van de maan klein is (ongeveer 5°). Daardoor blijft de maan altijd in de buurt van de ecliptica. Clairaut verwaarloosde de inclinatie helemaal en concentreerde zich op de berekening van de lengte. Euler maakte gebruik van het feit dat de beweging van de knopen veel langzamer is dan de beweging van de maan in lengte. Daardoor viel de tweede-orde breedtevergelijking uiteen in twee eerste-orde vergelijkingen: een voor de breedte ten opzichte van de klimmende knoop, en een voor de positie van de knoop. Mayer gebruikte een benadering van de breedte van de maan in de berekening van de lengte, waardoor hij het exact oplossen van de breedtevergelijking een losstaand probleem maakte (zie p. 77).

3.5 Differentiaal- en integraalrekening

Differentiaal- en integraalrekening in de 18e eeuw verschilt wezenlijk van de moderne analyse. Bij het bestuderen van oude wiskunde is het belangrijk de verschillen in het oog te houden[12]. In onze moderne opvatting betekent een uitdrukking als $\frac{dx}{dt}$ dat we de *funktie* $x = x(t)$ differentiëren naar de onafhankelijke variabele t; het resultaat van de operatie is de afgeleide funktie x' van $x(t)$. Het symbool dx heeft in onze analyse geen zelfstandige betekenis[13]. Dat was anders in de tijd van Leibniz en Euler. In die tijd was dx

[12] Het volgende is een samenvatting van [Bos93].

[13] In de differentiaalmeetkunde bestaat de interpretatie van dx als differentiaalvorm, het is dan een generalisatie van de afgeleide van een funktie $x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ naar de afgeleide



Figuur 3.4: Differentialen.

de differentiaal van de *variabele* x, en evenzo was dt de differentiaal van de variabele t. x en t waren gelijkwaardig: men beschouwde niet de één als funktie van de ander die dan als onafhankelijk werd aangemerkt.

Differentialen en integralen waren ingevoerd door Leibniz (1646–1716), omstreeks 1675. Laten we nagaan wat het zijn. Zie figuur 3.4. De kromme beschrijft een of ander verband tussen de variabelen t en x. Leibniz benadert de kromme met een veelhoek waarvan de hoekpunten op de kromme liggen. Laat het rijtje $x_1, x_2, x_3, \ldots$ de waarden van de variabele x in de hoekpunten zijn. Leibniz vormt een nieuw rijtje $d_1,\ d_2,\ d_3,\ \ldots$ door de verschillen te nemen: $d_1 = x_2 - x_1$, $d_2 = x_3 - x_2, \ldots$. Op dezelfde manier vormt hij een rijtje $\delta_1 = t_2 - t_1$, δ_2, $\delta_3, \ldots$. De verhouding $d_i : \delta_i$ is dan een benadering voor de tangens van de raaklijn in het punt met ordinaat x_i en abscis t_i (dat $d_i : \delta_i$ de tangens van de raaklijn benadert veronderstelt dat er een raaklijn *is* in dat punt).

De benadering wordt beter als hij een veelhoek met meer hoekpunten als uitgangspunt neemt. Dat suggereert een limietproces, ongeveer zoals wij tegenwoordig de afgeleide van een *funktie* definiëren als $\lim_{h\to 0} \frac{x(t+h)-x(t)}{h} = x'(t)$. Maar dat is niet wat Leibniz voor ogen stond: hij *extrapoleerde* de eindige differenties naar oneindig kleine differentialen. Dan zijn de d_i de oneindig kleine verschillen tussen de opeenvolgende waarden van x_i, en net zo als de variabele x de waarden x_i aanneemt, zo neemt de variabele dx de waarden d_i aan. Hetzelfde geldt voor dt en t. De tangens van de raaklijn in een punt van de kromme wordt dan gegeven door de verhouding $dx : dt$, ook wel geschreven $\frac{dx}{dt}$.

Voor de analyse is het essentieel om te herkennen dat differentiëren en

van funkties op variëteiten $x : U \to V$.

integreren inverse operaties zijn. Leibniz heeft dat ingezien. Zoals de d-operatie gebaseerd is op (oneindig kleine) verschillen, zo is de $\int$-operatie gebaseerd op sommaties. Hij vormt een rijtje

$$s_1 = x_1, \qquad s_2 = x_1 + x_2, \qquad s_3 = x_1 + x_2 + x_3, \qquad \ldots .$$

Dan gaat hij wederom over van eindige op oneindige verschillen, en schrijft $\int x$ voor de nieuwe variabele. Hij merkt op dat $\int dx = d \int x = x$. De oppervlakte onder de kromme kan hij nu beschrijven met $\int x\, dt$.

De differentiaal dx is zelf een variabele, en dus kan Leibniz er opnieuw de differentiaal van bepalen. Als dx^I en dx opeenvolgende waarden van het rijtje dx-en zijn, dan is $ddx = dx^I - dx$. Deze tweede-orde differentiaal is een variabele die weer oneindig veel kleiner is dan dx.

Ik heb er hierboven terloops op gewezen dat Leibniz *variabelen* differentiëert en integreert, en niet *funkties*. In zeker opzicht bereikt hij daarmee een grotere vrijheid omdat niet één variabele een speciale rol krijgt, zoals bij ons als we $x(t)$ schrijven, waarmee wij aangeven dat x van t afhangt. In het Leibniziaanse formalisme zijn x en t allebei variabelen en er is een zeker verband tussen hen. Bos benadrukt dat Leibniz bewust voor die vrijheid gekozen heeft, om zijn techniek zo effectief mogelijk in te kunnen zetten. De consequentie is dat de hogere-orde afgeleiden onbepaald zijn, zoals ik direkt uit zal leggen. Om goed te begrijpen hoe Mayer met hogere-orde differentialen omgaat (zie hst. 5) is het belangrijk om hier bij stil te staan.

Zie nogmaals figuur 3.4. Om de gedachten te bepalen nemen we even aan dat $x^2 = at$ de kromme beschrijft. De hoekpunten van de veelhoek liggen op de kromme. De keuze van de hoekpunten heeft invloed op het verloop van de differentialen. Stel bijvoorbeeld dat de veelhoek zo is gekozen dat alle stukjes δ_i even groot zijn. Dan is $dt =$ constant, en $ddt = 0$. Kiezen we daarentegen alle d_i even groot, dan is $dx =$ constant en $ddx = 0$. Andere keuzes zijn ook mogelijk. De kromme geeft dan aanleiding tot de volgende differentiaalvergelijkingen van eerste en hogere graad.

$$\begin{array}{rr}
\text{als } dt \text{ constant} & \text{als } dx \text{ constant} \\
2x\, dx = a\, dt & 2x\, dx = a\, dt \\
2\,(dx)^2 + 2x\, ddx = 0 & 2\,(dx)^2 = a\, ddt \\
4\, dx\, ddx + 2\, d^3x = 0 & 0 = a\, d^3t \\
\ldots & \ldots
\end{array}$$

We zien dat de tweede- en hogere-orde differentiaalvergelijkingen afhangen van de keuze van de hoekpunten van de veelhoek, of, omdat je in het infinitesimale geval niet meer van hoekpunten kunt spreken, van de manier waarop je de oneindig kleine stukjes langs de kromme kiest. Het is dus noodzakelijk om bij een differentiaalvergelijking te vermelden hoe, in Leibniz' woorden, de *progressie van de variabelen* gekozen is. Een andere mogelijkheid is om de keuze voorlopig in het midden te laten en alle termen in de vergelijking op te schrijven:

$$\begin{aligned} 2x\,dx &= a\,dt, \\ 2\,(dx)^2 + 2\,ddx &= a\,ddt, \\ 4\,dx\,ddx + 2\,d^3x &= a\,d^3t. \end{aligned}$$

Wie zich bezighoudt met Leibniziaanse differentiaal- en integraalrekening moet zich goed bewust zijn van deze keuzemogelijkheid; enerzijds omdat door er slim gebruik van te maken formules aanzienlijk te vereenvoudigen zijn, anderzijds omdat er grote onduidelijkheid ontstaat als iemand verzuimt de progressie van de variabelen in zijn werk te vermelden.

De variabelen dx, dt zijn dus oneindig klein, als differentialen van x, t; maar ook weer niet nul, want dan zouden ze hun betekenis verliezen. ddx is een orde kleiner dan dx maar evenmin gelijk aan nul. Dit was een nogal paradoxale situatie die veel stof deed opwaaien. Euler, in *Institutiones* (1755), had er de volgende opvatting over[14]. Als dx kleiner is dan elk denkbaar getal, dan moet wel $dx = 0$, en net zo $dt = 0$. Dat betekent dat $\frac{dx}{dt} = \frac{0}{0}$. Dat is geen bezwaar want, zegt hij, $\frac{0}{0}$ kan een zeer bepaalde waarde hebben, immers als $n \cdot 0 = 0$ dan $n = \frac{0}{0}$.

Voor ons zijn noch de opvattingen van Leibniz, noch die van Euler erg bevredigend. Ik noem hun opvattingen hier om aan te geven dat de grondslag van de analyse in de 18^e eeuw nog erg onduidelijk was, en dat men zich dat aantrok.

Het beschrijven en begrijpen van de natuurkundige werkelijkheid was de hoofdzaak in de 18^e eeuw. Analyse *werkte*, het verschafte een formalisme waarmee moeilijke problemen, zoals bijvoorbeeld de beweging van hemellichamen, veel doeltreffender aangepakt konden worden dan met de oude, meetkundige, methoden. Gaandeweg maakte de analyse zich los van zijn meetkundige oorsprong. De aandacht verschoof van meetkundige constructies naar het manipuleren van formules. Zo ontstond er ruimte voor nieuwe begrippen, zoals funktie, reeks, differentiaalvergelijking. Bij het gebruik van funkties is het duidelijk wat de onafhankelijke en wat de afhankelijke variabelen zijn, en daardoor vermijdt men de onbepaaldheid van de hogere-orde differentialen. Differentialen zijn uit de moderne wiskunde verdwenen. Leibniz' moeilijk (maar niet onmogelijk) te verdedigen overgang van eindige differenties op oneindig kleine differentialen is vervangen door het limietbegrip. Van oorsprong zaten daar eveneens grote vraagtekens aan; de moeilijkheden heeft men opgelost door de precieze ε-δ formulering. De afgeleide van een funktie definieert men als de limiet van een differentiequotiënt, en de afgeleide is opnieuw een funktie. De (Riemann-)integraal van een funktie is de limiet van een sommatie. Het moderne limietconcept maakt gebruik

[14] Ontleend aan [Kli72].

van een axiomatisch opgebouwd systeem van de reële getallen, met als kenmerkendste eigenschappen ordening en volledigheid. Daarmee is de analyse van nu onafhankelijk van de fysische werkelijkheid. Wel bestaat er tussen de wis- en natuurkunde nog steeds een sterke wederzijdse beïnvloeding.

3.6 Constanten van beweging

Het algemene drielichamenprobleem bestaat uit het vinden van de beweging van drie puntmassa's die elkaar aantrekken volgens Newtons gravitatiewet. Laat, in een rechthoekig coördinatensysteem, x_{ai} de i-de coördinaat van lichaam a zijn, m_a de massa van lichaam a, en r_{ab} de afstand tussen lichamen a en b. Het probleem komt neer op het oplossen van de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\frac{d^2 x_{ai}}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial x_{ai}} \qquad a = 1, 2, 3; \qquad i = 1, 2, 3, \tag{3.1}$$

waarin U de potentiaal is:

$$U = -G \sum_{a,b} \frac{m_a m_b}{r_{ab}}, \tag{3.2}$$

Er zijn dus negen vergelijkingen van de tweede orde en dat geeft aanleiding tot 18 integratieconstanten, die vastliggen door bijvoorbeeld negen beginwaarden voor de plaatscoördinaten en negen beginwaarden voor de snelheidscoördinaten.

Indien we de bewegingsvergelijkingen toepassen op de beweging van twee lichamen, is het eenvoudig om ze op te lossen[15]. We vinden dan dat a ten opzichte van b beweegt in een ellips, gelegen in het vlak dat bepaald wordt door beginwaarden (de straal ab en de snelheidsvector van a ten opzichte van b). Wanneer we het probleem van drie lichamen bekijken is het niet meer mogelijk om een exacte oplossing te vinden, enkele bijzondere gevallen daargelaten.

Van het systeem (3.1) heeft Euler in 1744 tien zogenaamde *eerste integralen* of *constanten van beweging* gevonden, dat zijn funkties van de coördinaten die constant zijn langs een oplossing. Anders gezegd: als F een eerste integraal is van (3.1), dan is elke oplossing van (3.1) bevat in een niveauverzameling $F(x_{11}, \dots) =$ constant. Kennis van eerste integralen maakt het mogelijk het probleem te vereenvoudigen, omdat elke eerste integraal een verband tussen de coördinaten geeft. Van de bekende eerste integralen beschrijven er zes dat het massamiddelpunt van het systeem een eenparige rechtlijnige beweging ondergaat. Drie andere beschrijven het constante impulsmoment van het systeem, en de tiende komt neer op energiebehoud. Met deze tien relaties kunnen we dus het aantal vrijheidsgraden

[15] Zie een boek over mechanica, of [Sma56].

in het probleem terugbrengen van achttien tot acht. Reductie tot zes vrijheidsgraden is mogelijk door de tijd en de beweging van de knopenlijn te elimineren[16].

Aan het eind van de negentiende eeuw hebben Bruns en Henri Poincaré bewezen dat er niet meer dan deze tien eerste integralen te vinden zijn, onafhankelijk van het aantal lichamen. Met andere woorden: het algemene drielichamenprobleem bevat te weinig expliciet te maken relaties tussen de posities en snelheden van de lichamen, om een oplossing (als verband tussen tijd en positie, in gesloten vorm) te vinden. Lagrange heeft (in 1772) wel enkele *bijzondere* oplossingen gevonden, waarbij de verhoudingen van de afstanden tussen de lichamen constant zijn. In één van die bijzondere oplossingen liggen de drie lichamen op een rechte (dit was al eerder door Euler onderzocht); in een andere liggen de drie lichamen op de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek. Ik denk dat Lagrange opgetogen zou zijn geweest als hij had geweten dat de laatst genoemde situatie ook werkelijk in ons zonnestelsel voorkomt, namelijk in het geval van de Trojaanse asteroïden, twee groepjes steenklompen die op gelijke afstand als Jupiter om de zon bewegen.

3.7 Apogeumbeweging en de acceptatie van de gravitatiewet

De storende kracht van de zon verandert de oriëntatie van de maanbaan, waardoor apogeum en perigeum niet meer een vaste plaats aan de hemel hebben. De gemiddelde beweging van het apogeum is 3° per omwenteling, in dezelfde richting als de omwenteling van de maan. Grote afwijkingen hierop komen voor, afhankelijk van de hoek die de apsidenlijn maakt met de richting van de zon. De positie van het apogeum was belangrijk omdat de anomalie daar vanaf gerekend werd (in onze tijd vanaf het perigeum). De apogeumbeweging was belangrijk omdat het een test verschafte van de zwaartekrachtwet: als die correct was, dan moest de beweging van het apogeum ermee afgeleid kunnen worden. Het bleek een zware test te zijn.

De behandeling van de apogeumbeweging in Newtons *Principia* is verwarrend, maar Craig Waff concludeert dat Newton theoretisch slechts de helft van de werkelijke beweging vond[17]. In de jaren na 1740 vonden ook Euler, Clairaut, en d'Alembert de helft van de werkelijke beweging terug in hun berekeningen. Clairaut en anderen stelden zich daarom sceptisch op ten aanzien van Newtons gravitatiewet. Het was een mogelijkheid, veronderstelde Clairaut, dat die aangevuld diende te worden met een term evenredig met r^{-3}, die op de relatief geringe afstand van de maan merkbare invloed heeft, maar op grote afstand nauwelijks. Hierdoor raakte hij verwikkeld in

[16] Voor een uitgebreidere bespreking verwijs ik naar [Bro96, pp. 25–28].
[17] [Waf76]; zie ook [Waf95] en [Wil80].

een debat over de uitgangspunten van de natuurwetenschap en de aard van fysische wetten.

In 1748 besefte Clairaut waarom de berekening van de apogeumbeweging verkeerd was uitgekomen. In eerdere berekeningen had hij aangenomen dat hij de afstand van de maan tot de aarde kon benaderen met de waarde zoals die zou zijn als de maan beweegt langs een roterende ellips — de snelheid waarmee die ellips roteert is de gemiddelde beweging van het apogeum, en die snelheid zou uit de oplossing blijken. Later herhaalde hij de berekening met de afstand volgens een baan die net niet elliptisch was, maar verstoord door kleine termen. Hierdoor bleek dat niet alleen de *radiale* component van de storende kracht, maar ook de *tangentiale* component invloed heeft op de beweging van het apogeum; dat was wel een nieuwigheid maar het verklaarde niet het verschil tussen theorie en werkelijkheid. De formule voor de afstand die Clairaut in deze nieuwe berekening gebruikte leidde ook tot een langere *tijdsduur* waarin de storende kracht het apogeum vooruit laat bewegen, en juist daardoor kwam de berekende waarde nu goed overeen met de waarneming. Dit was een grote triomf voor Newtons gravitatiewet.

3.8 Achttiende-eeuwse hemelmechanica

Het valt niet mee een overzicht te krijgen van de verschillende maantheorieën uit de 18e eeuw. Er zijn verschillende keuzes van coördinaten en van de onafhankelijke variabele, er zijn problemen met de convergentie van de reeksen, er treden kleine delers op in de uitdrukkingen voor de coëfficiënten, en de formules zijn lang en ingewikkeld. Vanaf Lagrange en Laplace neemt de wiskundige abstractie toe: de theorie in de 19e eeuw wordt beheerst door variatievergelijkingen, canonieke elementen, Hamiltonsystemen.

Wilson[18] stelt de vraag aan de orde waarom het ruim een halve eeuw duurde nadat Newtons *Principia* verscheen voordat analytische maantheorieën het licht zagen. Hij noemt de volgende redenen:

- Newtons fluxierekening leende zich niet zo goed voor substitutie van variabelen, in tegenstelling tot Leibniz' notatie waarin alle variabelen expliciet voorkomen. Daarom was er vanuit Groot-Brittanië weinig te verwachten.
- Op het vasteland van Europa was men aanvankelijk nogal gecharmeerd van ethertheorieën, en het kostte tijd om Newtons ideeën over gravitatie te aanvaarden.
- Voor het oplossen van lineaire differentiaalvergelijkingen was de ontwikkeling van het funktieconcept nodig, met name voor de goniometrische funkties. Het duurde lang voordat deze loskwamen van hun puur geometrische betekenis.

[18] [Wil95b, pp. 89–90].

Hieronder geef ik een overzicht van de belangrijkste ontwikkelingen in de 18^e eeuw, behalve het werk van Mayer dat ik aan bod laat komen in de volgende twee hoofdstukken.

Newton Het was een uitdaging voor Newton om de beweging van de maan te verklaren uit zijn gravitatiewet. Naar zijn eigen zeggen is de beweging van de maan het enige probleem waar hij hoofdpijn van kreeg. Hij slaagde er niet in om theorie en waarneming kwantitatief met elkaar in overeenstemming te brengen. Wel kon Newton verschillende storingen kwalitatief in verband brengen met gravitatie. Ten einde raad heeft Newton rond het jaar 1700 maantabellen opgesteld die niet (of vrijwel niet) op gravitatie berustten, maar waarvoor hij zijn toevlucht had genomen tot een oud meetkundig model van Horrocks (ca. 1638). Newtons tabellen hadden een nauwkeurigheid van ca. 4-8$'$ en zij waren in gebruik tot het midden van de 18^e eeuw.

Het is niet erg verwonderlijk dat het Newton niet lukte om de beweging van de maan uit de zwaartekracht af te leiden. Zijn methoden waren meetkundig en daarom weinig geschikt om de veelheid van kleine storingen, afhankelijk van verschillende hoeken, te ontrafelen[19]. Kollerstrom wijst erop dat Newton bovendien een twee tot drie keer te grote massa van de maan had berekend[20].

Halley Toen Halley (1656–1742) in 1721 de positie van *Astronomer Royal* kreeg, kon hij zich gaan bezighouden met een lang gekoesterd project: vat te krijgen op de beweging van de maan door correctietabellen te baseren op de Sarosperiode van 18 jaar en 11 dagen. Dit is een tijdspanne van 223 volle manen die nagenoeg overeenkomt met 19 omwentelingen van de zon ten opzichte van een knoop. Na een Sarosperiode nemen de zon, de maan, en de vlakken waarin zij bewegen nagenoeg dezelfde relatieve stand aan, zodat zons- en maansverduisteringen in nagenoeg hetzelfde patroon weerkeren. De Sarosperiode was in de oudheid bekend. Halley maakte er gebruik van om eclipsen te voorspellen. Hij geloofde verder dat fouten in de voorspellingen met Newtons maantheorie zich zouden herhalen na een Sarosperiode, wat overigens werd betwijfeld door d'Alembert en Delambre. Halley had zijn eigen versie van Newtons maantheorie en vergeleek gedurende een volledige Sarosperiode van ruim 18 jaar de voorspellingen met door hemzelf gedane waarnemingen (hij was 64 jaar oud toen hij aan dit project *begon*!). Zijn resultaten werden postuum gepubliceerd in 1749, in de periode dat de eerste analytische theorieën het licht zagen. Mayer heeft de methode korte tijd gebruikt maar het is niet duidelijk of en hoe dat invloed heeft gehad op zijn maantheorie [21].

[19] Ik vind het opmerkelijk dat de Parijse academie nog in 1752 een meetkundige theorie van Boscovich publicatie waardig achtte, zie [Wil80, p. 78].

[20] [Kol98].

[21] Euler en Mayer corresponderen hierover in de eerste twee brieven, [For71].

Euler De bijdragen van Euler (1707–1783) aan de ontwikkeling van de wiskunde en hemelmechanica zijn zo talrijk dat ze genoeg stof bieden voor een hele reeks afstudeerscripties. Ik moet mij beperken tot een onvolledige opsomming.

Van groot belang was de ontwikkeling van de analyse van goniometrische funkties in verband met het oplossen van tweede-orde lineaire differentiaalvergelijkingen. Dit vervolmaakte Euler omstreeks 1739. In 1744 ontwikkelde hij maantabellen, maar hij publiceerde niet de theorie die hij daarvoor gebruikt had. De *Académie des Sciences* Parijs gaf een belangrijke impuls aan de hemelmechanica in 1746, door het probleem van de storingen in de banen van Jupiter en Saturnus onderwerp te maken van een prijsvraag (een uitvloeisel van het testament van Rouillé de Meslay, zie p. 9). De prijs werd in 1748 toegekend aan Euler voor zijn essay *Recherches sur la question des inégalités du mouvement de Saturne et de Jupiter*. Daarin gebruikte hij de bewegingsvergelijkingen die hij eerder had afgeleid in zijn *Recherches sur le mouvement des corps célestes en générale*, 1747, waarin voor het eerst Newtons tweede wet voorkomt in de vorm van de differentiaalvergelijkingen in rechthoekige coördinaten:

$$2\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{X}{m}, \qquad 2\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{Y}{m}, \qquad 2\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{Z}{m}, \tag{3.3}$$

waarin X, Y, en Z krachtcomponenten zijn, en m de massa van de verstoorde planeet, Saturnus. Euler transformeerde de eerste twee vergelijkingen in poolcoördinaten en stelde een benaderende oplossing op met de middelbare anomalie van Jupiter als onafhankelijke variabele. Hij ontwikkelde daarbij de afstand tussen de planeten in een goniometrische reeks, en bepaalde de coëfficiënten van die reeks op een manier die we kunnen zien als een voorloper van het berekenen van Fourierintegralen[22]. Eulers behandeling van de derde vergelijking heb ik al op pagina 34 genoemd.

Dezelfde bewegingsvergelijkingen waren het startpunt in Eulers eerste maantheorie (afgezien van de tabellen uit 1744), *Theoria motus lunæ exhibens omnes eius inaequalitates* (1753). Wederom formuleerde hij de eerste twee vergelijkingen in poolcoördinaten en splitste hij de derde vergelijking. Als onafhankelijke variabele koos hij ditmaal de *ware* anomalie (§3.2). De afstand r van de maan kon hij voor ongestoorde elliptische beweging uitdrukken in de excentriciteit en deze ware anomalie; voor de gestoorde beweging stelde hij dat $\frac{r}{1+\nu}$ aan de uitdrukking voldeed, met ν een kleine parameter afhankelijk van de verstorende krachten.

In 1764 en 1765 publiceerde Euler zijn onderzoek naar wat nu bekend staat als het *beperkte drielichamenprobleem*, waarin één lichaam in verge-

[22]Wilson bespreekt Eulers benadering van u^{-3} (met u de afstand tussen de planeten) in [Wil85, pp. 89–96]. Hij wijst er ook op dat dit het moment is waarop goniometrische reeksen, van zo groot belang in het onderzoek van planetaire storingen, geïntroduceerd worden.

lijking met de andere een verwaarloosbare massa heeft. Hij vond stabiele oplossingen als de drie lichamen op een rechte liggen. Hij vond ook dat als de maan een aantal maal verder weg had gestaan, dat zij dan noch in een baan om de aarde, noch in een baan om de zon zou bewegen, maar een veel grilliger beweging zou maken. Hij weet het aan de wijsheid van de Schepper dat die ons niet heeft opgezadeld met dergelijke onvoorstelbare problemen.

Het probleem van de storingen in de banen van Jupiter en Saturnus was nog niet bevredigend opgelost en de *Académie des Sciences* stelde het onderwerp opnieuw aan de orde in de prijsvragen van 1750 en 1752. Eulers bijdrage voor die laatste prijsvraag bevatte verschillende nieuwe ideeën, maar ze bleven lang onbekend omdat publicatie nog 17 jaar op zich liet wachten. In 1772 (alweer naar aanleiding van een prijsvraag van de academie in Parijs) publiceerde Euler, die inmiddels blind was, nogmaals een maantheorie: hij gebruikte nu een rechthoekig coördinatenstelsel dat roteerde met de gemiddelde hoeksnelheid van de maan. Volgens Brown[23] heeft dit het voordeel dat de storende krachten uit te drukken zijn als homogene funkties van de coördinaten (ik heb me daar verder niet in verdiept). Anderen hebben daarna ook roterende coördinaten gebruikt; Hill merkte op dat het voordeliger is om ze te laten roteren met de gemiddelde snelheid van de zon.

Clairaut Clairauts afleiding van de apogeumbeweging van de maan uit de differentiaalvergelijkingen (zie §3.7) is van groot belang geweest voor de acceptatie van de gravitatiewet. Een andere belangrijke bijdrage van Clairaut (1713–1765) is dat hij als eerste inzag hoe de vergelijking voor het impulsmoment te integreren is met een integrerende factor (moderne term). Dit, en een zeker verband tussen de theorieën van Clairaut en Mayer, bespreek ik verderop in §5.2.3. Clairauts maantheorie won de prijsvraag van de academie van Sint Petersburg in 1750, en verscheen twee jaar later in druk (*Théorie de la Lune*; een meer volledige uitgave verscheen in 1765).

Clairaut verwaarloost aanvankelijk de beweging in de breedte, en stelt de bewegingsvergelijkingen op in poolcoördinaten r, ϕ. Hij elimineert de tijd, kiest de ware lengte als onafhankelijke parameter, en vindt na enige manipulaties

$$f^2/Mr = 1 - g\sin\phi - c\cos\phi + \sin\phi\int\Omega\cos\phi\,d\phi - \cos\phi\int\Omega\sin\phi\,d\phi.$$

Daarin is Ω een funktie van de verstorende kracht, c, f, en g zijn constanten, M is de totale massa van aarde en maan. Om te integreren substitueert hij

$$\Omega = A\cos p\phi + B\cos q\phi + \dots,$$

en hij drukt dan natuurlijk ook r uit in ϕ. In §3.7 heb ik erop gewezen dat zijn keuze van de gebruikte benadering voor r grote gevolgen had.

[23][Bro96, p. 241].

d'Alembert De procedure die d'Alembert (1717–1783) volgde om de beweging van de maan af te leiden lijkt veel op die van Clairaut. d'Alembert was echter veel theoretischer; zijn afleidingen zijn wiskundig eleganter, hij deed minder aannames op grond van waargenomen verschijnselen, en hij werkte de formules algebraïsch verder uit waar Clairaut al snel overging op numerieke waarden van de coëfficiënten. d'Alembert waarschuwde dat overeenstemming tussen theorie en werkelijkheid op grond van de eerste termen geen garantie inhield voor convergentie. Zijn theorie verscheen in druk in zijn *Recherches sur différens points importans du système du monde* (1754). d'Alembert introduceerde het principe van impulsbehoud en hij paste het toe bij het afleiden van de precessie en nutatie uit de zwaartekrachtwet — wederom een belangrijk argument voor Newtons theorie.

d'Alembert had goede gronden om uitermate kritisch te staan tegenover Clairaut en Mayer. Toch waren zijn resultaten niet nauwkeuriger dan die van Clairaut, en zeker minder dan die van Mayer (de laatste versie van Mayers maantabellen hadden een nauwkeurigheid van ca. $\frac{1}{2}'$, een factor 10 beter dan die van Euler, Clairaut, en d'Alembert.). De laatste twee hadden een praktischer houding: Clairaut was bijvoorbeeld met Maupertuis op expeditie geweest naar Lapland om de afplatting van de aarde vast te stellen, en van Mayer zullen we nog zien dat hij in de eerste plaats een praktisch astronoom was. Zij waren gebrand op snelle resultaten. Daarentegen was d'Alembert een studeerkamergeleerde. Ik vind het interessant om te zien dat de praktijkmensen door hun werk invloed hadden op hun eigen tijd terwijl d'Alembert en zijn volgeling Lagrange veel belangrijker zijn geweest voor de latere periode.

Lagrange en Laplace Lagrange (1736–1813) had een goede kennis van het werk van zijn voorgangers en tijdgenoten. Hij werkte onder andere aan de libratie[24] van de maan, de beweging van Jupiters manen, en de storingen in de banen van Jupiter en Saturnus. Lagrange vond de speciale oplossingen van het drielichamenprobleem die ik in §3.6 heb genoemd. Hij introduceerde nieuwe technieken en het potentiaalbegrip, en ontwikkelde de variatierekening. Hij onderzocht de seculaire variatie in baanelementen waardoor het mogelijk werd om uitspraken over de stabiliteit van het zonnestelsel te doen, een onderwerp dat Laplace (1749–1827) uitermate interesseerde. *Méchanique Analytique* (1788) is de kroon op Lagranges werk:

[24]De maan heeft globaal bekeken altijd dezelfde kant naar de aarde gericht. Daarbij *wiebelt* ze een beetje; dit heet *libratie*. Deels wordt libratie veroorzaakt doordat de rotatie van de maan om haar as veel gelijkmatiger is dan de omwenteling van de maan om de aarde; deels ook door effecten van aardse gravitatiekrachten op de maan, en doordat een waarnemer op de roterende aarde in een steeds wisselende richting naar de maan kijkt (parallax). Libratie werd door Newton beschreven in de *Principia*. Gian Domenico Cassini (1625–1712) en Mayer waren de eersten die gericht waarnemingen aan libratie deden. Een adequate wiskundige theorie werd opgesteld door Lagrange in 1764 en 1780 [WT95, pp. 109–110].

daarin behandelt hij de hele toenmalig bekende mechanica als een toepassing van de analyse, zonder dat er meetkunde aan te pas komt.

Lagrange en Laplace hebben veel invloed gehad op elkaars werk. Hun stijl was echter heel verschillend: Lagrange had veel oog voor wiskundige schoonheid en zijn werk schijnt erg goed leesbaar te zijn, terwijl Laplace wiskunde zag als een hulpmiddel om de wereld en de kosmos te begrijpen; de ontwikkeling van de vaak nieuwe wiskunde die hij nodig had publiceerde hij lang niet altijd. In zijn monumentale vijfdelige *Traité de méchanique céleste* (1798–1825) vatte hij alle bekende hemelmechanica samen, inclusief zijn eigen bijdragen daaraan. Dit werk legde de grondslag voor de hemelmechanica in de 19^{e} eeuw, zoals Newtons *Principia* had gedaan voor de 18^{e} eeuw. Laplace was overtuigd van de berekenbaarheid van alle historische en toekomstige gebeurtenissen, als de begincondities van het heelal maar voldoende bekend zijn. De quantummechanica heeft dat denkbeeld onderuitgehaald.

Hoewel Laplace van mening was dat de theorie niet méér van de waarnemingen moest overnemen dan het hoogstnoodzakelijke, dat wil zeggen de waarden van de integratieconstanten, moest hij toch erkennen dat de grootte van periodieke termen in de storingen op de beweging van de maan nauwkeuriger werd verkregen uit waarnemingen dan uit de analyse. De moeilijkheden in de maantheorie verwoordde Laplace als volgt[25]:

> "De theorie van de maan heeft haar eigen moeilijkheden, ontstaan door de grootte van de talloze ongelijkheden, en door de slechte convergentie van de reeksen die zij geven. Als dat lichaam dichter bij de aarde stond, zouden de ongelijkheden van haar beweging minder zijn, en zouden de benaderingen beter convergeren. Maar op de afstand waar zij zich bevindt hangen de benaderingen af van een zeer ingewikkelde analyse, en het is slechts met bijzondere aandacht en delicate overwegingen dat men de invloed van de opeenvolgende integraties op de verschillende termen in de uitdrukking van de storende kracht kan bepalen. De keuze van coördinaten is beslist niet onbelangrijk voor het succes van de benaderingen: de verstorende kracht van de zon hangt af van de sinus en cosinus van de elongatie van de maan[26] en veelvouden daarvan; die uit te drukken in de sinus en cosinus van hoeken die afhankelijk zijn van de middelbare beweging van de zon en maan is moeilijk en weinig convergent, door de grote ongelijkheden van de maan; het heeft daarom voordeel dat te vermijden en de middelbare lengte van de maan te bepalen als funktie van de ware lengte, wat nuttig kan zijn in verschillende omstandigheden. Men kan vervolgens, als men dat nodig vindt, de ware lengte als funktie van de middelbare lengte precies bepalen door reeksinversie."

[25] [Lap02, p. 169].
[26] De hoek tussen de maan en de zon.

3.9 Seculaire versnelling

De volgende episode uit de geschiedenis toont nog eens de subtiliteit van de hemelmechanica[27]. In 1693 had Halley gevonden, door verslagen van oude maansverduisteringen te bestuderen, dat de maan aan versnelling onderhevig is. De gemiddelde snelheid van de maan nam met ongeveer $10''$ per eeuw per eeuw toe (dit betekent dat de gemiddelde lengte van een maanperiode ongeveer $\frac{1}{30}$ seconde per eeuw vermindert). Mayer had wel de versnelling (eerst $7''$, later $9''$ volgens hem) opgenomen in zijn tabellen, maar in de *Theoria Lunæ* is er geen spoor van terug te vinden. Het was onduidelijk of deze *seculaire versnelling* van de maan veroorzaakt werd door de zwaartekracht, of wellicht door de ether (een hypothetische fijn verdeelde stof die de ruimte vulde). Euler en d'Alembert hadden aangetoond dat de versnelling in ieder geval niet veroorzaakt werd door de direkte storingen van de zon of van planeten; Lagrange bewees dat ook de afplatting van de aarde en de maan er niet voor verantwoordelijk waren. Laplace kon de versnelling verklaren als hij veronderstelde dat de zwaartekracht zich met eindige snelheid voortplantte, maar dat bleek niet verenigbaar met andere waargenomen verschijnselen. In 1787 vond hij een *indirekte* oorzaak voor de seculaire versnelling. De invloed van andere planeten geeft een schommeling in de excentriciteit van de aardbaan met een periode van bijna 50 000 jaar. Momenteel is de excentriciteit aan het afnemen terwijl de halve lange as even lang blijft. Dus de gemiddelde afstand van de zon neemt iets toe, waardoor de storende invloed van de zon op de maan afneemt. Dit heeft een minuscule afname in de aarde-maanafstand (niet meer dan 2 cm per jaar) en een toename van de maansnelheid tot gevolg. Laplace berekende $10''$ per eeuw voor die toename en daarmee leek het mysterie opgelost. Totdat Adams in 1854 ontdekte dat hogere-orde termen, die Laplace verwaarloosd had, een negatieve bijdrage leverden waardoor de helft van de berekende seculaire versnelling verdween. (Dit lijkt me vergelijkbaar met Clairauts vergissing in de berekening van de apogeumbeweging.) Momenteel neemt men aan dat het restant niet zozeer een versnelling van de maan is, maar een vertraging van de aardrotatie door getijdewrijving. Door hetzelfde mechanisme (*tidal locking*) keert de maan steeds dezelfde kant van haar oppervlak naar de aarde, maar ik zou te ver afdwalen als ik daar verder op in ging.

3.10 Modern

Tegenwoordige efemeriden, zoals in de *Nautical Almanac*, worden afgeleid door numerieke integratie van de bewegingsvergelijkingen[28]. Het gebruikte

[27] Lees meer hierover in [Coo88, §7.5], [Youzj], [WT95, p. 142], [For71, brieven 17–19], [Bro96, §§296,319–322].

[28] [Sei92, hst. 5].

model heet DE200/LE200; het omvat de beweging van alle belangrijke lichamen in het zonnestelsel. Het model beschrijft de aantrekking tussen de zon, planeten, maan, en belangrijkste asteroïden als puntmassa's, waarbij relativistische effecten in rekening gebracht worden. Daarnaast wordt rekening gehouden met de afplatting van de aarde en de maan, met de vervorming door getijdewerking die de aarde en de maan op elkaar uitoefenen, en met de libratie van de maan. Beginwaarden worden ingevoerd door een kleinste-kwadratenaanpassing aan vele waarnemingen, waaronder optische en ook radar- en laserafstanden. De numerieke oplossing bestaat uit tijdreeksen voor de coördinaten van de hemellichamen; deze worden voor verder gebruik geïnterpoleerd met Chebychevpolynomen. De beoogde nauwkeurigheid van de numerieke integratie is op decimeterniveau.

Daarnaast is er de semi-analytische maantheorie ELP2000 van J. Chapront en M. Chapront-Touzé[29]. Hun methode is gebaseerd op het werk van Hill (1877) en Brown (1896). Hun oplossing stemt overeen met DE200/LE200 tot ongeveer $0.005''$ in lengte en breedte, en enkele meters in afstand. Numerieke integratie geeft de beste nauwkeurigheid over een tijdspanne van eeuwen; voor langere periodes is ELP2000 nauwkeuriger.

3.11 Conditievergelijkingen

Alle hemelmechanica heeft weinig praktisch nut als de formules niet gevoed worden met betrouwbare waarnemingen. Integratie van de bewegingsvergelijkingen van de maan (of willekeurig welk ander hemellichaam) laat zes integratieconstanten open, waarvan de waarde aan de hand van waarnemingen moet worden ingevuld. Eén moeilijkheid is om de fysische betekenis van de constanten te achterhalen. Dit speelt vooral bij de abstractere theorieën van de 19e eeuw. Ook als de constanten eenvoudig in verband te brengen zijn met zes baanelementen komt het er nog op aan die elementen te berekenen uit de waarnemingen. Er zijn daarbij twee fundamentele problemen: a) de waarnemingen zijn vervuild door fouten (instrumentfouten, refractie, e.d.); en b) de baanelementen zélf zijn vervuild door de storingen die de theorie probeert te achterhalen.

In de 18e eeuw begon men ertoe over te gaan om de berekeningen te baseren op meer dan het minimaal noodzakelijke aantal waarnemingen[30]. Statistiek was nog niet ontwikkeld, maar ik denk dat het intuïtief duidelijk was dat toevallige fouten de neiging hebben elkaar te compenseren, en des te beter naarmate er meer waarnemingen zijn. De tweede moeilijkheid, zo

[29] Semi-analytisch wil zeggen dat de storingen zijn afgeleid uit de bewegingsvergelijkingen, met in een vroeg stadium numerieke waarden voor een aantal coëfficiënten ingevuld. In een analytische theorie vult men de numerieke waarden pas op het laatst in, waardoor de formules veel ingewikkelder worden en waarbij convergentie vaak niet te bewijzen is. ELP staat voor *Ephemeride Lunaire Parisienne*.

[30] [Sch95].

besefte Euler in ieder geval, kun je aanpakken als je de periodes van de storingen kent, want dan kun je waarnemingen uitkiezen waarin de storingen elkaar zo goed mogelijk compenseren. De seculaire storingen, of ze nu langperiodiek zijn of niet, kun je van de waarnemingen aftrekken als je hun grootte kent.

Dé (pre-)statistische methode in de tweede helft van de 18$^{\mathrm{e}}$ eeuw is die van de *conditievergelijkingen*[31]. Deze methode werd het eerst toegepast door Euler in zijn onderzoek van het Jupiter-Saturnusprobleem, met niet erg bevredigende resultaten, vooral omdat zijn formules voor de beweging van Saturnus niet klopten. Mayer paste conditievergelijkingen toe in zijn libratie-onderzoek, en dit wordt door historici beschouwd als de eerste succesvolle toepassing. Het is niet zeker of Mayer deze methode ook heeft gebruikt om zijn maantheorie te perfectioneren. Het ligt voor de hand om dat te vermoeden, en dat is dan ook de heersende opvatting. Ook onder andere Lalande, Laplace, en Delambre gebruikten conditievergelijkingen. Tegenwoordig zouden we de kleinste-kwadratenmethode gebruiken. Door wie die het eerst gebruikt is, is onzeker (het is één van die ontwikkelingen die op een gegeven moment 'in de lucht hingen'). Wel is zeker dat Gauss in 1809 aantoonde dat, modern gezegd, minimaliseren van de kwadratensom van de residuen, onder bepaalde voorwaarden overeenkomt met maximaliseren van de waarschijnlijkheid van de schatters.

Hier volgt de methode zoals Mayer hem gebruikte[32]. Mayer heeft 27 waarnemingen van de positie van de maankrater Manilius ten opzichte van het midden van de zichtbare maanschijf. Het doel van de berekening is om drie parameters te bepalen: α, de hoek van de maanequator met de ecliptica; θ, die de richting van de snijlijn van maanequator en ecliptica definieert; en β, de astronomische breedte van Manilius. Elke waarneming is een conditie die de drie parameters α, β, θ moeten trachten te vervullen. Op grond van boldriehoeksmeting stelt hij de condities voor door vergelijkingen, die ik hier weergeef als

$$\beta - K_i = L_i\alpha + M_i\alpha\sin\theta \qquad\qquad (i = 1, \ldots, 27),$$

waarin K_i, L_i, M_i door de waarnemingen bepaalde constanten zijn (Mayer heeft hun numerieke waarde). Deze 27 vergelijkingen verdeelt Mayer in drie groepen van 9 elk: de eerste groep bevat de vergelijkingen waarin de M_i de grootste positieve waarde hebben, de tweede groep die waarin zij de meest negatieve waarde hebben, en de derde groep bevat de overige vergelijkingen. In elke groep telt hij de vergelijkingen op, zodat hij er drie overhoudt:

[31] Delambre [Del27]: *équations de condition*, in de Engelstalige literatuur meestal *equations of condition*. In het Nederlands ben ik het begrip niet tegengekomen.
[32] Zie [For80a, pp. 48–52] voor meer details.

$$
\begin{aligned}
9\beta - K_{\mathrm{I}} &= L_{\mathrm{I}}\alpha + M_{\mathrm{I}}\alpha \sin\theta, \\
9\beta - K_{\mathrm{II}} &= L_{\mathrm{II}}\alpha + M_{\mathrm{II}}\alpha \sin\theta, \\
9\beta - K_{\mathrm{III}} &= L_{\mathrm{III}}\alpha + M_{\mathrm{III}}\alpha \sin\theta.
\end{aligned}
$$

Uit de drie vergelijkingen zijn de drie onbekende parameters α, β, en θ eenvoudig te bepalen. Het idee achter de verdeling in groepen is om de verschillen tussen de constanten in de vergelijkingen zo groot mogelijk te maken, waardoor volgens Mayer de parameters nauwkeuriger te bepalen zijn.

Laplace veroorloofde zich iets meer vrijheid: voor elke te bepalen parameter koos hij een combinatie van conditievergelijkingen die tezamen een grote coëfficiënt hadden voor deze ene parameter, en kleine coëfficiënten (liefst 0) voor alle andere (hij gebruikte de condities dus meerdere keren als dat zo uitkwam). In lineaire-algebra termen zou je kunnen zeggen dat hij probeerde een gediagonaliseerd stelsel vergelijkingen te krijgen, waardoor de condities ontkoppeld raken: de parameters zijn dan in feite gemiddelden. Dit vind ik beter te begrijpen dan wat Mayer doet.

Hoofdstuk 4

Tobias Mayers bijdragen aan de lengtebepaling

Tobias Mayer staat bekend als de maker van de eerste maantabellen die bruikbaar waren voor het bepalen van lengte op zee nauwkeuriger dan 60 mijl. Hij was in zijn tijd een gerespecteerd cartograaf en astronoom. In dit hoofdstuk ontmoeten we hem en zijn naaste collega's. We krijgen een indruk van zijn leven en werk voor zover dat betrekking heeft op de geschiedenis van de maansafstandenmethode. Ik onderzoek zijn motivatie om de beweging van de maan te bestuderen. De technische details staan in hoofdstukken 3 en 5[1].

4.1 Jeugd

Tobias Mayer werd geboren op 17 februari 1723 in het Duitse plaatsje Marbach, aan de Neckar. Hij had drie zussen en een aantal broers die echter op twee na al vroeg overleden. Zijn vader was een arme wagenmaker, maar met een goed technisch inzicht en belangstelling voor het aanleggen van waterwerken. Zodoende kreeg hij een aanstelling te Esslingen bij het slaan van waterputten, en de familie verhuisde al snel na Tobias' geboorte naar die plaats. Tobias had al op jonge leeftijd een warme belangstelling voor tekenen en zijn vader stimuleerde hem daarin. Daarnaast was hij erg onder de indruk van de militairen die zich in Esslingen ophielden. Van beide liefhebberijen zijn de sporen terug te vinden in zijn latere leven. Leren kon de jonge Tobias als de beste: hij kon lange bijbelteksten makkelijk uit het hoofd

[1]Dit hoofdstuk is gebaseerd op [For80a] en [For71].

leren, helaas zonder er veel van te begrijpen, en het vestigde een afkeer van nutteloze kennis in hem.

Vader Mayer overleed voordat Tobias oud genoeg was om voor brood op de plank te zorgen. Gelukkig waren er enkele notabelen die zich over hem ontfermden. Zij zorgden dat Tobias een klassieke opvoeding kreeg op het plaatselijke Lyceum. Niet alleen leerde hij daar vloeiend Latijn spreken en schrijven, ook was hij in de gelegenheid om zijn interesses te volgen, wat blijkt uit een door hem getekende plattegrond van Esslingen, en een boekje van zijn hand met tekeningen van militaire verdedigingswerken.

Mayers belangstelling voor fortificaties, plattegronden, en kaarten bracht hem in aanraking met meetkundige problemen. Wiskunde kwam echter niet voor op het curriculum van het lyceum, en Mayer is daarin een autodidact. Zijn contact met een plaatselijke schoenmaker, Gottlieb Kandler, betekende veel voor hem. Hij schreef daarover[2]:

> "Mijn schoenmaker en ik konden goed met elkaar opschieten, want hij was een liefhebber van de mathematische wetenschap en had geld om boeken te kopen, maar geen tijd om ze te lezen, want hij moest schoenen maken. Aan de andere kant had ik tijd om te lezen, maar geen geld om boeken te kopen. Daarom kocht hij de boeken die we wilden lezen, en 's avonds als hij klaar was met werken, vestigde ik zijn aandacht op wat ik de moeite waard vond in de boeken."

Eén van de boeken die Mayer bestudeerde was het in die tijd populaire werk van Christian von Wolff (1679–1754), genaamd *Anfangs-Gründe aller mathematischen Wissenschaften*. Het is een elementair leerboek, waarin theorie en praktijk in hoge mate verweven zijn. Naast wiskundige onderwerpen als meetkunde, algebra, en differentiaal- en integraalrekening, behandelde Wolff ook onderwerpen als mechanica, bouwkunst, artillerie, en astronomie. Dat was niet ongebruikelijk in die periode, waarin een intensieve wederzijdse beïnvloeding van wiskunde en natuurwetenschappen gaande was.

Bij Mayer zal de inhoud niet in onvruchtbare aarde gevallen zijn. Wel had hij de grootste moeite om zich het hoofdstuk over analytische meetkunde eigen te maken. Toen dat dan toch gelukt was, schreef hij er zelf een boek over, met de lange titel *Neue und allgemeine Art, alle Aufgaben aus der Geometrie vermittelst der geometrischen Linien leichter aufzulösen; insbesondere wie alle reguläre und irreguläre Vielecke, davon ein Verhältnis ihrer Seiten gegeben, in den Circul geometrisch sollen eingeschrieben werden, sammt einer hiezu nötigen Buchstaben-Rechnenkunst und Geometrie* (Esslingen 1741). Hij noemde drie redenen waarom hij dat boek schreef. In de eerste plaats verschafte de veelzijdigheid, precisie en schoonheid van de wiskunde hem meer plezier dan elke andere wetenschap. In de tweede plaats wilde hij de beschikking hebben over een methode om veelhoeken te beschrijven waarvan de hoekpunten op een cirkel liggen; dat had hij nodig

[2] [For80a, p. 27].

om fortificaties te ontwerpen. In de derde plaats vond hij dat het ontbrak aan een geschikt leerboek over analytische meetkunde. Aangezien het slechts mijn bedoeling is een impressie te geven van Mayers vorming, laat ik de inhoud verder voor wat het is. Mayer wilde maar wat graag beginnen aan een militaire carrière; zijn uitgangspositie was echter wat onfortuinlijk: hij woonde in het weeshuis, en in ruil daarvoor gaf hij les aan jongelingen op het lyceum.

4.2 Cartograaf en astronoom

In Esslingen was weinig toekomst voor Mayer, en daarom verliet hij die stad. Hij vond korte tijd werk in Augsburg bij een kaartenfirma waar hij een *Mathematischer Atlas* maakte. Deze atlas bestond uit achtenzestig platen, waarin hij een overzicht van de wiskunde gaf, inclusief geografie, astronomie, mechanica, etc. Daarna, van 1746 tot 1751, werkte hij bij het cartografisch bureau van Homann in Neurenberg, overigens een stad waar in vroeger eeuwen bekende astronomen zoals Regiomontanus en Johann Werner gewerkt hadden. Het bedrijf had ambitieuze plannen om aard- en maanglobes te maken waar niet veel van terecht gekomen is. Mayer werkte daar samen met Johann Franz, een der directeuren en een gedreven plannenmaker, en met de cartograaf en astronoom Georg Moritz Lowitz, diens zwager.

Mayers eerste taak bij Homann was te helpen bij de voltooiing van een atlas. Mayer tekende twee kaarten voor de atlas en hield zich verder uitgebreid bezig met de verificatie van de geografische positie (breedte en lengte) van weer te geven plaatsen. Dat laatste was een moeilijk karwei omdat de verschillende bronnen nogal verschillende waarden gaven, en omdat die bronnen te weinig informatie bevatten over de gebruikte instrumenten en methoden, zodat ze niet op waarde te schatten waren. Mayer zag het als een van de belangrijkste taken van de astronomie om hier verbetering in te brengen[3]:

> "Het is maar al te zeer bekend in de geografie dat zeer veel, ja de meeste, van de talrijke bekende en aanzienlijke plaatsen het nodig hebben dat hun lengte en breedte nauwkeuriger bepaald worden. *Dit te bewerkstelligen is een van de belangrijkste doelstellingen van de astronomie*, en zij die zich bezig houden met deze wetenschap hebben voortdurend grote moeite gedaan het soort waarnemingen te verkrijgen waaruit de geografische positie . . . kan worden afgeleid. Weinigen echter hebben hun arbeid uitgestrekt naar het probleem hoe hun eigen waarnemingen behoorlijk zouden kunnen worden aangewend tot dit doel."

Hij ziet dus astronomie als een belangrijk hulpmiddel voor de cartografie, en al zijn latere werk in de astronomie staat in het teken van zijn inspanningen

[3]Mijn vertaling uit het Engels, [For80a, p. 42].

om de kwaliteit van de cartografie te verbeteren[4].

Een voorbeeld daarvan is Mayers beschrijving van de maansverduistering die zou plaatsvinden in de nacht van 8 op 9 augustus 1748. Een maansverduistering is een van die hemelverschijnselen die voor alle waarnemers op aarde op hetzelfde moment plaatsvinden, en die voor het vinden van de geografische lengte gebruikt kunnen worden; ze zijn echter te zeldzaam om voor de navigatie van betekenis te zijn. Indien op verschillende plaatsen de lokale tijd van de verduistering werd vastgesteld, kon men het verschil in lengte tussen die plaatsen berekenen. Om de lokale tijd van de verduistering nauwkeuriger vast te stellen, noteerde men de tijden waarop verschillende markante punten op het oppervlak van de maan door de aardschaduw bedekt werden, dan wel uit de aardschaduw tevoorschijn kwamen.

Mayer ontdekte dat de in die tijd gebruikelijke wijze van het beschrijven van de maansverduistering onvoldoende rekening hield met de parallax van de maan. Weliswaar is het niet nodig rekening te houden met de parallax bij het doen van de waarnemingen, maar de parallax speelt wel een rol bij het bepalen van de breedte van de aardschaduw ter plaatse van de maanbaan, en dus bij het voorspellen van de omstandigheden van de verduistering[5]. Mayer stuitte op nog een moeilijkheid: de topografie van de maan was nogal gebrekkig beschreven. Er was geen eenduidige naamgeving, en de positie waarop verschillende markante punten op zelfs de beste maankaarten werden weergegeven, was onnauwkeurig. Mayer zette zich aan een uitgebreid programma van waarnemingen om de topografie van de maan te verbeteren. Zorgvuldig bewerkte hij zijn resultaten om alle invloed van aardse coördinaten en van de libratie[6] te elimineren. Om de libratieparameters te bepalen gebruikte hij de methode van *conditievergelijkingen* (zie §3.11). In essentie is dat een methode om de parameters in een overgedetermineerd systeem te bepalen, dat wil zeggen uit een veel groter aantal waarnemingen die elk behept zijn met (onvermijdelijke) waarnemingsfouten. Mayer publiceerde zijn analyse in de *Kosmographische Nachrichten und Sammlungen auf das Jahr 1748* (Neurenberg 1750).

Ook ander astronomisch werk van Mayer in die periode hield verband met het verbeteren van de cartografie. Metingen aan de zonsverduistering van 25 juli 1748 gaven nuttige informatie over parallax en inclinatie van de maan. Hierover (en ook over sterbedekkingen) correspondeerde hij met de Franse astronoom en geograaf Joseph Nicolas De L'Isle (1688–1768). Die had op zijn beurt weer grote belangstelling voor de precieze ligging van Neurenberg, in verband met de herwaardering van veel oudere waarnemingen die door astronomen in die plaats gedaan waren.

Mayer was niet alleen buitengewoon vaardig in het manipuleren van

---

[4] [For80a, pp. 42, 43].
[5] Zie [Sma56, pp. 379–385].
[6] Zie noot 24 op p. 44.

waarnemingen om er alle mogelijke informatie uit te verkrijgen, zoals onder andere blijkt uit het boven aangehaalde libratie-onderzoek. Hij hechtte ook zeer grote waarde aan het verkrijgen van zo nauwkeurig mogelijke waarnemingen. Zo monteerde hij op zijn telescoop een glasmicrometer van eigen ontwerp. Hij bracht enkele voor de hand liggende verbeteringen aan in hoekmeetinstrumenten voor de landmeetkunde. Mayers bijdragen aan de cartografie in deze periode bij Homann zijn voor ons niet van belang.

4.3 Professor in Göttingen

Mayer had zich een reputatie verworven als cartograaf en astronoom. Dit bezorgde hem een aanstelling als professor in de economie aan de Georg August academie te Göttingen, waar hij in het voorjaar van 1751 arriveerde, kort na zijn huwelijk met Maria Victoria Gnüge, een schoonzus van Franz.

Dat Mayer benoemd werd tot professor in de economie moeten we met een korreltje zout nemen (ik vraag me trouwens af wat dat inhield in die tijd). Deze plaats was toevallig vrijgekomen, en Mayer werd (blijkens zijn aanstellingsbrief) belast met "het onderwijs in praktische wiskunde, en onderzoek"[7]. Daarnaast zou Mayer samen met Johann Andreas Segner (1704–1777) leiding moeten gaan geven aan het nieuw te stichten Göttinger observatorium. Juist Mayer was daarvoor de geschikte persoon, want hij had blijk gegeven van uitstekende kwaliteiten als praktisch astronoom, en daarnaast werd op deze wijze een verbinding gelegd tussen de nieuwe sterrenwacht en het Kosmografisch Genootschap in Neurenberg[8], waarvan men hoopte dat het naar Göttingen overgebracht kon worden.

Eenmaal geïnstalleerd in Göttingen schreef Mayer een brief aan Euler. Dit was het begin van een lange correspondentie over astronomische onderwerpen als refractie, parallax van de maan, de maantheorieën van Euler, Mayer, en Clairaut, en controverses rond gravitatie en de ethertheorie[9]. Mayer had grote waardering voor Eulers astronomische werk. Euler was in die tijd verbonden aan de academie van Berlijn. Daar was hij betrokken bij het samenstellen van de Berlijnse Kalender, een regelmatig uitgegeven verzameling efemeriden die Mayer gebruikte.

Uit de correspondentie tussen Euler en Mayer krijgen we enigszins een beeld van de ontwikkeling van Mayers maantheorie. Eind 1752 (of uiterlijk

[7]Zo staat het in [For80a]. Praktische wiskunde is, volgens de lijst met door Mayer gegeven colleges in [For80a, pp. 107–110], onder andere praktische meetkunde, fortificaties, mechanica, cartografie, astronomie, architectuur, maar soms ook zuivere wiskunde (sic), algebra, calculus.

[8]Het Kosmografisch Genootschap was een initiatief van Franz. De doelstelling was om de toenmalige cartografie naar een hoger plan te tillen door het stichten van een kenniscentrum. Daarnaast zou het fondsen moeten losmaken om het noodlijdende bedrijf van Homann te redden.

[9]Eenendertig brieven geschreven in de jaren 1751–1755 zijn in het Engels vertaald en uitgegeven in [For71]. Lees meer over de genoemde onderwerpen in hoofdstukken 3 en 5.

in de eerste dagen van 1753) had Mayer de structuur van zijn maantheorie klaar: hij had een methode om de astronomische lengte van de maan op elk gewenst tijdstip te berekenen op $2'$ nauwkeurig. De nauwkeurigheid had hij geverifieerd met waarnemingen uit de laatste anderhalve eeuw. Euler liet weten onder de indruk te zijn. Zijn eigen tabellen weken dikwijls meer dan $5'$ van de ware positie van de maan af. Hij sprak aan de Berlijnse academie lovend over Mayers diepe inzichten en peilde Mayers belangstelling voor een positie daar. De onderhandelingen, waarbij Euler als intermediair tussen Mayer en de Berlijnse academie optrad, zouden geruime tijd in beslag nemen[10].

Tot maart 1754 bracht Mayer kleine verbeteringen aan in de coëfficiënten van zijn maantabellen[11]. Aanvankelijk kon hij de nauwkeurigheid nagaan door vergelijking van berekende posities van de maan met waarnemingen van de ware positie uit de laatste 150 jaar. Voor de nauwkeurigste versie was dat niet meer direkt mogelijk omdat de nauwkeurigheid van de beste waarnemingen werd geschat op ca. $1'$. Doorgaans werd de ware positie van de maan verkregen uit het tijdstip van meridiaandoorgang. Mayer verwachtte dat hij hogere precisie kon bereiken door de ware positie af te leiden uit het moment waarop de maanschijf een ster aan de hemel bedekt (een sterbedekking). Om een vergelijking te maken tussen theorie en werkelijkheid moest hij niet alleen de astronomische *lengte*, maar ook de *breedte* van de maan kunnen berekenen. Op 15 juli 1753 schreef hij aan Euler dat hij dat kon, en op 6 maart 1754 schreef hij dat hij de positie van de maan kon berekenen op $30''$ nauwkeurig.

Mayer was zich op dat moment bewust dat de posities van de sterren, zoals die bekend waren, veel te wensen overlieten. Helaas kost het te veel ruimte om in te gaan op hoe Mayer zich uit het moeras omhoog trekt[12]. Dat fouten in de waargenomen posities van de sterren verantwoordelijk waren voor de afwijkingen van $5'$ en meer in de maantabellen van Euler en Clairaut, was een gewaarwording van fundamenteel belang; dat Mayer zich dat realiseerde was méér verantwoordelijk voor het succes van zijn maantabellen dan de onderliggende maantheorie, beweert Forbes.

Toen Euler van de nieuwe vorderingen van Mayer hoorde, feliciteerde hij hem van harte, en wenste dat zij snel aan iedereen bekend zouden zijn. Hij had informatie laten inwinnen in Londen, waaruit viel op te maken dat men daar niet afwijzend stond tegenover een beloning voor Mayer, indien die een

[10] In dezelfde tijd deed de academie van Sint Petersburg een aanbod, eveneens via Euler.

[11] Twee verschillende versies werden gepubliceerd in *Commentarii Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis* (Comm. Gott.). De eerste versie in deel ii (1753); deze tabellen, getiteld *Novæ tabulæ motuum solis et lunæ*, waren volgens Mayer nauwkeurig tot ongeveer $1'$. De tweede versie *Tabularium lunarium in commentt. S.R. Tom. II contentarum usus in investiganda longitudine maris* in deel iii (1754); deze hadden verdubbelde precisie.

[12] Zie [For70, pp. 148–149]; in sommige andere publicaties van Forbes staat bijna letterlijk dezelfde beschrijving, maar met een slordigheidje die de tekst onbegrijpelijk maakt.

oplossing voor het lengteprobleem had. Welke gevolgen dit had vermeld ik in §4.4.

Korte tijd later waren eindelijk de onderhandelingen met Berlijn afgerond. Mayer had via Euler uitstekende voorwaarden bedongen. Beiden keken ernaar uit om met elkaar samen te werken. Mayer zou onder andere de volledige beschikking krijgen over het Berlijnse observatorium, terwijl het observatorium in Göttingen door allerlei vertragingen nog steeds niet klaar was. Vol vertrouwen kon hij zijn ontslag van de Georg August universiteit aanvragen. Tot zijn verbijstering werd zijn ontslag geweigerd door niemand minder dan koning George III van Groot-Brittanië, onder wiens kroon de staat Hannover viel (waartoe Göttingen behoorde).

De koning verzocht middels Baron von Münchhausen, eerste minister van Hannover, wat de geachte heer Mayer beliefde om in Göttingen te blijven. Wat Mayer betreft was dat, behalve een aanzienlijke loonsverhoging, het vertrek van Segner als mededirekteur van de sterrenwacht in aanbouw. Segner was een bijzonder afgunstig heerschap waar slecht mee samen te werken was, en er waren serieuze verdenkingen dat hij uiteindelijk het maken van betrouwbare waarnemingen onmogelijk zou maken[13]. Mayers wensen werden vervuld. Mayers talent was te kostbaar voor de Göttinger academie om te verliezen. Hij had inmiddels een internationale reputatie als praktisch astronoom, en indien zijn methode om lengte op zee te bepalen in Londen waardering zou vinden, dan zou zijn vertrek tot aanzienlijk prestigeverlies leiden. De academie had juist een andere vooraanstaande geleerde zien vertrekken (de anatoom Albrecht von Haller). Daarnaast verkeerde de transfer van het Kosmografisch Genootschap van Neurenberg naar Göttingen in een kritieke fase en Mayer had nog steeds goede banden met Franz en Moritz.

Eind 1754 moet een hectische tijd zijn geweest voor Mayer. De strubbelingen rond zijn geweigerde vertrek naar Berlijn, de contacten met Londen over de lengtemethode, en het gereedkomen van het observatorium, waarover hij inmiddels alleen de leiding had, vielen alledrie in deze periode.

Al diverse keren had hij aangegeven dat hij betere waarnemingen nodig had, en al sinds zijn vertrek uit Neurenberg zat hij zonder observatorium. Mayer wilde op de nieuwe sterrenwacht over de beste instrumenten beschikken. Niemand kon een muurkwadrant maken zo nauwkeurig als de beroemde Londense instrumentmaker John Bird (1709–1786). Voor £260 (exclusief verzendkosten) maakte die een zes voets houten instrument, dat in het najaar van 1755 werd geïnstalleerd waarna Mayer het zeer zorgvuldig op restfouten onderzocht. Verder had hij de beschikking over twee nauwkeurige klokken, een barometer en een thermometer (van belang voor refractiecorrekties), en een 15 duims koperen kwadrant, naast enkele zonnewijzers en telescopen. Zo toegerust deed hij waarnemingen aan de posities van sterren, die hij in 1759 samengevatte in een catalogus.

[13][For80a, pp. 95–96].

Vanaf juli 1757 was Göttingen met enige onderbreking bezet door Franse soldaten, als gevolg van de Zevenjarige Oorlog (1757–1762). Het feit dat de sterrenwacht op een kruitmagazijn gebouwd was, en dat een ander magazijn de lucht in was gevlogen, zal voor Mayer reden geweest zijn om minder waarnemingen te doen en meer thuis te werken. Maar thuis was het ook niet zo rustig. Er waren officieren ingekwartierd en uiteindelijk klaagde Mayer zijn nood dat hun kok, na zich te hebben ontfermd over het tuinhuisje en de bomen, bezig was het huis op te stoken. Door de bezetting waren de omstandigheden in Göttingen verre van rooskleurig.

Mayer overleed op 20 februari 1762 aan een slopende ziekte, drie dagen na zijn negenendertigste verjaardag. Zijn weduwe kwam in een precaire situatie. Zij had de zorg voor vier kinderen en zij moest de hypotheek op een deels verwoest huis aflossen, terwijl Mayers inkomsten wegvielen. Een pensioen van de staat zat er niet in want de schatkist was leeg. Enkele tekeningen van het maanoppervlak, en segmenten die bedoeld waren voor een maanglobe (daterend uit de periode dat Mayer bij Homann werkte) kon zij voor niet te veel geld verkopen aan het observatorium. Haar grootste hoop was een aanzienlijke beloning van de Britse Board of Longitude voor de maantabellen van haar overleden echtgenoot.

4.4 Lengtemethode

Zoals gezegd liet Euler weten dat hij had vernomen dat Mayers maantabellen in Londen niet onwelwillend ontvangen zouden worden. Mayer werd als een waardig mededinger om de prijs op het (geografische) lengteprobleem beschouwd. Het was nog wel nodig dat Mayer een bruikbare methode ontwierp om zijn maantabellen in te zetten voor het bepalen van die lengte, en er waren ook betere gegevens van de posities van de sterren nodig. Deze dingen schreef Euler op 11 juni 1754 aan Mayer, in antwoord op diens brief van 6 maart waarin Mayer melding had gemaakt van de verbeterde maantheorie (incl. de maans breedte) en de sterbedekkingen. Het was de eerste keer dat het probleem van lengte bepalen op zee in de correspondentie tussen Euler en Mayer ter sprake kwam.

Mayer was het met Euler eens. Hij antwoordde op 22 juni dat hij al veel posities van sterren in de zodiak nauwkeurig had bepaald (ik weet niet welke waarnemingen hij daarvoor gebruikt heeft; de sterrenwacht in Göttingen was nog niet af). Verder had hij een, wat hij noemde, eenvoudige methode om de geografische lengte met de maan en een ster te bepalen. Deze methode beschreef Mayer in een manuscript getiteld *Methodus longitudinum promota*. Hij schreef dat uiterlijk in september of oktober van dat jaar, met de bedoeling om het naar Londen te sturen ter ondersteuning van zijn claim op de lengteprijs[14].

[14] [For71, p. 17 en noot 72].

Maar ik denk dat Mayer zich al eerder gerealiseerd moet hebben dat hij een sleutel tot het lengteprobleem op zee had. Vanuit zijn geografische belangstelling zal hij zeker kennis hebben genomen van dat probleem. En daar Göttingen onder de Britse kroon viel zal hij ook wel van de aantrekkelijke beloning gehoord hebben, misschien via Michaelis (over wie straks meer). Forbes wijst erop dat Mayer al voor het eind van 1753 aan het lengteprobleem *op zee* dacht, maar dat hij betwijfelde of hij de vereiste nauwkeurigheid van 1' zou kunnen halen[15]. In ieder geval was het lengteprobleem op zee voor Mayer niet de motivatie om de beweging van de maan te onderzoeken. Zijn motivatie vinden we in het citaat op pagina 53: het verbeteren van de lengte- en breedtebepaling van plaatsen *op land*, door astronomische middelen, ten behoeve van de geografie en cartografie. Dat blijkt ook uit de plaats die de maantheorie inneemt in zijn verdere werk.

Mayers methode om lengte op zee te bepalen kwam in het kort hierop neer. Men moest de hoekafstand tussen een ster en de maan meten. Men berekende de afstand tussen de ster en de maan met behulp van de maantabellen, uitgaande van een geschatte lengte[16]. Indien de twee afstanden niet overeenkwamen moest de juiste geografische lengte bepaald worden met lineaire interpolatie. Ik betwijfel of deze methode op zee met enig enthousiasme ontvangen zou zijn, want het was veel werk om éénmaal de positie van de maan uit de tabellen te berekenen, en voor interpolatie was een keer niet genoeg. Nevil Maskelyne heeft Mayers methode dan ook snel terzijde gelegd en zijn eigen methode ontwikkeld. In hoofdstuk 6 vertel ik daar meer over.

Mayer betwijfelde echter of Hadleys octant[17] zou volstaan om die afstand op een bewegend schip betrouwbaar (tot op $1'$ nauwkeurig) te meten, en die twijfel had hem weerhouden om ook maar iets naar Londen te sturen. Maar begin september schreef hij aan Euler dat hem een verbetering aan Hadleys octant was ingevallen en dat hij een instrument van nieuw ontwerp liet vervaardigen. Hij moet hier de repeteercirkel bedoelen[18]. Het voornaamste voordeel van dit instrument was, dat het zo gebruikt kon worden dat de som van een aantal metingen werd afgelezen; vandaar de naam. Dat vereenvoudigt het bepalen van de gemiddelde waarde van de meting en vermindert het

[15] [For80a, p. 153].

[16] Zowel Mayer als Forbes vermelden niet, althans in hun samenvattingen, welke rol die aangenomen lengte speelt. Het lijkt me dat die gebruikt wordt om de lokale tijd om te rekenen naar de tijd waarin de argumenten van de tabel (anomalie) zijn uitgedrukt. Verder moet de waarneming gecorrigeerd worden voor parallax van de maan, die o.a. afhankelijk is van de lokale uurhoek van de maan.

[17] John Hadley (1682–1744) beschreef in 1730 een octant of kwadrant waarmee hoeken veel nauwkeuriger te meten waren dan met de Jakobsstaf of varianten daarvan. Het concept was niet nieuw: Robert Hooke (1666), Isaac Newton, en Thomas Godfray (1730) hadden een vergelijkbaar instrument beschreven. Allen (behalve waarschijnlijk Hooke) dachten bij het ontwerpen specifiek aan het gebruik voor het meten van maansafstanden [And96, Appendix D].

[18] Forbes wijst in [For80a, hst. 7] op de lange voorgeschiedenis bij Mayer van dit instrument, hetgeen enige twijfel oproept over die 'plotselinge inval'.

effect van fouten in de schaalverdeling. Bijkomend voordeel is dat er hoeken van meer dan 90° mee te meten zijn, wat dikwijls voorkomt bij het meten van maansafstanden, maar wat slechts onder bijzondere omstandigheden nodig is bij hoogtemetingen.

In de zomer van 1754 waren dus alle ingrediënten van de maansafstanden-methode voorhanden. De algemene opinie, zowel in Londen als in Göttingen, was positief ten aanzien van Mayers kans om de Britse prijs op de lengte in de wacht te slepen. Al moest nog blijken of de methode ook in praktijk zou voldoen. Mayer zelf leek daar nog het meest aan te twijfelen. Johann David Michaelis, gedreven door de roem die de Georg August universiteit en het Göttinger wetenschappelijk genootschap mogelijk te wachten stond, zette druk op Mayer.

Michaelis had invloedrijke connecties in Göttingen en Hannover; bovendien had hij een neef in Londen, William Philip Best, die secretaris was voor George III. Door hun bemiddeling bereikten Mayers verbeterde maantabellen, het manuscript *Methodus longitudinum promota*, en een formeel verzoek om beloning Engeland, waar James Bradley (1693–1762) (dan *Astronomer Royal*) een voorlopig onderzoek instelde. Die kwam tot de conclusie dat de maantabellen inderdaad opmerkelijk goed waren en hij deed de aanbeveling dat de hele methode in praktijk uitgeprobeerd werd, zoals dat vereist was door de *Longitude Act*. Daarnaast verlangde hij een verklaring *hoe* Mayer zijn tabellen geconstrueerd had. Aan dat verzoek voldeed Mayer met de grootste tegenzin. De precisie van de tabellen berustte voornamelijk op de manier waarop de beschikbare waarnemingen erin verwerkt waren, en hij vond dat de validatie diende plaats te vinden door vergelijking met nieuwe waarnemingen.

Bradley, aan wiens verzoek Mayer binnen enkele maanden voldeed, zette zich aan een uitgebreide vergelijking van de tabellen met de werkelijkheid. In 1760 rapporteerde hij dat de theoretische basis voldoende was en dat de tabellen tot op $1\frac{1}{4}'$ nauwkeurig[19] overeenstemden met 1100 waarnemingen. Intussen had Maskelyne bevonden dat de tabellen praktisch bruikbaar waren op zee, waarop ik in hoofdstuk 6 terugkom. Kapitein John Campbell probeerde de repeteercirkel uit, waarvan een houten model naar Londen was gestuurd[20]. Hij vond het instrument onhandig in het gebruik. Hij vond dat

[19] Uit [For80a, pp. 165, 168 en 191] en [For71, p. 87–88] blijkt dat Bradley de verbeterde tabellen had die gepubliceerd waren in de Comm. Gott. 1754 (zie noot 11 op p. 56). Ironisch genoeg bevatten die een appendix met Bradleys eigen maanwaarnemingen uit 1743–1745, waarmee Mayer zijn tabellen vergeleken had. De nauwkeurigheid die Bradley constateert is echter meer in overeenstemming met de eerdere tabellen in Comm. Gott. 1753.

[20] Campbell had de opdracht gekregen om Mayers lengtemethode op zee uit te proberen, en de bruikbaarheid van de octant en repeteercirkel daarbij na te gaan. In de sextant combineerde hij de voordelen van beide apparaten. John Bird, dezelfde die Mayers muurkwadrant had vervaardigd, maakte de eerste koperen exemplaren van de repeteercirkel en de sextant.

een apparaat als dat van Hadley, maar dan met een boog van 60° zodat er hoeken tot 120° mee te meten zijn, beter zou voldoen. Zo ontstond de sextant, een instrument dat vrijwel ongewijzigd in gebruik is gebleven tot op heden, voor zover er op zee nog aan astronomische navigatie wordt gedaan.

De Britse admiraliteit had inmiddels de handen vol aan de Zevenjarige Oorlog. Bovendien was Harrisons definitieve tijdmeter gereedgekomen. Na de oorlog werd de Board of Longitude dan geconfronteerd met *twee* serieuze lengtemethoden, die beide (in 1763) aan een laatste beproeving werden onderworpen. Pas in 1765 kwam het tot een ontknoping voor de ontdekkers, waarvan de één al was overleden, en de ander de 70 ruim gepasseerd. Harrison ontving £5000 (de helft van de maximale beloning waarvoor hij in aanmerking kwam): zijn tijdmeter was bruikbaar om de lengte op 30 mijl te bepalen, maar niet *algemeen* omdat het nog niet duidelijk was hoe er grote aantallen van te maken. Mayers weduwe ontving £3000 (minder dan de helft van de minimum prijs) omdat was gebleken dat de tabellen algemeen bruikbaar waren om de lengte op 60 mijl te bepalen[21], maar de berekeningsmethode te wensen overliet. Onverwacht kreeg Euler £300 voor zijn aandeel in de maantheorie, vermoedelijk naar aanleiding van een protest van Clairaut dat Euler en hijzelf die theorie hadden ontworpen, niet Mayer[22].

De weduwe was danig teleurgesteld over deze uitkomst, te meer daar zij per contract £1200 moest afstaan aan Michaelis en Best voor hun inspanningen en aan het Göttinger wetenschappelijk genootschap.

Maskelyne was inmiddels *Astronomer Royal* geworden. Hij was groot voorstander van de maansafstandenmethode. Hij verzorgde de bewerking en publicatie van Mayers manuscripten die inmiddels al meer dan tien jaar geleden geschreven waren: de *Theoria lunæ juxta systema Newtonianum* (Londen, 1767) met de theoretische verantwoording van de tabellen, en de *Methodus longitudinum promota* met de toen al achterhaalde gebruiksaanwijzing[23]. Meer daarover in hoofdstuk 6.

4.5 Conclusies

In dit hoofdstuk heb ik maar een klein deel van Tobias Mayers wetenschappelijke werk kunnen belichten. Veel van de onderzoekingen die hij na 1754 deed (onder andere aan de banen van Mars en Jupiter, zonsverduisteringen, onderzoek naar instrumentfouten en naar variatie van temperatuur en tijd) brengt Forbes[24] in verband met het verbeteren van de maantabellen. We hebben hier niet de ruimte om daar verder op in te gaan.

[21] Met de maantabellen uit 1754, die volgens Bradley tot op $1\frac{1}{4}'$ betrouwbaar waren, was geen beter resultaat te verwachten dan $37.5'$ in lengte, nog afgezien van overige fouten.

[22] [For75, p. 124].

[23] De laatste werden in 1770 gepubliceerd samen met de tabellen die Mayer in de jaren na 1755 nog had verbeterd, en die door zijn weduwe in 1763 naar Londen gestuurd waren.

[24] [For80a].

Vandaag de dag wordt Mayer bijna uitsluitend in verband gebracht met zijn maantabellen, die (sinds 1780 verbeterd door Charles Mason) ongeveer dertig jaar lang de basis vormden voor de efemeriden van de maan in de *Nautical Almanac*. Mayers succes met die tabellen was in de eerste plaats te danken aan zijn inzichten als praktisch astronoom. Toen Euler en Clairaut van mening waren dat de verschillen tussen theorie en praktijk van de maanbeweging te wijten waren aan de hypothese van de gravitatiewet, of aan de weerstand van de ether, bleef Mayer volhouden dat de oorzaak van die verschillen eerder gezocht moest worden in de kwaliteit van de beschikbare waarnemingen. Zijn betekenis ligt vooral in het verbeteren van de waarnemingstechnieken. Hij had aandacht voor alle aspecten daarvan: de instrumenten, de methodiek, correcties zoals refractie, alsook het feit dat een goede *beschrijving* van de gebruikte techniek onontbeerlijk is voor anderen om de kwaliteit van de waarnemingen te beoordelen. Door collega's tot ver in de negentiende eeuw werd hij vooral daarom gewaardeerd[25]. Daarnaast was hij als geen ander in staat om die waarnemingen te benutten. De kwaliteit van zijn maantabellen berust daarop.

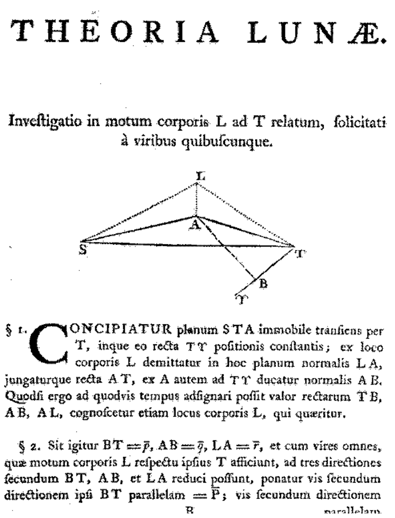
Zijn motivatie om aan de maantheorie te werken was vooral het verbeteren van lengtebepalingsmethoden ten behoeve van de geografie. Uiterlijk in 1753 kwam daar een tweede motivatie bij: om lengte op zee te bepalen. Er waren twee bijproducten: de *Methodus longitudinum promota* en de repeteercirkel. De eerste heeft geen rol van betekenis gespeeld; de tweede inspireerde Campbell tot de verandering van een ander instrument, namelijk de octant van Hadley.

Mayer had niet kunnen doen wat hij deed als hij geen groot wiskundig inzicht had gehad. Zijn werk als cartograaf, zijn visie op astronomische en landmeetkundige instrumenten, en vooral zijn berekeningen aan zonsverduisteringen, deden een sterk beroep op meetkundige inzichten. Eulers verhandeling over de storingen in de banen van Jupiter en Saturnus was een vooruitstrevend stuk werk met verschillende recente of vernieuwende methoden. Mayers inzicht was goed genoeg om die verhandeling te begrijpen en succesvol toe te passen op het probleem van de maanbeweging. In hoeverre hij daarbij zelf originele inzichten heeft gehad zullen we onderzoeken in hoofdstuk 5. Mayer is de eerste die de techniek van conditievergelijkingen succesvol toepaste. De methode bleef in gebruik tot aan de introductie van de kleinste-kwadratenmethode.

[25] [For80b, p. 44].

Hoofdstuk 5

Mayers maantheorie


THEORIA LUNÆ.

Investigatio in motum corporis L ad T relatum, solicitati à viribus quibuscunque.

§ 1. CONCIPIATUR planum STA immobile transiens per T, inque eo recta T♈ positionis constantis; ex loco corporis L demittatur in hoc planum normalis LA, jungaturque recta AT, ex A autem ad T♈ ducatur normalis AB. Quodsi ergo ad quodvis tempus assignari possit valor rectarum TB, AB, AL, cognoscetur etiam locus corporis L, qui quæritur.

§ 2. Sit igitur BT = p, AB = q, LA = r, et cum vires omnes, quæ motum corporis L respectu ipsius T afficiunt, ad tres directiones secundum BT, AB, et LA reduci possunt, ponatur vis secundum directionem ipsi BT parallelam = P; vis secundum directionem

Mayers *Theoria Lunæ* bevat een theoretische afleiding van de beweging van de maan uit Newtons gravitatiewet. Vermoedelijk schreef Mayer deze verhandeling op verzoek van Bradley, en zeer zeker *nadat* de eerste versie van zijn maantabellen gepubliceerd was[1]. Het manuscript van Mayer was sinds 1755 in het bezit van de Britse admiraliteit, maar (vanwege de Zevenjarige Oorlog, het overlijden van Bradley, en de uitgebreide onderzoeken door de *Board of Longitude* naar Harrisons en Mayers prestaties) duurde het tot 1767 voordat Maskelyne de publicatie ervan verzorgde. Naar verluidt heeft Maskelyne het manuscript van Mayer min of meer ongewijzigd overgenomen[2]. In het voorwoord gaat Mayer in op de relatie tussen theorie en waarnemingen[3]:

> "De manier waarop ik de ongelijkheden in de beweging van de maan vanuit de theorie heb onderzocht, zet ik hier niet uiteen opdat ik daardoor de betrouwbaarheid en waarheid van mijn maantabellen aantoon. Want de theorie heeft dit ongemak, dat veel van de ongelijkheden er niet nauwkeurig uit afgeleid kunnen worden, tenzij men de berekening, waaraan ik nu bijna al mijn geduld heb besteed, nog veel verder zou voortzetten. Mijn doel is eerder te laten zien dat geen argument tegen de juistheid van mijn tabellen kan worden verschaft door de theorie. Dit blijkt het duidelijkst uit het feit dat de ongelijkheden die in de tabellen gevonden worden, welke verbeterd zijn door vergelijking met

[1] Zie noot 11 op p. 56.

[2] [How89, p. 86].

[3] [May67].

vele waarnemingen, nooit meer dan $\frac{1}{2}'$ verschillen van die, die de theorie alleen verschaft. Men kan nauwelijks een grotere overeenstemming verlangen in zulke moeilijke zaken, en het blijkt duidelijk dat deze kleine fouten eerder voortkomen uit de theoretische berekening dan uit de tabellen. Dit wordt boven elke twijfel verheven als de numerieke waarden die door anderen uit dezelfde theorie zijn afgeleid, en vooral die van van de gevierde Euler, Clairaut, en d'Alembert, worden vergeleken hetzij met mijn tabellen, hetzij met mijn theoretische berekening. Ze verschillen soms $3'$ of meer; en ook onderling komen ze niet beter overeen, behalve op een paar plaatsen."

Het succes van Mayers tabellen is dus ook volgens hemzelf vooral een gevolg van de aanpassing van de coëfficiënten aan de waarnemingen, maar ik denk dat de onderliggende theorie een belangrijk ingrediënt is. Die theorie neem ik in dit hoofdstuk onder de loep. Er is bijna geen literatuur die werkelijk inhoudelijk op de *Theoria Lunæ* ingaat. Delambre wijdt er een paar regels aan[4]. Forbes en Wilson[5] maken twee inhoudelijke opmerkingen: aan het slot van dit hoofdstuk concludeer ik dat de ene niet waar, en de andere overdreven is. Gautiers verslag[6], wat wél dieper op Mayers theorie ingaat, ontdekte ik pas toen dit hoofdstuk zo goed als af was.

5.1 Bewegingsvergelijkingen

Mayer stelt eerst de bewegingsvergelijkingen op voor de maan ten opzichte van de aarde onder invloed van de zwaartekracht van de aarde en de zon. Ik zet hieronder de verschillende stappen meer gedetailleerd uiteen. Kort samengevat komt het volgende aan bod. Mayer stelt eerst de vergelijkingen op voor rechthoekige coördinaten, uitgaande van de tweede wet van Newton en de gravitatiewet die eveneens door Newton was opgesteld. Hij substitueert bolcoördinaten en verkrijgt drie vergelijkingen die de versnelling in radiale, tangentiale, en axiale richting voorstellen. De uitdrukkingen voor de krachten zien er ingewikkeld uit. Eén variabele, die de afstand tussen de zon en de maan voorstelt, werkt hij weg. Hij kiest gemiddelde eclipticale lengte als maat voor de tijd.

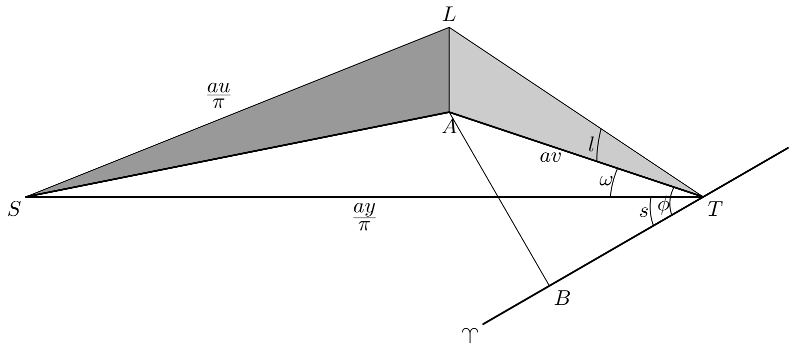
5.1.1 Van rechthoekige naar bolcoördinaten.

In de driedimensionale figuur 5.1 stellen T, L, en S resp. de aarde, de maan, en de zon voor. $\triangle STA$ ligt in het vlak van de ecliptica, A is de loodrechte

[4] "Il rapporte la Lune à trois coordonnées rectangulaires; il pose les équations données par Euler; il développe ces équations à sa manière, car on ne peut les résoudre que par approximation. ... Après avoir donné sous plusieurs formes ses diverses équations, il arrive enfin ... aux équations définitives ... " [Del27, pp. 443–444].

[5] [FW95, pp. 64–65].

[6] [Gau17, pp. 65–73].



Figuur 5.1: Parameters in het drielichamenprobleem

projectie van L op dit vlak. Υ is een vast punt aan de hemel in de ecliptica[7] en B ligt op $T\Upsilon$ zodanig dat $AB \perp BT$.

Mayer drukt de plaats van de maan ten opzichte van de aarde uit in drie coördinaten $BT = \bar{p}$, $AB = \bar{q}$, $LA = \bar{r}$. Op L werken een of meer krachten die hij ontbindt evenwijdig aan de coördinaatassen. De kracht evenwijdig aan BT noemt hij $\bar{P}$, die evenwijdig aan AB is $\bar{Q}$, en die evenwijdig aan LA is $\bar{R}$. Hoe groot de krachten zijn komt verderop aan de orde. De dynamica[8] geeft het verband tussen versnelling en krachten:

$$\frac{d^2\bar{p}}{dt^2} = -\frac{1}{2}\bar{P}, \qquad \frac{d^2\bar{q}}{dt^2} = -\frac{1}{2}\bar{Q}, \qquad \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -\frac{1}{2}\bar{R}. \tag{5.1}$$

Mayer gaat over op bolcoördinaten en drukt de positie van de maan uit als:

$$\begin{aligned} \phi &= \angle BTA, \text{ de ware eclipticale lengte van de maan,} \\ l &= \angle LTA, \text{ de ware eclipticale breedte van de maan, en} \\ \bar{a}v &= AT, \text{ de aarde-maanafstand geprojecteerd in de ecliptica.} \end{aligned}$$

Het verband tussen de oude en de nieuwe coördinaten is:

$$\bar{p} = \bar{a}v\cos\phi, \qquad \bar{q} = \bar{a}v\sin\phi, \qquad \bar{r} = \bar{a}v\tan l. \tag{5.2}$$

Substitueren van (5.2) in (5.1) gaat tegenwoordig als volgt. Twee keer differentiëren naar t van (5.2) geeft

$$\begin{aligned} \frac{d^2\bar{p}}{dt^2} &= \Big(\bar{a}\frac{d^2v}{dt^2} - \bar{a}v(\frac{d\phi}{dt})^2\Big)\cos\phi - \Big(2\bar{a}\frac{dv}{dt}\frac{d\phi}{dt} + \bar{a}v\frac{d^2\phi}{dt^2}\Big)\sin\phi, \\ \frac{d^2\bar{q}}{dt^2} &= \Big(\bar{a}\frac{d^2v}{dt^2} - \bar{a}v(\frac{d\phi}{dt})^2\Big)\sin\phi - \Big(2\bar{a}\frac{dv}{dt}\frac{d\phi}{dt} + \bar{a}v\frac{d^2\phi}{dt^2}\Big)\cos\phi. \end{aligned}$$

[7] Υ is dus niet het lentepunt want dat verschuift onder invloed van precessie en nutatie. Mayer brengt Υ en het lentepunt niet met elkaar in verband. Zie ook p. 82.

[8] Dit is wat nu bekend staat als de tweede wet van Newton, hoewel Newton nooit deze algemeen bruikbare formulering in differentiaalvergelijkingen heeft gegeven. Dat deed Euler het eerst, in 1747 (zie p. 42). De factor $-\frac{1}{2}$ is afhankelijk van de keuze van eenheden.

Noem $\bar{S} = \bar{P}\cos\phi + \bar{Q}\sin\phi$ en $\bar{T} = \bar{Q}\cos\phi - \bar{P}\sin\phi$, en vorm op dezelfde manier de som en het verschil van de eerste twee vergelijkingen in (5.1), dan is

$$\begin{aligned} \frac{d^2v}{dt^2} - v\frac{d\phi^2}{dt} &= -\frac{1}{2\bar{a}}\bar{S}, \\ 2\frac{dv}{dt}\frac{d\phi}{dt} + v\frac{d^2\phi}{dt^2} &= -\frac{1}{2\bar{a}}\bar{T}, \\ \frac{d^2(v\tan l)}{dt^2} &= -\frac{1}{2\bar{a}}\bar{R}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Omdat $\bar{a}v = \bar{p}\cos\phi + \bar{q}\sin\phi$, beschrijft de eerste van de drie vergelijkingen het verband tussen versnelling en kracht in de richting TA, dat wil zeggen dat deze vergelijking de radiale versnelling van de maan beschrijft. De tweede vergelijking beschrijft de versnelling langs de baan van de maan, en de derde vergelijking beschrijft de versnelling loodrecht op het vlak van de ecliptica.

Mayer verwijst naar Eulers verhandeling over het Jupiter-Saturnusprobleem waarin dezelfde formules voorkomen, en ook naar diens maantheorie[9].

5.1.2 Aantrekkingskrachten

Mayer heeft dus drie tweede-orde differentiaalvergelijkingen die het verband geven tussen de versnelling van de maan en de krachten die op de maan werken. De volgende stap is om die krachten te onderzoeken. Aannemende dat het gravitatiekrachten zijn, evenredig met de massa's en omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstanden, voert hij de volgende symbolen in[10]. De massa's van de hemellichamen geeft Mayer aan door hun astronomische symbolen ☉, ♁, en ☽. Verder is $\bar{a}$ de gemiddelde afstand van de maan tot de aarde, en $\frac{\bar{a}}{\pi}$ de gemiddelde afstand van de zon tot de aarde (daaruit volgt dat π ongeveer de verhouding is van de parallax van de zon en de maan; π heeft niets te maken met de omtrek van een cirkel). Mayer definieert y en u door:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{a}y}{\pi} &= \text{ware afstand van de zon tot de aarde, en} \\ \frac{\bar{a}u}{\pi} &= \text{ware afstand van de zon tot de maan.} \end{aligned}$$

De afstand van de maan tot de aarde is $\bar{a}v$, zoals we al gezien hebben. Deze afstand is veel kleiner dan de afstand van de maan tot de zon, dus $u \approx y$. Door de factoren $\bar{a}$ en π geldt dat u, v, en y weinig verschillen van 1.

[9] Zie p. 42. De verwijzing naar Eulers maantheorie is ongetwijfeld naar die van 1753, de *Theoria motuum lunæ*.

[10] Zie tabel 5.3 op p. 89 voor een overzicht van de constanten en variabelen die Mayer gebruikt. De krachten $\bar{S}$, $\bar{T}$, $\bar{R}$ heb ik daarin niet opgenomen omdat ze snel vervangen worden door formules.

Verder definieert Mayer $\angle \Upsilon TS = s$, de ware eclipticale lengte van de zon, en $\angle STA = \omega = \phi - s$.[11] De krachten $\bar{S}$, $\bar{T}$, en $\bar{R}$ waaraan de maan onderhevig is, volgen uit de gravitatiewet van Newton:

$$\begin{aligned}
\bar{S} &= \frac{(\text{☽} + \text{♁})\cos^3 l}{\bar{a}^2 v^2} + \frac{\odot\pi^3 v}{\bar{a}^2 u^3} + \left(\frac{\odot\pi^2}{\bar{a}^2 y^2} - \frac{\odot\pi^2 y}{\bar{a}^2 u^3}\right)\cos\omega, \\
\bar{T} &= -\left(\frac{\odot\pi^2}{\bar{a}^2 y^2} - \frac{\odot\pi^2 y}{\bar{a}^2 u^3}\right)\sin\omega, \\
\bar{R} &= \frac{(\text{☽} + \text{♁})\tan l\cos^3 l}{\bar{a}^2 v^2} + \frac{\odot\pi^3 v\tan l}{\bar{a}^2 u^3}.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

De moderne afleiding daarvan gaat als volgt[12]. Newtons tweede wet beschrijft de beweging van een massa m_i met plaatsvector $\boldsymbol{r}_i$ onder invloed van een kracht $\boldsymbol{F}$:

$$m_i \frac{d^2\boldsymbol{r}_i}{dt^2} = \boldsymbol{F}.$$

De gravitatiekracht die een massa m_j met plaatsvector $\boldsymbol{r}_j$ uitoefent op een massa m_i is

$$\boldsymbol{F} = -G\frac{m_i m_j}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|^2}\boldsymbol{e}_{ij},$$

waarin $\boldsymbol{e}_{ij}$ de eenheidsvector gericht van lichaam j naar lichaam i is. Door keuze van geschikte eenheden bereiken we dat $G = \frac{1}{2}$. De bewegingsvergelijking voor de maan, onder invloed van de aantrekking door de aarde en de zon, is dan

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}_{\text{☽}}}{dt^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{m_{\text{♁}}}{|\boldsymbol{r}_{\text{♁}} - \boldsymbol{r}_{\text{☽}}|^2}\boldsymbol{e}_{\text{☽♁}} + \frac{m_\odot}{|\boldsymbol{r}_\odot - \boldsymbol{r}_{\text{☽}}|^2}\boldsymbol{e}_{\text{☽}\odot}\right).$$

Voor de aarde hebben we

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}_{\text{♁}}}{dt^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{m_{\text{☽}}}{|\boldsymbol{r}_{\text{☽}} - \boldsymbol{r}_{\text{♁}}|^2}\boldsymbol{e}_{\text{♁☽}} + \frac{m_\odot}{|\boldsymbol{r}_{\text{♁}} - \boldsymbol{r}_\odot|^2}\boldsymbol{e}_{\text{♁}\odot}\right).$$

De beweging van de maan ten opzichte van de aarde volgt uit het verschil:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2(\boldsymbol{r}_{\text{☽}} - \boldsymbol{r}_{\text{♁}})}{dt^2} = -\frac{1}{2}\Bigg(&\frac{m_{\text{☽}} + m_{\text{♁}}}{|\boldsymbol{r}_{\text{☽}} - \boldsymbol{r}_{\text{♁}}|^2}\boldsymbol{e}_{\text{☽♁}} \\
&+ \frac{m_\odot}{|\boldsymbol{r}_{\text{☽}} - \boldsymbol{r}_\odot|^2}\boldsymbol{e}_{\text{☽}\odot} - \frac{m_\odot}{|\boldsymbol{r}_{\text{♁}} - \boldsymbol{r}_\odot|^2}\boldsymbol{e}_{\text{♁}\odot}\Bigg).
\end{aligned} \tag{5.5}$$

[11] Als de maan in de ecliptica bewoog dan zou ω de hoekafstand tussen de zon en maan zijn, dus de *maansafstand* waarnaar men op zoek was in de navigatie.

[12] In het volgende stukje komen ♁, $\odot$, en ☽ voor als indexsymbolen. De moderne vectornotatie is zo krachtig dat ik die tot zijn recht wil laten komen, en dan heb ik indices nodig voor de plaatsvectoren van de hemellichamen. Hergebruik lijkt me begrijpelijker dan invoer van nieuwe symbolen.

De betekenis van het rechterlid is als volgt. De eerste term beschrijft de beweging van de maan onder invloed van uitsluitend de aardse aantrekking. Wiskundig gezien kunnen we blijkbaar de maan opvatten als een massaloos punt dat om de aarde met massa $m_{♁} + m_{☽}$ draait. De tweede en derde term stellen samen het verschil in aantrekking van de zon op de maan en op de aarde voor. Dit verschil veroorzaakt een storing in de maanbaan.

Bij Mayer vinden we (5.5) ontbonden in drie componenten: radiaal (langs AT), tangentiaal (loodrecht op AT en in de ecliptica), en axiaal (langs LA). Dat zijn de krachten $\bar{S}$, $\bar{T}$, en $\bar{R}$. Als we de eenheidsvectoren ontbinden krijgen we (onder verwaarlozing van het kleine verschil in lengte van SL en SA):

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_{☽♁} &= \Big(\cos l, \quad 0, \quad \sin l\Big) \\
\boldsymbol{e}_{☽\odot} &= \left(\frac{\pi v}{u}\cos l - \frac{y}{u}\cos\omega, \quad \frac{y}{u}\sin\omega, \quad \frac{av\tan l}{au/\pi}\right) \\
\boldsymbol{e}_{♁\odot} &= \Big(-\cos\omega, \quad \sin\omega, \quad 0\Big)
\end{aligned}
$$

Als we dit invullen in (5.5) vinden we de drie vergelijkingen (5.4), op één factor $\cos l$ in $\boldsymbol{e}_{☽\odot}$ na, die Mayer blijkbaar 1 gesteld heeft. Omdat l ten hoogste ongeveer $5°$ is, ontstaat daardoor maar een kleine fout.

5.1.3 Tijd

In de vergelijkingen (5.3) komt de tijd voor in de differentiaal dt^2. Het is in deze context natuurlijker tijd uit te drukken in eclipticale lengte van hetzij de zon, hetzij de maan. Daardoor komt de baan (van de zon of de maan) als basisgegeven naar voren. Aangezien we de positie van de maan aan het berekenen zijn ligt het het meest voor de hand om de lengte van de maan te gebruiken. Stel daarom q de middelbare lengte van de maan en n de verhouding van de omlooptijden van de maan en de zon[13]. $\frac{dq}{dt}$ is dan de gemiddelde hoeksnelheid van de maan (en evenredig met t), en $n\,\frac{dq}{dt}$ is de gemiddelde hoeksnelheid van de zon. Uit de oplossing van het *twee*lichamenprobleem[14] van de zon en de aarde volgt

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{\odot + ♁}{n^2(\bar{a}/\pi)^3},$$

of in Mayers woorden[15]:

> "...gesteld dat de gemiddelde beweging van de maan die met tijdstukje dt overeenkomt $= dq$, en de verhouding van die tot de gemiddelde

[13]Mayer definieert dat als $\bar{n}$; en hij definieert n door $n^2 = \frac{\odot\bar{n}^2}{\odot + ♁}$. Daar de massa ♁zo klein is ten opzichte van $\odot$, is $\bar{n} \approx n$, en Mayer gebruikt de twee door elkaar.

[14]Zie bijvoorbeeld [Sma56, §64].

[15][May67, p. 5].

beweging van de zon $1 : n$,

$$\frac{1}{2}dt^2 = \frac{\bar{a}^3 n^2 dq^2}{\pi^3(\odot + \mathfrak{d})}.\text{”} \tag{5.6}$$

Merk op dat q door de differentiaalvergelijking zonder beginwaarde niet volledig gedefinieerd is; op pagina 78 zal blijken dat $q = 0$ als $\phi = 0$.

5.1.4 Elimineren van u

In de uitdrukkingen voor de krachten (5.4) komt een factor u^{-3} voor. u is op een constante na de zijde SL van de rechthoekige driehoek $\triangle SLA$ in figuur 5.1. Mayer gaat nu u elimineren uit de vergelijkingen. Hij heeft

$$|SL| = \sqrt{|SA|^2 + (\bar{a}v \tan l)^2},$$

waarin met de cosinusregel

$$|SA|^2 = (\bar{a}v)^2 + \left(\frac{\bar{a}y}{\pi}\right)^2 - 2\frac{\bar{a}^2 vy}{\pi}\cos\omega,$$

en omdat $1 + \tan^2 l = \dfrac{1}{\cos^2 l}$:

$$|SL| = \sqrt{\frac{\bar{a}^2 v^2}{cos^2 l} + \frac{\bar{a}^2 y^2}{\pi^2} - 2\frac{\bar{a}^2 vy}{\pi}\cos\omega}$$

zodat

$$u = \sqrt{y^2 + \frac{v^2\pi^2}{\cos^2 l} - 2yv\pi\cos\omega}. \tag{5.7}$$

Mayers bewegingsvergelijkingen zijn vrijwel identiek aan die van Euler voor het probleem van de storingen in de banen van Jupiter en Saturnus, maar in dit deel van de afleiding heeft Mayer het een stuk makkelijker. Als we aannemen dat $l = 0$, dat wil zeggen als we de kleine helling van de maanbaan ten opzichte van de ecliptica verwaarlozen, dan kunnen we (5.7) herleiden tot

$$u^{-3} = K(1 - h\cos\omega)^{-3/2},$$

met $K = (y^2 + v^2\pi^2)^{-3/2}$ en $h = 2v\pi y/(y^2 + v^2\pi^2)$. Omdat de banen van de planeten en de maan een kleine excentriciteit hebben zijn K en h nagenoeg constant. In Eulers probleem is $h \approx 0.85$, zodat u^{-3} zeer sterk fluctueert, terwijl in Mayers probleem $h \approx 0.005$ zodat u^{-3} zich veel rustiger gedraagt. We zien hierin terug dat de afstand tussen Jupiter en Saturnus sterk varieert, terwijl de afstand van de maan tot de zon steeds ongeveer gelijk blijft.

Mayer kan hierdoor al met een paar termen uit de Taylorontwikkeling van $(1-z)^{-3/2}$ rond $z=0$ volstaan om u^{-3} te benaderen, terwijl in Eulers geval die ontwikkeling veel te langzaam convergeert om praktische waarde te hebben. De berekening laat ik achterwege. Mayer verwaarloost termen van orde $\pi^2 \approx 10^{-5}$.

5.2 Herformuleren van de vergelijkingen

5.2.1 Balans opmaken

Nadat de substituties uit §5.1.3 en §5.1.4 doorgevoerd zijn, zien de op te lossen bewegingsvergelijkingen er zo uit, in moderne notatie[16]:

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2v}{dq^2} - v\Big(\frac{d\phi}{dq}\Big)^2 &= -X \\
&= -\frac{g\cos^3 l}{v^2} + \frac{n^2 v}{2y^3} + \frac{3n^2 v\cos 2\omega}{2y^3} + \frac{9\pi n^2 v^2\cos\omega}{8y^4} \\
&\qquad\qquad + \frac{15\pi n^2 v^2 \cos 3\omega}{8y^4}, \qquad (5.8)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2\,\frac{dv}{dq}\,\frac{d\phi}{dq} + v\,\frac{d^2\phi}{dq^2} &= -Y \\
&= -\frac{3n^2 v\sin 2\omega}{2y^3} - \frac{3\pi n^2 v^2 \sin\omega}{8y^4} - \frac{15\pi n^2 v^2\sin 3\omega}{8y^4}, \qquad (5.9)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2(v\tan l)}{dq^2} &= -Z\tan l \\
&= -\Big(\frac{g\cos l^3}{v^2} + \frac{n^2 v}{y^3} + \frac{3\pi n^2 v^2\cos\omega}{8y^4}\Big)\tan l. \qquad (5.10)
\end{aligned}
$$

De rechterkanten geven we kortheidshalve aan met resp. $-X$, $-Y$, en $-Z\tan l$. Zij stellen de krachten voor die op de maan werken, en zij zijn afhankelijk van de maancoördinaten v, ϕ, en l waarvan de differentialen aan de linkerkant staan.

De krachten omvatten wel de direkte effecten van de aantrekking van de zon en de aarde (dit is in de moderne literatuur het hoofdprobleem (*main problem*) van de maan), maar niet het effect van de afplatting van de aarde. Mayer was zich ervan bewust dat de aantrekking die de maan uitoefent op de equatoriale bult van de aarde verantwoordelijk is voor de nutatie, een schommeling in de stand van de aardas met een periode die gelijk is aan één rondgang van de knopenlijn van de maan langs de ecliptica, dat is ongeveer 18 jaar. Als de maan dat effect op de aarde heeft, dan moet er een wederkerig

[16] g is een dimensieloze constante die verder niet van belang is; zie tabel 5.3.

effect van de aarde op de maan zijn, zo redeneerde hij[17]. Ook de storingen die andere planeten veroorzaken zijn niet in deze theorie opgenomen; die hebben vooral een indirekt effect (zie §3.9 over seculaire versnelling).

Het belangrijkste verschil met het tweelichamenprobleem is gelegen in de extra termen in X en Y die de aantrekking door de zon voorstellen: het zijn precies de termen waarin y voorkomt. Het zijn kleine termen omdat ze allemaal $n^2 \approx 0,0055$ als factor hebben (terwijl van de overige factoren geen enkele buitensporig groot wordt). Vergelijking (5.10) is in het tweelichamenprobleem niet nodig, immers de beweging blijft dan in een vlak, en we kunnen de coördinaten zo kiezen dat $l = 0$.

5.2.2 Transformeren

Vergelijking (5.9) is integreerbaar en beschrijft dan de verandering van het impulsmoment ☽$v^2 \frac{d\phi}{dt}$, onder invloed van het deel van de kracht dat niet centraal gericht is. Het impulsmoment is constant voor centrale krachten; in het tweelichamenprobleem (als $Y = 0$) is dat feitelijk wat (5.9) beschrijft. Meer algemeen is het één van de constanten van beweging die ik op pagina 38 genoemd heb. Dit idee was in de 18e eeuw een bron van inspiratie. Hieronder bespreek ik eerst de transformatie waaraan Mayer de bewegingsvergelijkingen onderwerpt. Vervolgens toon ik een overeenkomst aan met de theorie van Clairaut.

Mayer vermenigvuldigt (5.9) met $v\,dq$ (een integrerende factor, zeggen wij; fysisch stelt het de infinitesimale verplaatsing van de maan langs haar baan voor). Tegenwoordig vermijden we losse differentialen liever en daarom vermenigvuldigen we met v. De linkerkant gaat dan over in

$$2v\,\frac{dv}{dq}\,\frac{d\phi}{dq} + v^2\,\frac{d^2\phi}{dq^2} = \frac{d}{dq}\Big(v^2\frac{d\phi}{dq}\Big),$$

gevolgd door integratie:

$$v^2\,\frac{d\phi}{dq} = \epsilon - \int^q Y v\,dq, \tag{5.11}$$

waarin ϵ een constante van integratie is[18]. Mayer definieert vervolgens:

$$x = \frac{1}{v}, \qquad \frac{dp}{dq} = \epsilon x^2, \qquad P = \int^q Y v\,dq = \int^p \frac{Y}{\epsilon x^3}\,dp. \tag{5.12}$$

[17] Brieven van Mayer aan Euler 15 november 1751 en 6 januari 1752, [For71]. In de laatste brief zegt Mayer dat hij de invloed van de afplatting op de parallax van de maan heeft berekend, en hij vraagt zich af hoe de invloed op de lengte te berekenen zou zijn.

[18] Bij Mayer staan de integralen zonder bovengrens. Hij zegt dat ϵ een constante is, zodanig dat de integraal verder geen constante term oplevert. Ik denk dat de formulering met bovengrens daar de moderne weergave van is. Het betekent dat we P en de integraal opvatten als een funktie die we moeten evalueren in het punt q (resp. p). Substitutie van p moet natuurlijk ook plaatsvinden in Yv.

p is niet volledig gedefinieerd, net zo min als q volledig gedefinieerd is door (5.6). Op pagina 78 zal blijken dat $p = 0$ als $q = 0$.

De definitie van $\dfrac{dp}{dq}$ is erop toegesneden om ϕ te isoleren in (5.11):

$$\frac{d\phi}{dp} = 1 - \frac{P}{\epsilon}. \tag{A}$$

Deze vergelijking beschrijft de relatie tussen de ware lengte van de maan, en de zojuist ingevoerde p. P voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$\frac{dP}{dp} - \frac{Y}{\epsilon x^3} = 0. \tag{B}$$

Met de definities (5.12) heeft Mayer de tweede-orde differentiaalvergelijking (5.9) vervangen door de twee eerste-orde vergelijkingen (A) en (B). De vergelijkingen (5.8) en (5.10) drukt hij vervolgens ook uit in de nieuwe variabelen. (5.8) komt te luiden:

$$\frac{d^2x}{dp^2} + x - \frac{X}{\epsilon^2 x^2} - \frac{2Px}{\epsilon} + \frac{P^2 x}{\epsilon^2} = 0 \tag{C}$$

Daarvoor is onder andere de tweede afgeleide $\dfrac{d^2v}{dq^2}$ nodig, een mooi voorbeeld van het gebruik van tweede-orde differentialen, zoals besproken in §3.5. Daarom laat ik hier zien hoe dat gaat. Mayer schrijft $\dfrac{d^2v}{dq^2}$ als

$$\frac{ddv}{dq^2} = \frac{1}{dq}\, d\,\frac{dv}{dq}$$

waarin dq constant, "omdat er een differentiaal constant gehouden moet worden"[19]. Uit de definities (5.12) volgt

$$dv = -\frac{dx}{x^2}, \qquad\qquad \frac{dv}{dq} = -\epsilon\,\frac{dx}{dp}$$

(merk op dat hij de kettingregel toepast) en voor de tweede keer differentiëren kiest hij dp constant:

$$d\,\frac{dv}{dq} = -\epsilon\,\frac{ddx}{dp}, \qquad\qquad \frac{1}{dq}\, d\,\frac{dv}{dq} = -\epsilon^2 x^2\,\frac{ddx}{dp^2}$$

De rest van de afleiding van (C) is eenvoudig en laat ik achterwege. De derde vergelijking (5.10) pakt hij op dezelfde manier aan; dat resulteert in

$$x\,\frac{d^2 \tan l}{dp^2} - \tan l\,\frac{d^2x}{dp^2} + \frac{Z \tan l}{\epsilon^2 x^2} = 0.$$

[19] [May67, p. 7].

Mayer ziet dat het voordelig is om (C) met $\tan l$ te vermenigvuldigen en bij de laatste vergelijking op te tellen, en het resultaat te delen door x. Hij krijgt dan

$$\frac{d^2 \tan l}{dp^2} + \tan l + \frac{(Z-X)\tan l}{\epsilon^2 x^3} - \frac{2P\tan l}{\epsilon} + \frac{P^2 \tan l}{\epsilon^2} = 0 \tag{D}$$

"...welke vergelijking geheel op de eerste lijkt, en ook op dezelfde manier opgelost zal worden"[20]. Er wordt wel eens gezegd dat efficiëntie een kenmerk van goede wiskunde is. Ik vind dit een mooi voorbeeld van efficiëntie.

5.2.3 Vergelijken met Clairaut

Laten we nu de transformatie van Mayer vergelijken met Clairauts methode, zoals ik beloofd heb. Clairaut heeft de volgende vergelijkingen voor de beweging van een lichaam in een vlak onderhevig aan krachten in dat vlak[21]:

$$v\,d\phi^2 - d^2 v = \Sigma\,dt^2, \tag{5.13}$$

$$v\,d^2\phi + 2\,dv\,d\phi = \Pi\,dt^2, \tag{5.14}$$

waarin v en ϕ als bij Mayer de poolcoördinaten van het lichaam in kwestie zijn. Π en Σ zijn de componenten van de krachten loodrecht op, respectievelijk langs de plaatsvector. Deze vergelijkingen zijn analoog aan (5.8) en (5.9) bij Mayer. Het verschil tussen q en t is slechts een constante factor. Clairaut vermenigvuldigt (5.14) met $\dfrac{v}{dt}$ en integreert[22], zodat hij krijgt

$$v^2 \frac{d\phi}{dt} = f + \int \Pi v\,dt, \tag{5.15}$$

waarin f een integratieconstante. Dit is dezelfde stap die Mayer doet in (5.11). Clairaut vermenigvuldigt (5.15) met $\Pi v\,dt$ en integreert een tweede keer, zodat hij krijgt:

$$\int \Pi v^3\,d\phi = f\int \Pi v\,dt + \frac{1}{2}\left(\int \Pi v\,dt\right)^2.$$

Door rechts van het gelijkteken kwadraat afsplitsen, gevolgd door worteltrekken, krijgt hij

$$f + \int \Pi v\,dt = \sqrt{f^2 + 2\int \Pi v^3\,d\phi}. \tag{5.16}$$

[20] [May67, p. 8].

[21] Ik bespreek hier Clairauts werk aan de hand van [Wil80, pp. 134–136].

[22] Clairaut was de eerste die deze truc toepaste en Euler leerde het van hem [Wil80, p. 134, noot 256]. Mayer kwam eerder in aanraking met de geschriften van Euler dan met die van Clairaut, maar in de tijd dat hij de *Theoria Lunæ* schreef had hij kennis genomen van beide. Het is dus zeer wel mogelijk dat Mayer is beïnvloed door Clairaut.

Dit substitueert hij in (5.15):

$$v^2 \frac{d\phi}{dt} = \sqrt{f^2 + 2\int \Pi v^3 \, d\phi}$$

zodat

$$dt = \frac{v^2 \, d\phi}{f\sqrt{1+2\rho}} \tag{5.17}$$

waarin

$$\rho = \frac{1}{f^2} \int \Pi v^3 \, d\phi.$$

Dit resultaat gebruikt Clairaut om de tijd te elimineren uit (5.13), maar waar het mij nu om te doen is, is om de zojuist beschreven stappen van Clairaut te vergelijken met die van Mayer. Oppervlakkig gezien gaan de wegen die Clairaut en Mayer bewandelen uiteen na de eerste integratie.

Ik heb gevonden dat er meer overeenkomst is dan op het eerste gezicht lijkt. Clairauts $\sqrt{1+2\rho}$ komt overeen met $1 - \frac{P}{\epsilon}$ bij Mayer, en $\frac{d\phi}{\sqrt{1+2\rho}}$ komt overeen met dp. We zien dit in met behulp van (5.17). Enerzijds volgt daaruit dat

$$\frac{v^2 \, d\phi}{dt} = f\sqrt{1+2\rho},$$

waar bij Mayer geldt

$$\frac{v^2 \, d\phi}{dq} = \epsilon - P,$$

waaruit gemakkelijk de overeenkomst tussen $\sqrt{1+2\rho}$ en $1 - \frac{P}{\epsilon}$ naar voren komt. Anderzijds volgt uit (5.17) dat

$$\frac{d\phi}{\sqrt{1+2\rho}} = \frac{f \, dt}{v^2},$$

waarvan de rechterkant bij Mayer $\epsilon x^2 \, dq$ is, overeenkomend met diens definitie van dp.

Mayer bereikt met zijn definitie van dp dus hetzelfde als Clairaut met de tweede integratie. Dat Clairaut een keer méér integreert en toch een vergelijkbaar resultaat krijgt, komt omdat hij de tweede integratie terugsubstitueert in de eerste.

5.2.4 Het plan

Met de definities (5.12) heeft Mayer de vergelijkingen (5.8)–(5.10) opnieuw geformuleerd als (A)–(D):

$$\frac{d\phi}{dp} = 1 - \frac{P}{\epsilon} \tag{A}$$

$$\frac{dP}{dp} - \frac{Y}{\epsilon x^3} = 0 \tag{B}$$

$$\frac{d^2x}{dp^2} + x - \frac{X}{\epsilon^2 x^2} - \frac{2Px}{\epsilon} + \frac{P^2 x}{\epsilon^2} = 0 \tag{C}$$

$$\frac{d^2 \tan l}{dp^2} + \tan l + \frac{(Z - X)\tan l}{\epsilon^2 x^3} - \frac{2P\tan l}{\epsilon} + \frac{P^2 \tan l}{\epsilon^2} = 0 \tag{D}$$

waarbij p voldoet aan

$$\frac{dq}{dp} = \frac{1}{\epsilon x^2}. \tag{E}$$

Het grote voordeel van deze formulering boven de oorspronkelijke (5.8)–(5.10) is dat de differentialen van de coördinaten x, ϕ, en l gescheiden zijn. Laten we een blik werpen op het plan van aanpak dat Mayer in gedachten heeft, vooruitlopend op een meer gedetailleerde bespreking.

Mayer neemt, modern gezegd, p als onafhankelijke variabele. Hij veronderstelt dat x en $\frac{dP}{dp}$ zijn uit te drukken in de volgende reeksen:

$$x = 1 - A\cos\alpha p - B\cos\beta p - C\cos\gamma p - \ldots, \tag{5.18}$$

$$\frac{dP}{dp} = a\sin\alpha p + b\sin\beta p + c\sin\gamma p + \ldots. \tag{5.19}$$

(5.19) integreert hij eenmaal, de resulterende cosinusreeks voor P substitueert hij in (A), waarna hij die ook integreert. Dan heeft hij dus een reeks voor ϕ en een reeks voor x, waarin nog de coëfficiënten bepaald moeten worden: A, B, C, ... uit (C), a, b, c, ... uit (B), en α, β, γ, ... uit beide. Alle termen in (B) en (C), dus ook de termen in X en Y, moeten daarom worden ontwikkeld in p. De onafhankelijke variabele p is echter niet bruikbaar om voor willekeurige tijdstippen de positie van de maan te berekenen, omdat er geen eenvoudige relatie tussen p en tijd bestaat. Daarom geeft Mayer de oplossing uiteindelijk met q als onafhankelijke variabele; p verlaat het strijdperk na integratie van (E) en reeksinversie.

Als rechtvaardiging voor het aannemen van de reeksen (5.18) en (5.19) zegt hij[23]:

[23] [May67, p. 9].

> "Dat die uitdrukkingen met de waarden van de grootheden voor x en $\frac{dP}{dp}$ overeenkomen is duidelijk enerzijds uit de aard van het probleem, anderzijds doordat die vergelijkingen volstaan om de afzonderlijke willekeurige grootheden A, B, ... te bepalen, en doordat geen term van een andere vorm dan $A\cos\alpha p$, $a\sin\alpha p$, ... erin een plaats heeft, zoals zeer wel zal worden geweten nadat de oplossing is vastgesteld."

'De aard van het probleem' slaat volgens mij daarop, dat X voornamelijk uit termen $\cos n\omega$ bestaat, en Y uit termen $\sin n\omega$, zodat uitwerken van (A) en (C) cosinustermen oplevert, en uitwerken van (B) sinustermen. De reeksen die Mayer veronderstelt sluiten daarbij aan. Daarmee is ook aangegeven waarom Mayer een cosinusreeks voor x en een sinusreeks voor $\frac{dP}{dp}$ kiest.

De reeksen zijn geschikt om bijna-periodieke beweging zoals van de maan te benaderen, namelijk als de coëfficiënten α, β, ... incommensurabel zijn. Uiteindelijk krijgen de coëfficiënten een numerieke waarde met eindige precisie, waardoor ze commensurabel zijn, en waardoor de benadering van de oplossing alsnog in een periodieke vorm verschijnt. Ik weet niet of Mayer en de zijnen zich realiseerden dat incommensurabele coëfficiënten niet-periodieke oplossingen voorstellen. In verband daarmee komt de vraag op of zij op zoek waren naar een periodieke of naar een niet-periodieke oplossing van het probleem. Een grondiger studie van alle originele bronnen zou daar misschien antwoord op kunnen geven. Uit wat ik gezien heb maak ik op dat men vooral bezig was de verschillende storingen op een periodieke, elliptische, Keplerse baan te vinden. De storingen afzonderlijk waren volgens hen hetzij periodiek, hetzij immer toenemend (seculair) zoals de seculaire versnelling; en van de seculaire storingen vermoedde men dat ze wel eens extreem langperiodiek konden zijn[24]. Over de periodiciteit van de *samenstelling* van de storingen ben ik geen expliciete uitspraken tegengekomen. Ik zie wel twee aanwijzingen, waarvan de strekking in *dit* verband me niet helemaal duidelijk is: a) Halleys op de Sarosperiode gebaseerde correcties wijzen op een geloof in een periodieke baan (het denkbeeld dat de storingen zich herhalen na een Sarosperiode was overigens wel omstreden); en b) Eulers herhaalde opmerkingen dat een maan die veel verder van de aarde staat een ondoorgrondelijke baan zou volgen, wijzen erop dat de mogelijkheid van niet-periodieke oplossingen misschien bij hem was opgekomen. Ik durf er geen uitspraak over te deden in hoeverre niet-periodieke bewegingen aan de hemel *aanvaardbaar* waren. Ik vind het wel veelbetekenend dat Lagrange en Laplace aan het eind van de eeuw onderzoek doen naar de stabiliteit van het zonnestelsel.

Mayer en zijn tijdgenoten hadden niet de middelen om een theoretische verantwoording van hun technieken te geven, noch om aan te geven op welke tijdschaal de benaderingen bruikbaar waren. Moderne inzichten in

[24]Euler bijvoorbeeld vermoedde zulks voor een storing in de scheefheid van de ecliptica [Wil80, pp. 131–133].

tijdschalen zijn ontwikkeld in de perturbatietheorie bij het onderzoek van dynamische systemen[25]. Daarnaast is het bekend dat met voorstellingen van funkties door *divergente* reeksen onder bepaalde omstandigheden zeer goede benaderingen kunnen worden berekend. Op convergentie en integratie van reeksen en op het bepalen van de coëfficiënten kom ik terug in §5.3.

Nog even iets over vergelijking (D): l komt op slechts één plaats voor in de andere vergelijkingen (namelijk als $\cos l$ in de eerste term van X). Mayer zegt dat hij op die plaats een benadering van l gebruikt in plaats van de oplossing van (D); zo maakt hij het oplossen van die vergelijking een losstaand probleem dat kan wachten tot de andere zijn opgelost. Dat is in overeenstemming met de manier waarop Mayers maantheorie gegroeid is: hij kon de breedte pas berekenen in de zomer van 1753, nadat hij al tabellen voor de lengte van de maan had opgesteld (zie p. 56). Overigens bevat de genoemde benadering nagenoeg even veel termen als de uiteindelijke oplossing van (D), zodat ik me afvraag wat hier werkelijk gebeurd is. Mayer zegt dat hij de benadering uit eerdere berekeningen heeft, zonder dat hij aangeeft wat of hoe. Ik kan me voorstellen dat hij eerst een minder nauwkeurige benadering gebruikt heeft en een of meer iteraties heeft uitgevoerd.

Omdat $\tan l$ wordt beschreven door vergelijking (D) die van exact dezelfde vorm is als (C) zullen we ons met de bepaling van l niet verder bezighouden.

5.3 Het plan uitwerken

Wiskunde is 1% inspiratie en 99% transpiratie. Het uitwerken en integreren van (A)–(E) en (5.18), (5.19) beslaat ruim een derde van de *Theoria Lunæ*, het oplossen van de vergelijkingen en de bepaling van de constanten daarin nog eens een kwart. En dat terwijl Mayer de meeste berekeningen weglaat. We vinden vooral lange opsommingen van termen in reeksen. Als alle substituties gedaan zijn noemt Mayer 122 cosinustermen van de reeksontwikkeling van (C) en 68 sinustermen van die van (B). Ik geef hieronder de grote lijn weer en ik bespreek enkele meer technische aspecten van Mayers werk.

5.3.1 Integraties

Er zijn drie integraties uit te voeren, te weten (A), (5.19), en (E). Vergelijkingen (B) en (C) hoeven niet geïntegreerd omdat zij alleen gebruikt worden om de coëfficiënten te bepalen, waarop ik later terugkom. In totaal (met inbegrip van de integratie (5.11)) doet Mayer dus vier integraties om de twee tweede-orde differentiaalvergelijkingen (5.8) en (5.9) op te lossen, wat te verwachten was. Er moeten vier integratieconstanten verschijnen waarvan de waarden niet uit de wiskundige oplossing van het probleem vallen af

[25]Zie daarvoor [Ver90, hst. 11].

te leiden; zij moeten bepaald worden uit waarnemingen aan de maan.

Vergelijkingen (A), (5.19), en (E) integreert Mayer term voor term, de laatste nadat hij $\frac{1}{\epsilon x^2}$ heeft ontwikkeld in een cosinusreeks. Term voor term integreren is gerechtvaardigd als de reeksen uniform convergent zijn[26]. Daarvoor is het voldoende als de reeksen voldoen aan de Weierstrasstest: (5.19) voldoet daaraan als $|a| + |b| + |c| + \dots$ convergeert. Of dat het geval is valt a priori niet te beoordelen. Mayer maakt zich er helemaal niet druk om. De integratie van (5.19) levert op:

$$-P = \frac{a}{\alpha}\cos\alpha p + \frac{b}{\beta}\cos\beta p + \frac{c}{\gamma}\cos\gamma p + \dots \tag{5.20}$$

zonder constante term (zie de opmerking na (5.11), pagina 71). Vervolgens geeft integratie van (A):

$$\phi = p + \frac{a}{\alpha^2\epsilon}\sin\alpha p + \frac{b}{\beta^2\epsilon}\sin\beta p + \frac{c}{\gamma^2\epsilon}\sin\gamma p + \dots. \tag{5.21}$$

Dat Mayer hier geen constante term bijzet onthult dat hij impliciet gesteld heeft dat $p = 0$ als $\phi = 0$. De Weierstrasstest betekent hier dat $|\frac{a}{\alpha}| + |\frac{b}{\beta}| + |\frac{c}{\gamma}| + \dots$ moet convergeren. Dat zal geen extra beperking zijn als de rij α, β, γ, ... een strikt positieve ondergrens heeft, wat zou betekenen dat er geen storingen met onbegrensd lange periode optreden.

Voor de integratie van (E) heeft Mayer de ontwikkeling van x^{-2} nodig. Hoe hij daaraan komt laat ik verderop zien. Het eindresultaat is van de vorm

$$\begin{aligned} q = p &+ \tfrac{2A+3A^3+6AB^2+6AC^2}{\alpha\epsilon}\sin\alpha p + \tfrac{3A^2+5A^4}{4\alpha\epsilon}\sin 2\alpha p + \tfrac{A^3}{3\alpha\epsilon}\sin 3\alpha p + \\ &\tfrac{3AB}{(\alpha\pm\beta)\epsilon}\sin(\alpha\pm\beta)p + \tfrac{3A^2B}{(2\alpha\pm\beta)\epsilon}\sin(2\alpha\pm\beta)p + \dots, \end{aligned} \tag{5.22}$$

waarbij in de termen de coëfficiënten cyclisch verwisselbaar zijn, dat wil zeggen $(A, a, \alpha) \to (B, b, \beta) \to (C, c, \gamma) \to (A, a, \alpha)$. Ook hier geeft Mayer geen constante term, wat aanduidt dat $q = 0$ als $p = 0$.

Waar zijn de vier integratieconstanten? Slechts één, namelijk ϵ, kunnen we aanwijzen, de andere drie zijn verdwenen in de impliciete relaties tussen ϕ en de hulpvariabelen P, p, q. Dit punt zal gedeeltelijk worden opgehelderd in §5.3.3.

5.3.2 Ontwikkelen van de overige termen

De factoren van de termen in (B) en (C) zijn: constanten, $\cos^3 l$, x^{-k}, y^{-k}, $\sin k\omega$, en $\cos k\omega$, voor een aantal waarden van k. Mayer drukt de factoren elk uit in reeksen, als funktie van p (modern gezegd). De zo verkregen

[26] Alle Fourierreeksen zijn termsgewijs te integreren, maar daar hebben we hier niets aan, omdat de reeksen geen Fourierreeksen hoeven te zijn.

reeksen en ook (5.20) en de tweemaal gedifferentieerde (5.18) substitueert hij in (B) en (C), en hij vermenigvuldigt en sommeert de gesubstitueerde reeksen termsgewijs; dat gaat goed als de reeksen absoluut convergent zijn[27].

Hieronder geef ik weer hoe Mayer de factoren x^{-2} en y^{-3} ontwikkelt. Hij heeft niet de beschikking over de moderne $\sum$-notatie voor reeksen. Ik denk niet dat dat een handicap is, want toen ik probeerde de ingewikkelde uitdrukkingen die we hieronder zullen tegenkomen, met de moderne notatie af te leiden, raakte ik al gauw verstrikt in een oerwoud van indices. Mayer rekent met afgekapte reeksen en hij merkt op dat de overige termen verwaarloosbaar klein zijn, terwijl desgewenst meer termen zijn te verkrijgen doordat hun vorm duidelijk blijkt. Hij zegt dat hij de ontwikkeling van de termen die nog met n^2 vermenigvuldigd worden, tot de tweede macht van A, B, ... uitwerkt. Dat vind ik opmerkelijk goed overeenkomen met de conclusie die Clairaut getrokken heeft nadat hij erin geslaagd was de juiste apogeumbeweging te berekenen: de kwadraten van de grootheden van dezelfde orde als de storende krachten zijn niet te verwaarlozen[28]. De storende krachten zijn $O(n^2)$, en het zal blijken dat de coëfficiënt A ongeveer even groot is als n. Toch berekent Mayer steeds één term extra om daarmee een idee van de grootte van de verwaarloosde termen te krijgen[29]. Dat vind ik enigszins misleidend want het geeft niet noodzakelijk een indruk van de *som* van de weggelaten termen; maar ja, een andere mogelijkheid heeft hij niet. Mayers omschrijving in woorden van de nauwkeurigheid van zijn uitwerking heb ik hieronder vervangen door de modernere ordesymbolen.

Ontwikkelen van x^{-2}

Stel $x = 1 - A\cos\alpha p - B\cos\beta p - C\cos\gamma p - \ldots = 1 - z$,
dan is[30] $x^{-2} = (1-z)^{-2} = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + 5z^4 + O(z^5)$.
Termsgewijs uitwerken[31] geeft

$$\begin{aligned} x^{-2} = 1 &+ \tfrac{15}{8}A^4 \\ &+ \tfrac{3}{2}A^2 + (2A + 3A^3 + 6AB^2 + 6AC^2)\cos\alpha p + (\tfrac{3}{2}A^2 + \tfrac{5}{2}A^4)\cos 2\alpha p \\ &+ \tfrac{3}{2}B^2 + (2B + 3B^3 + 6BA^2 + 6BC^2)\cos\beta p + \tfrac{3}{2}B^2\cos 2\beta p \\ &+ \tfrac{3}{2}C^2 + (2C + 3C^3 + 6CA^2 + 6CB^2)\cos\gamma p + \tfrac{3}{2}C^2\cos 2\gamma p + \end{aligned}$$

[27] Dat zegt een stelling van Cauchy, zie [WW63, §2.53]. Abels stelling [*ibid.* §3.72] stelt minder zware eisen aan de te vermenigvuldigen reeksen, maar dan moet nog aangetoond worden dat het product convergeert, en bovendien is dan nog niet gezegd dat de sommatievolgorde veranderd kan worden.

[28] "en ne négligeant pas les quarrés des quantités de même ordre que les forces perturbatrices", overgenomen van [Wil80, p. 139].

[29] [May67, §24].

[30] z is strikt kleiner dan 1, want uit ervaring weten we dat de afstand van de maan naar boven begrensd is.

[31] Zie noot 27.

$$
\begin{aligned}
&+ 3AB\cos(\alpha \pm \beta)p + 3AC\cos(\alpha \pm \gamma)p + 3BC\cos(\beta \pm \gamma)p \\
&+ A^3\cos 3\alpha p + 3A^2B\cos(2\alpha \pm \beta)p + 6ABC\cos(\alpha \pm \beta \pm \gamma)p \\
&+ B^3\cos 3\beta p + 3A^2C\cos(2\alpha \pm \gamma)p \\
&+ C^3\cos 3\gamma p + 3B^2A\cos(2\beta \pm \alpha)p \\
&+ 3B^2C\cos(2\beta \pm \gamma)p + 3C^2A\cos(2\gamma \pm \alpha)p + 3C^2A\cos(2\gamma \pm \beta)p \\
&+ \tfrac{5}{8}A^4\cos 4\alpha p + O(B^4).
\end{aligned}
$$

Met dit soort vreselijke formules vult Mayer hele pagina's. Ik beloof dat ik niet meer dan dit ene voorbeeld laat zien.

Dit is ook de reeks die Mayer gebruikt voor de integratie van (E). Voorafgaand aan de integratie doet Mayer iets waar ik lang op heb moeten kauwen voor ik het begreep. Mayer zegt[32]:

> "Door de waarde van $\dfrac{1}{x^2}$ te vermenigvuldigen met $\dfrac{dp}{\epsilon}$, zal in de eerste plaats worden verkregen, door de constante termen die van dp voorzien zijn, $= 1$ te stellen, de waarde voor ϵ uit de vergelijking $1 = \dfrac{1 + \frac{3}{2}A^2 + \frac{3}{2}B^2 + \frac{3}{2}C^2 + \frac{15A^4}{8}}{\epsilon}$."

Mijn interpretatie is deze. Splits x^{-2} in een constante term $\kappa = 1 + \frac{3}{2}A^2 + \frac{3}{2}B^2 + \frac{3}{2}C^2 + \frac{15}{8}A^4 + O(B^4)$ en een van p afhankelijk deel $f(p)$:

$$x^{-2} = \kappa + f(p).$$

Wegens (E):

$$dq = \frac{\kappa}{\epsilon}dp + \frac{1}{\epsilon}f(p)\,dp;$$

eis dat $\dfrac{\kappa}{\epsilon} = 1$ omdat je wilt dat q en p gemiddeld even snel toenemen. Dan is

$$\epsilon = \kappa = 1 + \tfrac{3}{2}A^2 + \tfrac{3}{2}B^2 + \tfrac{3}{2}C^2 + \tfrac{15}{8}A^4 + O(B^4).$$

Maar is dit wel te rijmen met Mayers opmerking na (5.11) op pagina 71, dat ϵ een constante is zodanig dat de integraal in (5.11) geen constante term bevat? Ja, want dat zegt alleen iets over de integraal en helemaal niets over ϵ, die is nog steeds een vrije integratieconstante. En kunnen we ϵ dan wel uitdrukken als boven? Ja, hierdoor brengen we de integratieconstante over op de coëfficiënten A, B, C, ...

[32] [May67, p. 11].

Ontwikkelen van y^{-3}

Iets lastiger is het om de afstand van de zon uit te drukken in de parameter p die vooral met de lengte van de maan te maken heeft. Met ς de ware anomalie en ε de excentriciteit van de zon, en de vergelijking van een ellips in poolcoördinaten, vindt Mayer:

$$\begin{aligned} y^{-1} &= \frac{1-\varepsilon\cos\varsigma}{1-\varepsilon^2} \\ &= 1+\varepsilon^2-\varepsilon\cos\varsigma+O(\varepsilon^3) \end{aligned}$$

zodat

$$y^{-3} = 1+\tfrac{9}{2}\varepsilon^2 - 3\varepsilon\cos\varsigma + \tfrac{3}{2}\varepsilon^2\cos 2\varsigma + O(\varepsilon^3).$$

Dit is voldoende nauwkeurig omdat $\varepsilon \approx 0.0168$. De ware anomalie van de zon ς drukt Mayer uit in de middelbare anomalie van de zon nq door middel van de middelpuntsverevening[33]

$$\varsigma = nq - 2\varepsilon\sin nq + \tfrac{5}{4}\varepsilon^2\sin 2nq + O(\varepsilon^3),$$

waarmee hij afleidt

$$\begin{aligned} \cos\varsigma &= \varepsilon+\cos nq-\varepsilon\cos 2nq + O(\varepsilon^2), \text{ en} \\ \cos 2\varsigma &= \cos 2nq + O(\varepsilon), \end{aligned}$$

ik neem aan door Taylorontwikkeling van $\cos\varsigma$ en $\cos 2\varsigma$ in $\varepsilon = 0$. De overgang van q op p laat ik achterwege omdat er een vervelende rekenpartij voor nodig is om, met (5.22), $\cos(nq) = \cos(np + \frac{2An}{\alpha}\sin\alpha p + \dots)$ uit te werken.

Een paar opmerkingen over het bovenstaande. In de eerste plaats veronderstelt Mayer dat de schijnbare beweging van de zon om de aarde een ongestoorde elliptische baan is, en dus dat de maan een verwaarloosbare storing daarin veroorzaakt. Dat is redelijk omdat de zon zo veel zwaarder is en zo veel verder weg staat dan de maan[34]. Dit is een belangrijk verschil tussen het probleem van de beweging van de maan en het algemene drielichamenprobleem.

[33] Zie p. 3.2. Wie, zoals ik, struikelt over het eerste minteken in de middelpuntsverevening, moet zich realiseren dat men in de 18e eeuw anomalie rekende vanaf het apogeum, terwijl men die tegenwoordig vanaf het perigeum rekent. In §5.1.3 hierboven is n gedefinieerd als de verhouding van de middelbare bewegingen van de zon en de maan.

[34] De twee redenen lijken misschien strijdig met elkaar (en voor de storing van de zon op de maan zijn ze dat ook). Maar de bewegingsvergelijking voor de zon ten opzichte van de aarde luidt in Mayers symbolen (vergelijk (5.5)):

$$-2\frac{a^2}{\pi^2}\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\odot + \text{♁}}{y^2} + \frac{☽}{y^2}\left(\frac{y^2}{u^2} - \frac{\pi^2 y^2}{v^2}\right).$$

Elimineer u met (5.7) en ontwikkel de term tussen haakjes in machten van π. Het rechterlid

De tweede opmerking heeft te maken met de faseverschillen tussen de verschillende lengtes en anomalieën, oftewel met de onderlinge stand van aarde, maan, en zon op het tijdstip dat met $p = 0$ overeenkomt. We hebben in §5.3.1 gezien dat op dat tijdstip $p = q = \phi = 0$, wat betekent dat de maan in de richting Υ staat. Dan is ook $nq = 0$ en $\varsigma = 0$. De astronomische interpretatie van $\varsigma = 0$ is dat de zon in het apogeum van haar baan staat. Verrassend is dat uit Mayers tekst[35] blijkt dat hij de anomalie en de lengte van de zon aan elkaar gelijk stelt. Daardoor staan op tijdstip $p = 0$ zon en maan beide in de richting Υ, en dat is blijkbaar het apogeum van de zonnebaan! Bovendien staat op dat moment de maan in het apogeum van haar *eigen* baan, als tenminste in eerste benadering $x = 1 - A\cos\alpha p$ (Mayer zelf identificeert A met de excentriciteit van de maanbaan). Deze stand van de hemellichamen kan worden samengevat als: Nieuwe Maan waarbij zon en maan *beide* het verst van de aarde verwijderde punt in hun baan bereikt hebben. Dit lijkt me een vrij zeldzame gebeurtenis[36].

5.3.3 Bepalen van de coëfficiënten

Mayer heeft (B) en (C) uitgewerkt, zij hebben dan de vorm

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_k K_k \cos\lambda_k p, \\ 0 &= \sum_k L_k \sin\lambda_k p. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Van de eerste heeft hij 122 termen, van de tweede 68. Om een idee te geven heb ik enkele termen samengevat in tabel 5.1. K_k en L_k zijn opgebouwd uit A, B, C, a, b, c, α, β, γ, en de constanten ϵ, ε, n, π. Mayer lijkt zo ver als mogelijk de numerieke waarden van de uitdrukkingen te berekenen. Sommige constanten hebben a priori een waarde, zoals ε, n, $r = 1 - n$, π. De waarden van de afgeleide grootheden ϵ, f, t (zij zijn afhankelijk van de onbekenden, de precieze formules doen er hier niet toe) vermeldt Mayer uit andere berekeningen die hij niet nader aangeeft.

is dan

$$\frac{\odot + \earth + \rightmoon}{y^2} + \frac{\rightmoon}{y^2}(2\pi\frac{v}{y}\cos\omega + O(\pi^2)),$$

Waarin $v/y \approx 1$. De aanwezigheid van de maanmassa in de eerste term beïnvloedt alleen de omlooptijd van de zon, en dus de constante n die proefondervindelijk bepaald wordt. De eerste term is ongeveer $\odot$, de tweede term wordt naar boven begrensd door $K\rightmoon\pi$ met K een kleine constante ($K = 3$ voldoet). De zin die de aanleiding was voor deze voetnoot beweert dat $\odot : \rightmoon\pi$ klein is; de maan heeft dus een verwaarloosbare invloed op de schijnbare beweging van de zon.

[35] [May67, p. 17].

[36] Ik heb berekend dat de situatie zich herhaalt na 1425 jaar (75 Metonische cycli), op 1.3° na, rekening houdend met de verschuiving van de apogea.

1	$A(\alpha^2 - f^2 - \frac{a^2}{4\alpha^2\epsilon^2} + \frac{15A^2n^2}{4\epsilon^2}(1+\frac{3}{2}\varepsilon^2)) + \frac{2a}{\alpha\epsilon} - \frac{Bab}{\alpha\beta\epsilon^2} - \frac{Cac}{\alpha\gamma\epsilon^2} - 86\cdot 10^{-7}$	$\cos\alpha p$
2	$B(\beta^2 - f^2 - \frac{b^2}{4\beta^2\epsilon^2}) + \frac{2b}{\beta\epsilon} - \frac{Aab}{\alpha\beta\epsilon^2} - \frac{Cbc}{\beta\gamma\epsilon^2}$	$\cos\beta p$
3	$C(\gamma^2 - f^2 - \frac{c^2}{4\gamma^2\epsilon^2}) + \frac{2c}{\gamma\epsilon} - \frac{Bbc}{\beta\gamma\epsilon^2} - \frac{Aac}{\alpha\gamma\epsilon^2}$	$\cos\gamma p$
4	$\frac{3}{2}n^2 t(1 - 2\frac{1}{2}\varepsilon^2) - 0.0003516$	$\cos 2rp$
5	$\ldots$	
7	$\frac{3}{2}n^2(+b'(1+\frac{3}{2}\varepsilon^2) + \frac{3}{2}B\frac{t}{\epsilon^2}(1 - 2\frac{1}{2}\varepsilon^2))$	$\cos(2r+\beta)p$
8	$\frac{3}{2}n^2(-b'(1+\frac{3}{2}\varepsilon^2) + \frac{3}{2}B\frac{t}{\epsilon^2}(1 - 2\frac{1}{2}\varepsilon^2))$	$\cos(2r-\beta)p$
15	$\frac{3}{2}n^2(+\frac{3}{2}B^2 + \frac{3}{2}Bb' + \frac{1}{2}b'^2 - \frac{3B^2n}{4\beta})$	$\cos(2r+2\beta)p$
25	$\frac{3}{2}n^2(+\frac{3B\varepsilon}{4} + \frac{Bn\varepsilon}{2\beta} + \frac{b'\varepsilon}{2})$	$\cos(2r+n+\beta)p$
	$\ldots$	

Tabel 5.1: Enkele termen van $\sum K_k \cos\lambda_k p$.

A krijgt de waarde van de (gemiddelde) excentriciteit van de maanbaan; die hangt niet af van de krachten en kan daarom niet uit de vergelijkingen bepaald worden, zegt Mayer (het lijkt erop dat we hier dan toch de vier integratieconstanten hebben gevonden; helemaal duidelijk vind ik het niet, door de relatie tussen ϵ en A, B, C (p. 80)). Hij merkt op dat dan $1-\alpha$ de (gemiddelde) beweging van het apogeum moet zijn, en hij zegt[37]:

> "Deze letter α moet dus beschouwd worden als onbekend en onbepaald, tenminste in deze eerste term [van $1-x = A\cos\alpha p + \ldots$]; in het overige toch, waar zij met andere r, n, i wordt gecombineerd, zal het geoorloofd zijn haar juiste waarde uit waarnemingen te veronderstellen, opdat de bepaling van de overige hoeveelheden zoveel makkelijker en preciezer uitkomt."

Hoe nu de resterende a, b, c, B, C, α, β, γ te bepalen? Voor deze acht onbekenden heeft hij twee vergelijkingen met in totaal 190 termen. Het lijkt mij dat hij op de een of andere manier gebruik moet maken van het principe dat de Fourierrepresentatie van funkties uniek is[38]:

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k\geq 1} a_k \sin kz + b_k \cos kz = 0 \quad \text{voor alle } z$$
$$\implies \quad a_k = b_k = 0 \quad \text{voor alle } k.$$

Maar bij Mayer zijn de frequenties incommensurabel zodat hij dat principe niet zonder meer kan toepassen[39]. Een voorbeeld maakt dat duidelijk. Laat

[37] De eerste-orde benadering $x = 1 - A\cos\alpha q$ in de vergelijking voor de ongestoorde maanbaan $v = x^{-1} = (1 - A\cos\alpha q)^{-1}$ leidt tot de conclusie dat αq de anomalie van de maan is, en dat $d(q-\alpha q) = (1-\alpha)\,dq$ de gemiddelde snelheid van het apogeum is. Mayer heeft dq als eenheid van tijd. Het citaat staat in [May67, p. 33].

[38] [WW63, §9.63].

[39] De omgekeerde bewering is natuurlijk wel altijd waar: als $a_k = b_k = 0$, dan is de goniometrische reeks identiek 0.

β of γ	$\log\beta$ of γ	$\log(\beta^2-f^2)$ of $\log(\gamma^2-f^2)$
$2r$	0.267265+	0.386018+
$2r+\alpha$	0.453615+	0.850338+
$2r-\alpha$	9.933916+	9.404916−
$4r$	0.568295+	...
$4r+\alpha$	...	
...		

Tabel 5.2: Het begin van de tabel in §43 van [May67]. De tekens + en − achter de logaritmische waarden slaan niet op de logaritmen maar op het getal waarvan de logaritme genomen is.

a_k de Fouriercoëfficiënten zijn van de funktie $z \mapsto \sin\sqrt{2}z$ op het interval $[-\pi,\pi]$. Definieer een nieuwe goniometrische reeks $\sum c_k \sin\omega_k z$ als volgt: $c_0 = a_0\ (=0)$, $c_1 \sin\omega_1 z = \sin\sqrt{2}z$, en voor $k \geq 1$: $c_k = a_{k-1}$, $\omega_k = k-1$. Dan is

$$\frac{1}{2}c_0 + \sum_{k\geq 1} c_k \sin\omega_k z = 0$$

maar niet $c_k = 0$ voor alle k.

De sleutel tot de oplossing moet gelegen zijn in paragraaf 43 bij Mayer, direkt nadat hij de waarde van f heeft berekend. Zonder uitleg geeft hij een tabel waarvan ik het begin in tabel 5.2 weergeef. In de linker kolom staan bijna alle frequenties λ_k uit (5.23) voor zover die vrij zijn van β en γ; hun waarde is berekenbaar, en de logaritmen ervan staan in de tweede kolom. Blijkens het bovenschrift neemt β (resp. γ) de verschillende waarden aan. In de derde kolom staat $\log(\beta^2 - f^2)$, die voorkomt in de coëfficiënt van $\cos\beta p$ (zie tabel 5.1). Daarna zegt hij[40]:

> "Het zou een slepende zaak zijn om te begrijpen, niet alleen uiterst vervelend maar ook niet makkelijk, tenzij iemand alle berekeningen uit zichzelf opstelt, als ik uiteen zou zetten met welke rekening de afzonderlijke onbepaalde hoeveelheden A, B, C, &c. a, b, c, &c. uit de hoofdvergelijkingen [(5.23)] zouden worden afgeleid. Behalve uitvoerigheid zou de methode niets nieuws en ongewoons bevatten, aangezien die in niets verschilt van het gewone bepalen van de waarden van de onbepaalde grootheden op de wijze die bekend is bij allen die in de nieuwe analyse althans licht zijn ingewijd."

Ik vermoed dat Mayer β en γ de verschillende waarden r, $r\pm\alpha$, $r\pm n$, $r\pm 2\alpha$, ..., $2r$, ... laat aannemen. Hierdoor krijgen alle frequenties in (5.23) en tabel 5.1 die gedaante. Het is dan inderdaad een slepende zaak om

[40] [May67, §45, p. 37].

de coëfficiënten van alle termen met dezelfde frequentie netjes bij elkaar te krijgen. De coëfficiënt van $\sin 2rp$ bijvoorbeeld wordt

$$\tfrac{3}{2}n^2(\epsilon^{7/3}t(1-\tfrac{5}{2}\varepsilon^2)-(bB+cC)((\tfrac{16}{\epsilon}-6)\varepsilon+(\tfrac{7}{\epsilon}+\tfrac{15}{2})\pi+20A)-20BCbc).$$

Dan zou hij α, B, C, a, b, c op kunnen lossen hetzij door deze coëfficiënten 0 te stellen (een overgedetermineerd stelsel!), hetzij door eerst nog gebruik te maken van $r \approx \alpha \approx 1$, $n \approx 0$, met welke benaderingen de frequenties gehele waarden aannemen[41].

Dat Mayer β en γ die waarden laat aannemen is als volgt te rechtvaardigen. Door de aannames (5.18) en (5.19) drukt Mayer uit dat de beweging van de maan is samengesteld uit een aantal, vooralsnog onbekende, oscillaties met frequenties α, β, γ, ... Uitwerken van (B) en (C) laat zien welke frequenties optreden door de aantrekkingskrachten van zon en maan. frequenties als $2r+\beta$, $2r+\gamma$ drukken uit dat er een wisselwerking is tussen de verschillende oscillaties in de aantrekkingskrachten. Dat die wisselwerking optreedt komt omdat de gravitatiekracht die verantwoordelijk is voor de beweging van de drie hemellichamen zélf afhankelijk is van de posities van die lichamen. Anders gezegd: aarde, maan en zon bewegen in een gravitatieveld waarvan de geometrie afhankelijk is van hun positie. Wiskundig komt dit tot uitdrukking doordat de coördinaten van maan en zon (ten opzichte van de aarde) opduiken aan de rechterkant in de bewegingsvergelijkingen (5.8)–(5.10).

Gautier[42] wijst op een groot voordeel van Mayers strategie. Van de frequenties α, β, γ in de vergelijkingen (5.18) en (5.19) heeft alleen α een duidelijke fysische betekenis. De overige twee laat Mayer aanvankelijk onbepaald. De termen waarin zij voorkomen (twee in elk van de genoemde vergelijkingen) volstaan precies om de vorm van alle wisselwerkingen af te leiden! Hier voorkomt Mayer de enorme complicaties die zich zouden voordoen als hij β en γ a priori fysische betekenis had gegeven: hij zou aan die twee niet genoeg hebben gehad, en het uitwerken van de reeksen zou gigantisch uit de hand lopen.

5.4 Slotopmerkingen

Het is niet helemaal duidelijk hoe Mayer de coëfficiënten in de vergelijkingen bepaalt, en hieronder zullen we zien dat dat er ook niet echt toe doet. Heeft

[41] Zie ook de uitleg van Mayer aan Euler per brief van 6 maart 1754 (dezelfde waarin hij de ongeëvenaarde precisie van 30″ meedeelt, zie p. 56). De passage gaat over het oplossen van de vergelijking voor de breedte; in tegenstelling tot (5.23) treedt de ware lengte van de maan als onafhankelijke variabele op. Hij zegt: "De waarden van β, γ, ... moeten gekozen worden al naar de omstandigheden; zij worden gemakkelijk verkregen. Maar α, B, C, etc. zijn bepaald als men alle termen $\sin\alpha\phi$, $\sin\beta\phi$, $\sin\gamma\phi$, etc. $=0$ stelt." [For71, pp. 82–83]. Dat maakt de zaak niet veel duidelijker want het laat in het midden hoe hij β en γ kiest.

[42] [Gau17, pp. 65–73].

hij de coëfficiënten eenmaal dan is het een zaak van geduldig verder rekenen om (5.21) en desgewenst (5.18) in de lengte van de middelbare maan q uit te drukken.

Dan nóg is Mayer niet tevreden want hij vindt dat de uitdrukking voor ϕ te veel termen bevat. De meeste termen zijn daaruit ontstaan, dat Mayer de factoren $\sin\omega$ etc. heeft uitgedrukt in de middelbare anomalie van zon en maan. Het verschil tussen de hoek ω van de *ware* zon en maan en de hoek rq van de *middelbare* zon en maan heeft een grote invloed op de stoortermen[43]. Daarom ontwerpt Mayer de uiteindelijke tabellen zo, dat de plaats van de maan stapsgewijs verbeterd wordt, waardoor verschillende termen zo klein worden dat ze veilig te verwaarlozen zijn. De belangrijkste wijzigingen zijn dat hij de bijdrage van de middelpuntsverevening (zie p. 81) naar het eind van de berekening verschuift, en dat hij de ware anomalie van de zon ς als één van de bekende variabelen gebruikt. Het is een open vraag of, en zo ja hoe, deze wijzigingen zijn af te leiden uit de voorgaande theorie. Mayer zegt alleen *dat* hij het doet en *waarom*. Dat lijkt me geen theoretische verantwoording, zoals Forbes en Wilson[44] beweren.

Het is ook een open vraag hoe Mayer de theoretische coëfficiënten van zijn vergelijkingen aan de waarnemingen heeft aangepast. Hij zegt dat hij dat doet omdat sommige coëfficiënten niet of met de grootste moeite uit de theorie te bepalen zijn. Delambre[45] noemt nog een andere reden. De theoretische coëfficiënten zijn namelijk afhankelijk van een aantal constanten, zoals de relatieve afstand van zon en maan (vertegenwoordigd door π) en de excentriciteit van hun banen, die niet met zekerheid bekend zijn. In plaats van de maantheorie afhankelijk te laten van deze onzekerheid, en dus *indirekt* van de waarnemingen waarmee die constanten bepaald zijn, is er veel voor te zeggen om de maantheorie *direkt* te laten steunen op de waarnemingen. Op die manier vindt Mayer bovendien compensatie voor én de onvermijdelijk benaderende aard van zijn analyse én de onvolledigheid van zijn model. *Hoe* hij de aanpassing doet heeft Mayer nergens vermeld; waarschijnlijk heeft hij dezelfde methode van conditievergelijkingen gebruikt waarmee hij zo'n succes had bij zijn onderzoek van de libratie van de maan[46].

De beide openstaande vragen maken dat het verband tussen Mayers maan*theorie* en zijn maan*tabellen* nog geenszins duidelijk is. Het was Mayer om de tabellen te doen, en de *Theoria Lunæ* schreef hij achteraf, op verzoek

[43] Merk op dat $rq = q - nq$, het verschil in lengte van de middelbare zon en maan. Euler ging bij zijn berekeningen steeds uit van de ware anomalie van de zon, en hij schreef Mayer op 27 juli 1751 dat daardoor sommige formules aanzienlijk eenvoudiger worden, omdat de ware hoek ω van zon en maan zo'n belangrijke rol speelt in de berekeningen.[For71].

[44] [FW95, p. 65].

[45] [Del27, p. 445].

[46] Volgens Wilson (persoonlijke communicatie) heeft Gauss in Göttingen de bewaard gebleven papieren van Mayer ingezien, en geconcludeerd dat Mayer *niet* de kleinstekwadratenmethode gebruikt heeft. Verder onderzoek in Göttingen zou meer licht op dit probleem kunnen werpen.

van Bradley. Het lijkt me onwaarschijnlijk dat hij de enorme hoeveelheid werk die in de afleidingen van de lange formules is gaan zitten uitsluitend ten behoeve van Bradley heeft verzet.

In de correspondentie van Mayer met Euler vinden we een aantal aanwijzingen over de ontwikkeling van de theorie[47]. In juli 1751 schrijft Mayer dat hij te werk gaat ongeveer zoals Euler in diens verhandeling over de beweging van Jupiter en Saturnus, maar dan met middelbare anomalie in plaats van excentrische anomalie. Mayers berekeningen waren niet erg bevredigend en hij gaf op dat moment de voorkeur aan de op de Saros gebaseerde methode van Halley.

In november bericht hij dat hij grote moeite heeft om sommige coëfficiënten in de lengte van de maan te berekenen, maar dat het er veelbelovend uitziet. Hij moet weer bezig zijn met de gravitatietheorie want hij zegt dat hij probeert de apogeumbeweging af te leiden.

In januari van het jaar erop geeft hij formules voor de lengte en de afstand van de maan, met de middelbare posities van zon en maan als argumenten. Precies een jaar later, in januari 1753, geeft hij nog eens een berekening voor de lengte; deze keer met *vrijwel dezelfde structuur* van stapsgewijze verbetering die ik hierboven kort heb aangegeven. Bovendien zegt hij dat hij de coëfficiënten heeft aangepast om de theorie beter in overeenstemming met de waarnemingen te brengen; maar dat het verschil niet zo groot is dat men aan Newtons theorie van de zwaartekracht zou moeten twijfelen.

Uit de briefwisseling maak ik op dat de grote lijn van Mayers maantheorie eind 1752 gereed is. Daarna brengt hij nog kleine wijzigingen aan, vooral in de coëfficiënten (daar blijft hij tot aan zijn dood mee bezig); en de vergelijking voor de breedte van de maan lost hij op in 1753 op dezelfde manier als die voor de lengte.

Plaats

We hebben (naar ik hoop) een duidelijk beeld van de opbouw van Mayers maantheorie. Evenals zijn tijdgenoten Clairaut en Euler beschouwt Mayer het hoofdprobleem van de maanbeweging; dat is de beweging onder invloed van de aarde en de zon, met weglating van de storingen door de afplatting van de aarde en door andere planeten. De bewegingsvergelijkingen die Mayer opstelt lijken veel op die van Euler en Clairaut maar er zit groot verschil in de manier waarop zij benaderingen van de oplossing opstellen.

Er wordt vaak gesuggereerd[48] dat Mayers maantheorie gebaseerd was op die van Euler. Dat is een mythe. Mayer heeft wel de technieken van Euler overgenomen (het opstellen van de bewegingsvergelijkingen, het elimineren van de afstand van de zon tot de maan, het gebruik van goniometrische

[47] [For71]. Zie ook [For71, brief dd. 15–7–1753], waar Mayer zijn eigen aanpak vergelijkt met die van Euler.

[48] Onder andere [Gau17, p. 65], [Pan51, p. 251], [Cot68, p. 201], [And96, pp. 39,155,221].

reeksen, conditievergelijkingen), maar hij heeft die op geheel eigen wijze gebruikt in vaak andere context. Mayer heeft niet onder stoelen of banken gestoken dat hij veel hij aan Eulers kennis gehad heeft. Die kennis is vooral tot hem gekomen via Eulers *Opuscula* (1750)[49] en diens verhandeling over het Jupiter-Saturnusprobleem. Mayer kreeg Eulers *Theoria motuum lunæ* pas onder ogen in de zomer van 1753[50] en hierboven heb ik betoogd dat Mayers maantheorie toen al in een vergevorderd stadium was. Bestudering van Eulers eerste maantheorie[51] laat bovendien zien dat hij de benaderingen op een heel andere manier opstelt. De mythe wordt volgens mij vooral gevoed door de beloning van £300 die de *Board of Longitude* in 1765 aan Euler toekende (zie p. 61 hierboven).

De substitutie van p als onafhankelijke variabele is misschien uniek bij Mayer. Maar we moeten voorzichtig zijn met oordelen op het eerste gezicht, zoals de verborgen overeenkomst tussen Mayer en Clairaut (zie §5.2.3) laat zien (minstens een dozijn maantheorieën van de laatste twee en een halve eeuw zitten vol met dat soort kruisbestuivingen). Invoeren van p is een tamelijk eenvoudige ingreep die ertoe leidt dat de differentialen in de op te lossen bewegingsvergelijkingen gescheiden van elkaar voorkomen. Dat is een groot voordeel; er staat tegenover dat het erg bewerkelijk is om p achteraf weer te vervangen door tijd of middelbare anomalie (dat is nodig om voor een gegeven tijd de positie van de maan uit te rekenen). Forbes en Wilson[52] beweren dat Mayer ware en middelbare anomalie relateert aan excentrische anomalie, waarna hij de laatste elimineert. Dat kan alleen op p slaan, echter de differentiaalvergelijking die p definieert is daar niet mee in overeenstemming[53]. De excentrische anomalie komt in de *Theoria Lunæ* in het geheel niet voor.

[49] [For71, p. 34, noot 8].
[50] [For71, p. 72].
[51] Volgens het relaas in [Gau17, p. 44 ev].
[52] [FW95, p. 64].
[53] Vergelijk [Bro96, p. 30].

Symbool	Omschrijving
Constanten	
$\odot, \text{♁}, \text{☽}$	Massa van resp. zon:aarde:maan = 220000 : 1 : 0.0143.
Υ	Een vast punt aan de hemel in het vlak van de ecliptica[c].
$\bar{a}$	Gemiddelde aarde-maanafstand, geprojecteerd in de ecliptica (Mayer neemt dit als eenheid van lengte).
π	Verhouding van gemiddelde parallaxen; $HP_{\odot} : HP_{☽} = 0.00315$.
$\bar{n}$	Verhouding van middelbare snelheid van zon en maan, 0.0748.
n^2	$\frac{\odot \bar{n}^2}{\odot + ♁} = 0.00560$.
r	$1 - \bar{n} = 0.9252$.
g	$\frac{\bar{n}(☽ + ♁)}{(\odot + ♁)\pi^3} = 1.0184$.
ε	Excentriciteit van de aardbaan; 0.0168.
A	Excentriciteit van de maanbaan; 0.05454.
α	Middelbare beweging van de maan in anomalie; 0.99155.
ϵ	Integratieconstante; 1.00475.
Variabelen	
ϕ	Ware eclipticale lengte van de maan ($\angle \Upsilon TA$ in fig. 5.1).
s	Ware eclipticale lengte van de zon ($\angle \Upsilon TS$).
ω	$\phi - s$, eclipticale afstand van zon en maan ($\angle STA$).
l	Ware eclipticale breedte van de maan ($\angle LTA$).
q	Middelbare lengte van de maan.
ς	Ware anomalie van de zon[a].
X, Y, Z	Grootheden afgeleid van de gravitatiekrachten op de maan[b].
P	$\int Y v \, dq$.
v	Ware afstand[d] van de maan tot de aarde ($LT \cos l$).
x	v^{-1}.
y	Ware afstand[e] van de zon tot de aarde.
u	Ware afstand[e] van de zon tot de maan.
dp	$ex^2 \, dq$.

[a] Uit Mayers tekst (p. 17) blijkt $s = \varsigma$.
[b] kracht vermenigvuldigd met $(dq/dt)^2$
[c] De notatie suggereert het lentepunt, maar het blijkt het aphelion te zijn.
[d] In de ecliptica geprojecteerd en met de gemiddelde afstand $\bar{a}$ als eenheid.
[e] Met de gemiddelde afstand $\bar{a}/\pi$ als eenheid genomen.

Tabel 5.3: Constanten en variabelen in *Theoria Lunæ*. De waarden voor de constanten zijn de (afgeronde) waarden die Mayer gebruikt in [May67]. Alleen voor de massa van de maan noemt Mayer daar geen waarde: die heb ik overgenomen uit [For71, 5e brief]. Zie ook figuur 5.1.

Hoofdstuk 6

Een praktisch bruikbare methode

Met het beschikbaar komen van Mayers nauwkeurige maantabellen werd het in principe mogelijk om de maansafstandenmethode in praktijk te brengen. De tabellen gaven de positie van de maan; de posities van de overige hemellichamen waren nauwkeuriger dan voorheen vastgelegd door Mayer, Lacaille en Bradley. Er waren sextanten waarmee het doenlijk was om op zee voldoende nauwkeurige waarnemingen te doen (Hadley, Mayer, Campbell, zie §4.4). Er was een methode om de waargenomen afstand te verbeteren voor o.a. refractie en parallax (Morin), en daar zouden er snel veel meer van komen (bv. Dunthorne, Borda; zie p. 2.3). Er waren verschillende proeven gedaan met de methode, onder andere door Lacaille, Campbell, Maskelyne, en Carsten Niebuhr. De *Board of Longitude* oordeelde in 1765 dat de methode bruikbaar was. Tegelijk oordeelde ze positief over de bruikbaarheid van de tijdmeters van Harrison.

Er waren nog een paar praktische bezwaren aan de beide methoden van lengtebepaling. Tijdmeters waren erg duur en de productie ervan moest nog op gang komen. Sextanten daarentegen waren aanzienlijk goedkoper (maar niet goedkoop), en zeker sinds Ramsdens uitvinding van een machine om nauwkeurige schaalverdelingen te maken veel makkelijker te produceren. De maansafstandenmethode was echter omslachtig, tijdrovend, en inherent minder nauwkeurig. Over de praktische toepassing van de maansafstandenmethode gaat dit hoofdstuk[1].

[1] De meeste informatie in dit hoofdstuk is afkomstig uit [How89] en [Cot68, hst. 6].

6.1 Nevil Maskelyne en de *Nautical Almanac*

Nevil Maskelyne (1732–1811) was als astronoom naar Sint Helena gegaan om daar, in opdracht van de *Royal Society*, de overgang van Venus van 1761 waar te nemen. Op de reis erheen had hij de tijd om de maansafstandenmethode in praktijk uit te proberen. Daartoe had hij de maantabellen van Mayer bij zich, die de admiraliteit in 1754 had ontvangen. Maskelyne ondervond dat er erg veel tijd nodig was voor de berekeningen, tot wel vier uur. Niettemin bleek hem dat Mayers maantabellen bruikbaar waren om de lengte met behulp van maansafstanden te bepalen. Op de terugweg deed hij niet alleen zelf waarnemingen; hij leerde de scheepsofficieren hoe zij de waarnemingen moesten doen en hoe de berekeningen te maken. Maskelyne was overtuigd van het nut van de methode. Toen hij terug was in Engeland beschreef hij de te volgen procedure van waarnemen en berekenen in *The British Mariner's Guide*, waaraan hij Mayers maantabellen en een uitgewerkt voorbeeld toevoegde.

Ruim een jaar later vertrok hij opnieuw naar zee, ditmaal met bestemming Barbados. Deze reis maakte deel uit van het laatste onderzoek dat de *Board of Longitude* instelde naar de bruikbaarheid van Mayers maantabellen[2] waarvan de *Board* inmiddels de laatste verbeterde versie had, en Harrisons tijdmeter die met een ander schip eveneens naar Barbados ging. Maskelyne bepaalde op zee de lengte met behulp van maansafstanden, en hij deed op Barbados astronomische waarnemingen om de goede werking van Harrisons tijdmeter na te gaan. Ondertussen overleed de *Astronomer Royal* Nathaniel Bliss[3]. Enkele maanden nadat Maskelyne terugkwam van Barbados werd hij bij koninklijk besluit benoemd op die belangrijke post te Greenwich, waarschijnlijk zeer tot ongenoegen van Harrison die Maskelynes objectiviteit wantrouwde omdat hij een fervent aanhanger van maansafstanden was[4].

Op 9 februari 1765, de dag na de officiële bekrachtiging van de benoeming, vergaderde de *Board of Longitude*, waar Maskelyne vanwege zijn nieuwe funktie deel van uitmaakte. Dit was waarschijnlijk de belangrijkste vergadering uit haar bestaan. Niet alleen omdat de *Board* de aanbeveling deed dat het parlement prijzen zou toekennen aan Harrison en Mayer, voor *beide* lengtemethoden dus, maar ook omdat Maskelyne een plan presenteerde om de bruikbaarheid van de maansafstandenmethode aanzienlijk te vergroten, waarover straks meer. De *Board* nam geen genoegen met een enkele tijdmeter maar verlangde dat er meer goede exemplaren vervaardigd werden, door Harrison of door iemand anders (dat Harrison dat zou doen

[2] Dit deel van het onderzoek werd uitgevoerd op aandringen van Michaelis, wier invloed ik in hst. 4 heb besproken [For75, p. 121].

[3] Bliss was Bradley opgevolgd die in 1762 was overleden: in hetzelfde jaar als Lacaille en Mayer.

[4] [How89, p. 75].

was onwaarschijnlijk door zijn leeftijd). Ze stelde andere Britse en Franse klokkenmakers in staat om Harrisons tijdmeter te onderzoeken en na te maken. Maskelyne verzorgde voor de *Board* een aantal publicaties: over de werking van de tijdmeter, Mayers verbeterde maantabellen, en diens *Theoria Lunæ*[5]. De *Board* hechtte blijkbaar groot belang aan de verspreiding van kennis.

Het plan dat Maskelyne op die gedenkwaardige vergadering lanceerde, betrof de uitgave van een almanak voor astronomie en navigatie. Op zich was dat niet iets bijzonders; Lalande verzorgde al jaren de Franse almanak *Connaissance des Temps*. Maar deze almanak moest tabellen bevatten met voorberekende maansafstanden om het rekenwerk bij het bepalen van de lengte tot aanvaardbare proporties terug te brengen. Deze almanak moest jaarlijks gepubliceerd worden. Gegevens die niet aan verandering onderhevig zijn, zoals interpolatie- en hoogteherleidingstabellen, zouden in een aparte uitgave verschijnen. De twee boeken moesten samen alle informatie bevatten om lengte en breedte op zee te bepalen en ze moesten ook bruikbaar zijn voor astronomen.

Maskelyne kreeg de middelen om het plan te verwezenlijken. Hij zette vier rekenaars aan het werk om de gegevens te produceren. Samenwerking was verboden en alle berekeningen werden door twee personen onafhankelijk van elkaar uitgevoerd. Een vijfde controleerde of de resultaten overeenkwamen. De *Nautical Almanac and Astronomical Ephemeris* was gereed op 6 januari 1767 en gold voor dat jaar. De *Tables Requisite to be Used with the Astronomical and Nautical Ephemeris* bevatte de onveranderlijke gegevens.

Tot de editie voor 1813 werd de positie van de maan berekend met Mayers tabellen, sinds 1787 met een door Charles Mason verbeterde versie daarvan. In de plaats van Mayers tabellen kwamen die van Bürg en Delambre, die gebaseerd waren op de maantheorie van Laplace. Ook voor de positie van de zon werden aanvankelijk tabellen van Mayer gebruikt, terwijl planetengegevens afkomstig waren van Lalande. In ruil kreeg Lalande de gegevens van zon en maan waarmee hij de *Connaissance des Temps* maakte. Sinds het eind van de negentiende eeuw zijn er aparte uitgaven van de almanak voor astronomie en navigatie.

Ook nu nog verschijnt de *Nautical Almanac*, al komen sinds 1906 de tabellen met maansafstanden niet meer voor. De almanak kwam onder de verantwoordelijkheid van de admiraliteit nadat in 1828 de *Board of Longitude* ophield te bestaan (haar taak was vervuld; de Franse tegenhanger *Bureau des Longitudes* bestaat nog steeds). Het grote succes van de almanak, en het feit dat de maantabellen waren berekend voor de meridiaan door de sterrenwacht van Greenwich, maakten die meridiaan de *de facto* standaardmeridiaan waar vanaf geografische lengte gerekend wordt.

---

[5] [For75, p. 125].

6.2 Het gebruik van de voorberekende tabellen

Het idee voor de voorberekende tabellen was afkomstig van Lacaille, die met de maansafstandenmethode had geëxperimenteerd toen hij naar Kaap de Goede Hoop reisde om van daar af de zuidelijke sterrenhemel in kaart te brengen. De tabellen bevatten hoekafstanden van de maan tot de zon en tot enkele zorgvuldig gekozen sterren, voor de meridiaan van de sterrenwacht van Greenwich, met intervallen van drie uur[6]. Met deze tabellen en zijn eigen waarneming (gecorrigeerd voor atmosferische refractie en parallax) kon een navigator de Greenwichtijd waarop hij die waarneming gedaan had, interpoleren. Een interessant detail is, dat de *Nautical Almanac* aanvankelijk berekend was voor de *ware* tijd te Greenwich, en in 1834 overging op de *middelbare* tijd[7]. Hoewel alle berekeningen even goed kunnen worden uitgevoerd in elk van beide tijdsystemen (het verschil, de tijdverevening, is nauwkeurig bekend), vind ik de overgang typerend voor het toenemende belang van mechanische manieren om de tijd bij te houden tegenover astronomische manieren.

Om de interpolatie te vergemakkelijken had Maskelyne *proportionele logaritmen* geïntroduceerd. De proportionele logaritme van een getal x definieerde hij als

$$\text{prop.}\log x = \log_{10} 10800 - \log_{10} x.$$

Dat kwam op de volgende manier van pas. Zij Δ het verschil tussen de twee getabelleerde maansafstanden waar de waargenomen (en gecorrigeerde) afstand tussenin ligt; en δ het verschil tussen de eerste van de twee tabelwaarden en de waarneming. De tabelwaarden gelden voor tijdstippen die 3 uur of 10800 seconden uiteen liggen. Zij t het tijdverschil in seconden tussen de eerste tabelwaarde en de waarneming. Doel is om t te bepalen. Het verband tussen Δ, δ en t is

$$\frac{10800}{t} = \frac{\Delta}{\delta}.$$

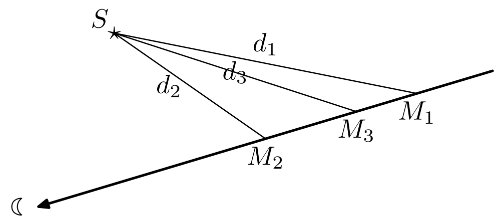
Neem daarvan de logaritme, dat geeft $\log 10800 - \log t = \log \Delta - \log \delta$, zodat

$$\text{prop.}\log t = \text{prop.}\log \delta - \text{prop.}\log \Delta.$$

In de latere almanakken was $\text{prop.}\log \Delta$ gegeven voor elk paar tabelwaarden, en een tabel met proportionele logaritmen was opgenomen in de *Tables*

[6] Voor de dagen rond Volle Maan ontbraken de afstanden tot de zon omdat waarneming van de maansafstand dan niet mogelijk is, en voor dagen rond Nieuwe Maan waren geen gegevens opgenomen omdat dan de maan niet zichtbaar is.

[7] Het is 12 uur ware tijd in een plaats wanneer de zon die dag haar hoogste punt bereikt. Bij het aanhouden van de ware tijd is de tijdschaal niet uniform, door de excentriciteit van de aardbaan (p. 30) en door de schuine stand van de aardas ten opzichte van de ecliptica. Middelbare tijd is een uniforme tijdschaal die maximaal 16 minuten verschilt van de ware tijd.



Figuur 6.1: De afstand van de maan tot een ster verandert niet lineair. Lijnen d_1, d_2 en d_3 in de figuur zijn grootcirkelbogen aan de hemel.

Requisite. Daarmee was de interpolatie teruggebracht tot twee keer aftrekken en twee tabelopeningen. Zonder prop. log was vier keer zoeken in een gewone logaritmetabel, een keer optellen en een keer aftrekken nodig.

Hierna volgde meestal nog een tweede-orde interpolatiestap, waarvoor (vanaf de tweede editie van de *Requisite Tables*) een aparte tabel was opgenomen. Deze stap was nodig omdat de maan in het algemeen op enige afstand van de ster passeert. Ik zal laten zien dat de hoekafstand daardoor niet lineair toe- of afneemt. Figuur 6.1 verduidelijkt dit.

Laat op tijdstip t_1 de maan in M_1 zijn. De maansafstand tot de ster S is op dat moment $M_1S = d_1$. Op tijdstip t_2, laten we zeggen drie uur later, staat de maan in M_2, maansafstand d_2. De maansafstanden zijn grootcirkelbogen en voor M_1M_2 kunnen we zonder bezwaar stellen dat het eveneens een grootcirkelboog is. We veronderstellen verder dat de maan met constante hoeksnelheid ν beweegt; er geldt $M_1M_2 = \nu(t_2 - t_1)$. Indien we het tussenliggende tijdstip t_3 (waarop we de maansafstand d_3 hebben gemeten; de maan staat dan in M_3) door lineaire interpolatie bepalen, dan vinden we

$$t_3 = t_1 + \frac{t_2 - t_1}{d_2 - d_1} d_3.$$

Een betere benadering voor t_3 vinden we met gebruik van boldriehoeksformules. Behalve wanneer de maan net dicht langs S passeert, is $\angle M_1SM_3$ klein; dit rechtvaardigt de derde stap:

$$\begin{aligned} t_3 &= t_1 + \frac{M_1M_3}{\nu} \\ &= t_1 + \tfrac{1}{\nu}(\cos d_1 \cos d_3 + \sin d_1 \sin d_3 \cos \angle M_1SM_3) \\ &\approx t_1 + \tfrac{1}{\nu}(\cos d_1 \cos d_3 + \sin d_1 \sin d_3) \\ &= t_1 + \frac{\cos(d_1 - d_3)}{\nu}. \end{aligned}$$

De tweede-orde interpolatiestap was in veel mindere mate ook nodig vanwege de onregelmatige beweging van de maan.

Er was nog een tweede gebruiksmogelijkheid van de proportionele logaritmen. Merk op dat prop. log een strikt monotoon dalende funktie is. Aan de prop. log in de almanak kon de gebruiker zien ten opzichte van welk getabelleerd hemellichaam de maan de grootste hoeksnelheid heeft. Want een kleinere prop. log correspondeert met een groter verschil tussen tabelwaarden, dat is een groter verschil van hoekafstand. De gebruiker koos dus vooraf dát hemellichaam uit dat op de betreffende datum de kleinste prop. log vertoonde. De afstand van de maan tot dat hemellichaam was het meest geschikt om de lengte te bepalen. Immers, de waarneemfout heeft dan de kleinste invloed op het resultaat.

6.3 Het gebruik van de maansafstandenmethode

De publicatie van de *Nautical Almanac* maakte het bepalen van de lengte op zee uiteindelijk redelijkerwijs uitvoerbaar. De berekeningen kostten nog 'maar' 20 minuten. Er waren een goede sextant, een paar tabellen (de *Nautical Almanac* en *Requisite Tables*), en eventueel een klok (niet noodzakelijk van tijdmeterkwaliteit) voor nodig; en een dosis routine in waarnemen en rekenen. Hier volgt de procedure van lengtebepaling met de maan en een ster.

1. Meet de hoek tussen de maan en de ster, en de hoogte van maan en ster boven de horizon, bij voorkeur gelijktijdig met drie waarnemers.

2. Corrigeer de maansafstand en -hoogte voor de schijnbare diameter van de maan. In de sextant zijn de beelden van de maan en de ster precies met elkaar in contact gebracht; de gemeten afstand is dus tussen de ster en de *rand* van de maan.

3. Corrigeer de waarnemingen voor refractie en parallax in hoogte. Gebruik voor het verbeteren van de maansafstand bijvoorbeeld Borda's methode (p. 24). Voor de hoogteverbeteringen zijn tabellen opgenomen in de *Requisite Tables*. De stershoogte is vrij van parallax voor alle praktische doeleinden.

4. Bereken de lokale tijd met de stershoogte, zoals beschreven op pagina 20. Als de horizon ('s nachts) niet zichtbaar is dan is een aparte waarneming nodig in de schemering van de hoogte van een ster om de lokale tijd te vinden (die moet dan nog wel *verzeild* worden: omgerekend naar plaats en tijdstip van de maansafstandenmeting).

5. Vind de Greenwichtijd van de waarneming door interpolatie met de verbeterde maansafstand in de almanak, zoals in de vorige paragraaf beschreven.

6. Het verschil tussen de lokale tijd en de Greenwichtijd geeft de lengte ten opzichte van de meridiaan van Greenwich (1 uur tijdverschil komt overeen met 15° lengte; als de lokale tijd vroeger is dan de Greenwichtijd is de lengte westelijk.)

Merk op dat de schijnbare diameter en de horizontale parallax van de maan afhankelijk zijn van de (radiale) afstand van de maan tot de aarde; deze twee grootheden zijn dus tijdafhankelijk maar het volstaat om ze op te zoeken met een benadering van de Greenwichtijd. Op een aantal punten in de bovenstaande procedure komen finesses aan de orde die ik hier achterwege laat omwille van de overzichtelijkheid. Ik volsta met nogmaals op te merken dat een hoge mate van precisie is vereist door de ongunstige verhouding tussen de omloopsnelheid van de maan en de rotatiesnelheid van de aarde[8].

Wat was de rol die de methode van maansafstanden speelde in de negentiende-eeuwse navigatie? Het principe van de methode is vrij eenvoudig, maar in praktijk was het geen sinecure om maansafstanden te nemen. Lengtebepaling met een tijdmeter en een astronomische waarneming was veel makkelijker en nauwkeuriger. In 1815 kostte een goede sextant 240 gulden. Een tijdmeter kostte wel vier keer zoveel. Ter vergelijking: een goedbetaalde stuurman op de Aziëvaart verdiende 75 gulden per maand[9]. Tijdmeters kwamen in gebruik vanaf 1780; pas omstreeks 1840 waren ze gemeengoed op de beter uitgeruste schepen. Vanaf de publicatie van de eerste *Nautical Almanac* tot aan de grootschalige productie van tijdmeters was de maansafstandenmethode dus de enige *algemeen toepasbare* lengtemethode.

Lengtebepaling bleef aanvankelijk voorbehouden aan de beter uitgeruste schepen op lange reizen. Bekende ontdekkingsreizigers als Cook en Vancouver waren goed uitgerust; zij hebben beide methoden gebruikt niet alleen voor hun navigatie maar ook om gebieden in kaart te brengen (nauwkeurige kennis van lengte heeft pas waarde als de kaarten vergelijkbare nauwkeurigheid hebben). Schepen op de kustvaart of visserij hadden weinig behoefte aan lengtebepaling[10].

Twee significante veranderingen voltrokken zich in de organisatie van de navigatie. Voorheen moesten navigatoren zelf voor hun uitrusting (instrumenten, kaarten, en almanakken) zorgen, maar vanwege de hoge prijs van de nieuwe middelen gingen admiraliteiten en grote, rijke rederijen ertoe over sextanten en tijdmeters (dan wel een budget om zulke instrumenten aan te schaffen) beschikbaar te stellen aan hun officieren. Dit duidt op het belang dat in ieder geval het walpersoneel aan lengtebepaling hechtte; of het zeegaande personeel er hetzelfde over dacht is enigszins te betwijfelen[11].

---

[8] Zie ook §2.4. Meer details zijn te vinden in [Sad76] en [H.M66].

[9] [Dav85, pp. 254, 257, 263].

[10] [Dav85, p. 257].

[11] Davids [Dav85, hst. 11] schaart de maansafstandenmethode bij de kennis die door de zeeman onvrijwillig is geaccepteerd, d.w.z. het was een verplicht examenonderdeel en er

De tweede verandering voltrok zich in de organisatie van het navigatieonderwijs. Voor beide lengtemethoden was een behoorlijke dosis wiskundekennis vereist. Maansafstanden moesten zorgvuldig waargenomen en becijferd worden, en een tijdmeter was een apparaat om met zorg en toewijding te omringen. Het belang van goede scholing nam dus toe. De admiraliteiten vereisten dat ten minste één officier aan boord geschoold was in de nieuwe technieken[12]. De introductie van lengtebepalingstechnieken markeert een omslagpunt in de geschiedenis van de navigatie; het moment dat navigatie niet meer een kunst is, maar een kunde. Ik vermoed dat daardoor aan het eind van de achttiende eeuw het zeevaartonderwijs een impuls heeft gekregen.

Na 1840 was de maansafstandenmethode vooral een methode om de goede werking van de tijdmeter te controleren, totdat radiotijdseinen vanaf 1905 die rol overnamen. Vanaf dat moment was er geen praktische reden meer om de maansafstandenmethode te gebruiken. Liefhebbers van astronomische navigatie kunnen hun hart er nog aan ophalen. Maansafstanden duiken regelmatig op in de discussielijst `www.irbs.com/lists/navigation/`.

waren verplichtingen de methode te gebruiken.

[12] [How89, p. 94], [Dav85, p. 293].

Hoofdstuk 7

Conclusies en aanbevelingen

De oorsprong van de maansafstandenmethode gaat terug tot Johann Werner in 1514 en mogelijk zelfs verder. Gedurende de zeventiende en het begin van de achttiende eeuw rijpte het idee: het werd duidelijker hoe de methode in praktijk zou moeten werken, met welke instrumenten, en welke correcties en berekeningen nodig waren. Hoewel er grote verbeteringen waren in de kwaliteit van de astronomische waarnemingen bleef de beweging van de maan de wetenschappers frustreren: Newton kreeg er hoofdpijn van. Het grote struikelblok lag op het terrein van de hemelmechanica.

Pas met de ontwikkeling van de differentiaal- en integraalrekening kwam het wiskundige gereedschap beschikbaar om de problemen van de hemelmechanica aan te kunnen. Mayer gebruikte die techniek om een benadering van de beweging van de maan af te leiden, en hij verbeterde de benadering met behulp van de beste waarnemingen die hij kon krijgen. Het resultaat maakte het mogelijk om de maansafstandenmethode toe te passen. Mayers motivatie om aan de maantheorie te werken was vooral het verbeteren van lengtebepalingsmethoden ten behoeve van de geografie. Uiterlijk in 1753 kwam daar als tweede motivatie bij om lengte op zee te bepalen.

Bruikbaar werd de maansafstandenmethode door de voortvarendheid van Nevil Maskelyne, die tabellen met voorberekende maansafstanden ontwikkelde. Hoewel het principe van de methode eenvoudig is, stelde de praktische uitvoering ervan hoge eisen aan de gebruiker. De introductie van lengtebepaling veranderde het karakter van de navigatie. De maansafstandenmethode is erg gevoelig voor fouten in waarnemingen en berekeningen. Navigatoren moesten daarom de kennis en de middelen hebben om verantwoord met de methode om te gaan. Mogelijk heeft de maansafstandenmethode een impuls geleverd aan de mathematisering van de navigatie en aan de ontwikkeling van het zeevaartkundig onderwijs. Technologische vooruitgang in de vorm van tijdmeters en radio heeft de methode uiteindelijk overbodig gemaakt.

In hoofdstuk 1 heb ik de redenen gezocht waarom het lengteprobleem als maatschappelijk relevant werd beschouwd. De nautische, economische, en strategische belangen lijken niet zo groot geweest te zijn dat zij op zichzelf de aandacht voor het lengteprobleem verklaren. Het is moeilijk te achterhalen hoeveel behoefte de zeevaarders hadden aan lengtebepaling: Davids [Dav85] is een startpunt om daar meer over te weten te komen. Onderzoek naar het daadwerkelijk gebruik van lengtebepalingstechnieken (in het bijzonder de maansafstandenmethode) is in dit verband van groot belang. Het verschaft daarnaast meer inzicht in de relatie tussen techniek en wetenschap.

Landes' suggestie (p. 13) dat de vrijheid die kennis van lengte met zich meebrengt, de afhankelijkheid van seizoenen en vastgelegde routes vermindert, verdient nader onderzoek. Ik suggereer dat de drijfveren van wetenschappers om het lengteprobleem op te lossen een grotere betekenis hebben gehad dan tot nu toe aangenomen. Om daar meer zicht op te krijgen is onderzoek naar de rol die wetenschappers hebben vervuld in de politieke besluitvorming nuttig.

Ten aanzien van de meer technische kanten van Mayers maantheorie trek ik de volgende conclusies.

Het model dat Mayer opstelt beschrijft het hoofdprobleem. Het omvat wel de aantrekkingskrachten van de zon en de aarde, maar niet het effect van de afplatting van de aarde en de storingen die andere planeten veroorzaken. Het is een beperkt drielichamenprobleem waarin één lichaam, de zon, veel zwaarder is dan de andere en op grote afstand staat. De voordelen die dit biedt weet Mayer uit te buiten; zijn tijdgenoten doen dat overigens ook.

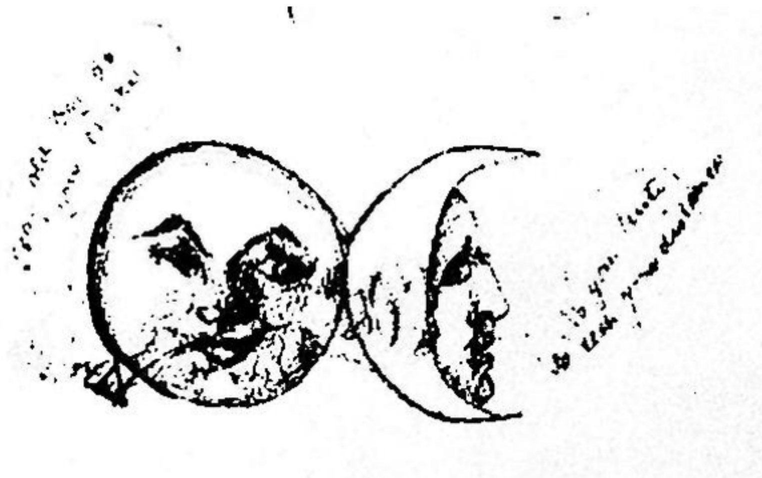
Er wordt vaak gesuggereerd dat Mayers maantheorie gebaseerd was op die van Euler. Dat is een mythe. Mayer heeft wel de technieken van Euler overgenomen maar hij heeft die op geheel eigen wijze gebruikt in vaak andere context. De bewegingsvergelijkingen die Mayer opstelt lijken veel op die van Euler en Clairaut; maar er zit groot verschil in de manier waarop zij benaderingen van de oplossing opstellen. Het is een interessante vraag of zij op zoek waren naar een periodieke of naar een niet-periodieke oplossing van het probleem. Een grondiger studie van originele bronnen zou daar verduidelijking in kunnen brengen. Ik heb betoogd dat Mayers maantheorie eind 1752 bijna gereed was.

Het is een open vraag hoe Mayer de oplossingen van de bewegingsvergelijkingen vormgeeft in zijn tabellen, die een andere structuur hebben. Mayer geeft daarvan geen theoretische verantwoording, zoals Forbes en Wilson beweren.

Het is ook een open vraag hoe Mayer de coëfficiënten van zijn vergelijkingen aan de waarnemingen heeft aangepast. Waarschijnlijk heeft hij dezelfde methode van conditievergelijkingen gebruikt waarmee hij eerder succes had. Verder onderzoek in Göttingen zou meer licht op dit probleem kunnen werpen.

De beide openstaande vragen maken dat het verband tussen Mayers maan*theorie* en zijn maan*tabellen* nog niet duidelijk is.

Forbes en Wilson beweren dat Mayer ware en middelbare anomalie relateert aan excentrische anomalie, waarna hij de laatste elimineert. Dat is niet waar; ik heb geconstateerd dat de excentrische anomalie in de *Theoria Lunæ* niet voorkomt.



Bibliografie

[Air84] George B Airy. *Gravitation*. Macmillan, London, 1884.

[And96] W J H Andrewes, editor. *The quest for longitude: The Proceedings of the Longitude Symposium*, Harvard Collection of Historical Scientific Instruments, Cambridge, Mass, 1996. Harvard University Press.

[Ben85] Jim A Bennett. The longitude and the new science. In *Vistas in Astronomy* [SRM85], pages 219–223.

[Bos93] Henk J M Bos. The Fundamental Concepts of the Leibnizian Calculus. In *Lectures in the History of Mathematics*, number 7 in History of Mathematics, pages 83–99. American Mathematical Society, 1993.

[Bro96] Ernest W Brown. *An introductory treatise on the lunar theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1896.

[Bur] Bureau des Longitudes. Glossary. `www.bdl.fr/solarsys/projet/glossaire_eng.html`.

[Cha96] Bruce Chandler. Longitude in the context of mathematics. In Andrewes [And96], pages 34–42.

[Coo88] Alan Cook. *The motion of the moon*. Adam Hilger, Bristol, 1988.

[Cot68] Charles H Cotter. *A History of Nautical Astronomy*. Hollis & Carter, London, 1968.

[Dav85] Carolus Augustinus Davids. *Zeewezen en wetenschap; De wetenschap en de ontwikkeling van de navigatietechniek in Nederland tussen 1585 en 1815*. De Bataafsche Leeuw, Amsterdam/Dieren, 1985.

[Del27] J B J Delambre. *Histoire de l'astronomie au dix-huitième siècle*, volume II. Bachelier, Parijs, 1827.

[ea78] G Asaert ea, editor. *Maritieme geschiedenis der Nederlanden.* De Boer maritiem, Bussum, 1976–1978.

[For70] Eric G Forbes. Tobias Mayer's contributions to the development of lunar theory. *Journal for the History of Astronomy*, 1:144–154, 1970.

[For71] Eric G Forbes. *The Euler-Mayer correspondence (1751–55) : a new perspective on eighteenth-century advances in the lunar theory.* Macmillan, London, 1971.

[For75] Eric G Forbes. *Greenwich Observatory, The Royal Observatory at Greenwich and Hertmonceux, 1675–1975*, volume 1, Origins and early history (1675–1835). Taylor and Francis, London, 1975.

[For80a] Eric G Forbes. *Tobias Mayer (1723–62) : pioneer of enlightened science in Germany.* Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1980.

[For80b] Eric G Forbes. Tobias Mayer's contributions to observational astronomy. *Journal for the History of Astronomy*, 11:28–49, 1980.

[FW95] Eric G Forbes and Curtis A Wilson. The solar tables of Lacaille and the lunar tables of Mayer. In Wilson and Taton [WT95], chapter 18.

[Gau17] A Gautier. *Essai historique sur le Problème des Trois Corps.* Veuve Courcier, Paris, 1817.

[Gou23] Rupert T Gould. *The Marine Chronometer: its history and development.* J D Potter, Londen, 1923.

[Hel95] Albert van Helden. Measuring solar parallax: the Venus transits of 1761 and 1769 and their nineteenth-century sequels. In Wilson and Taton [WT95], chapter 23.

[H.M66] H.M. Nautical Almanac Office. A modern view of lunar distances. *Journal of the institute of navigation*, 19:131–153, 1966.

[How80] Derek Howse. *Greenwich time and the discovery of the longitude.* Oxford University Press, Oxford, 1980.

[How89] Derek Howse. *Nevil Maskelyne: The seaman's astronomer.* Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[KGzj] J Kleijntjens and F M Gescher. *Navigatie en Negotie.* H J Dieben, Wassenaar, Leiden, z.j.

[Kli72] Morris Kline. *Mathematical thought from ancient to modern times.* Oxford University Press, New York, Oxford, 1972.

[Kol98] Nicholas Kollerstrom. Newton and the Moon WebSite. www.ucl.ac.uk/sts/kollrstm/newton.htm, 1998.

[Lae42] Dr. P H van Laer. *Vreemde woorden in de sterrenkunde*. Noordhoff, Groningen, 1942.

[Lan96] David S Landes. Finding the point at sea. In Andrewes [And96].

[Lap02] Pierre S Laplace. *Traité de méchanique céleste*, volume deel III, chapter boek VII. Duprat, Parijs, 1802.

[Mar17] F Marguet. *Histoire de la Longitude a la Mer au XVIIIe siècle, en France*. Augustin Challamel, Paris, 1917.

[May] W E May. Navigational Accuracy in the Eighteenth Century. *Journal of Navigation*, pages 71–73, ??

[May67] Tobias Mayer. *Theoria Lunæ juxta Systema Newtonianum*. Commisioners of Longitude, London, 1767.

[Mor34] Iannus Baptista Morinus. *Longitudinum terrestrium necnon coelestium, nova et hactenus optata scientia*. Ioannus Libert, Parijs, 1634.

[Pan51] Antoni Pannekoek. *De groei van ons wereldbeeld, een geschiedenis van de sterrekunde*. Wereld-bibliotheek, Amsterdam – Antwerpen, 1951.

[Ran85] W G L Randles. Portuguese and Spanish Attempts to Measure Longitude in the 16th century. In *Vistas in Astronomy* [SRM85], pages 235–242.

[RH49] J van Roon and P Haverkamp. *Leerboek der zeevaartkunde*, volume I. De Boer, Amsterdam, 7 edition, 1949.

[Sad76] Donald H Sadler. Lunar Distances and the Nautical Almanac. *Vistas in Astronomy*, 20:113–121, 1976.

[Sch95] Felix Schmeidler. Astronomy and the theory of errors: from the method of averages to the method of least squares. In Wilson and Taton [WT95], chapter 27.

[Sei92] P. Kenneth Seidelmann. *Explanatory supplement to the Astronomical Almanac*. Mill Valley, CA, 1992.

[Sma56] William M Smart. *Text-book on Spherical Astronomy*. Cambridge University Press, Cambridge, 1956.

[Sob99] Dava Sobel. *Lengtegraad. Het ware verhaal van een eenzaam genie dat het grootste probleem van zijn tijd oploste.* Ambo, Amsterdam, 2 edition, 1999.

[SRM85] Peter Beer Stuart R Malin, Archie E Roy, editor. *Longitude zero, 1884-1984: Proceedings of an international symposium held at the National Maritime Museum, Greenwich, London, 9–13 July 1984 to mark the centenary of the adoption of the Greenwich Meridian*, volume 28, 1985.

[Sti96] Alan Stimson. The Longitude Problem: The Navigator's Story. In Andrewes [And96].

[Tay56] Eva G R Taylor. *The Haven-Finding Art. A History of Navigation from Odysseus to Captain Cook.* Hollis & Carter, London, 1956.

[Tur85] A J Turner. France, Britain, and the Resolution of the Longitude Problem in the 18th Century. In *Vistas in Astronomy* [SRM85], pages 315–319.

[Tur96] A J Turner. In the Wake of the Act, but Mainly Before. In Andrewes [And96], pages 116–127.

[Ver90] Ferdinand Verhulst. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical systems.* Springer-Verlag, Berlijn, 1990.

[Waf76] Craig B Waff. Isaac Newton, the motion of the lunar apogee, and the establishment of the inverse square law. *Vistas in Astronomy*, 20:99–103, 1976.

[Waf95] Craig B Waff. Clairaut and the motion of the lunar apse: the inverse-square law undergoes a test. In Wilson and Taton [WT95], chapter 16.

[Wil80] Curtis A Wilson. Perturbations and Solar Tables from Lacaille to Delambre: the Rapprochement of Observation and Theory. *Archive for History of Exact Sciences*, 22:53–304, 1980.

[Wil85] Curtis A Wilson. The great inequality of Jupiter and Saturn: from Kepler to Laplace. *Archive for History of the Exact Sciences*, 33:15–290, 1985.

[Wil92] J E D Williams. *From Sails to Satellites: the origin and development of navigational science.* Oxford University press, Oxford, 1992.

[Wil95a] Curtis A Wilson. Factoring the Lunar Problem: Geometry, Dynamics, and Algebra in the Lunar Theory from Kepler to Clairaut.

In H S Dumas, editor, *Hamiltonian Dynamical Systems: History, Theory, and Applications*, volume 63 of *IMA Volumes in Mathematics and its Applications*. Springer-Verlag, 1995.

[Wil95b] Curtis A Wilson. The problem of perturbation analytically treated: Euler, Clairaut, d'Alembert. In Wilson and Taton [WT95], chapter 20.

[WT95] Curtis A Wilson and René Taton, editors. *Planetary astronomy from the Renaissance to the rise of astrophysics. Part B: The eighteenth and nineteenth centuries*, volume 2B of *The General History of Astronomy*, Cambridge, 1995. Cambridge University Press.

[WW63] E T Whittaker and G N Watson. *A course of modern analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, 1963.

[Youzj] Charles A Young. *A text-book Of General Astronomy for colleges and scientific schools.* Ginn and Co, Boston etc, zj.