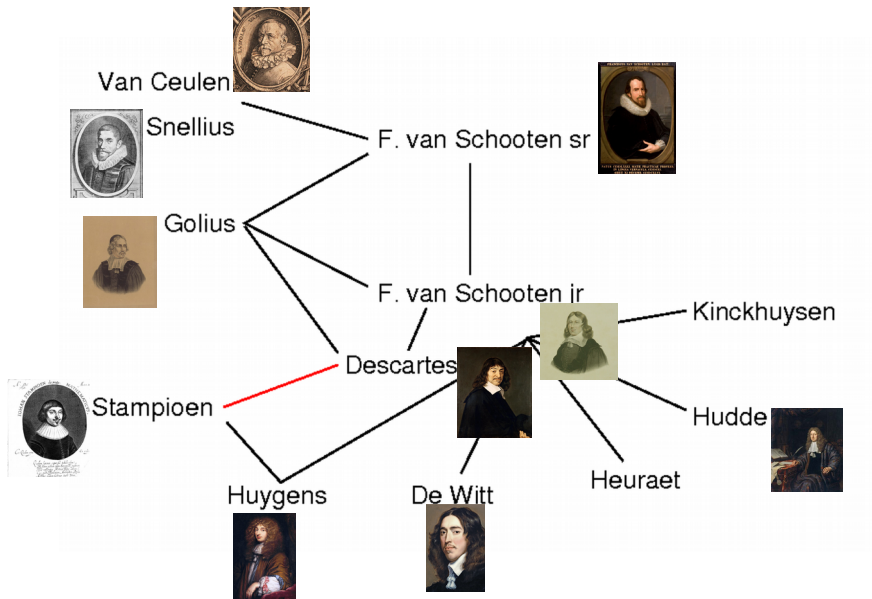


Wiskundenetwerk



Analyse en Synthese: Pappus, ca. 300

Analyse In analyse nemen we aan wat gezocht is alsof het er al is, we zoeken naar waar het uit volgt, en dan waar dat weer uit volgt, totdat we terug zijn bij iets dat we al weten.

Synthese In synthese daarentegen, beginnen we bij het laatste punt van de analyse dat we al wisten, en daarna zetten we de eerdere gevolgtrekkingen in hun natuurlijke volgorde, als precedenten, en we sinteren ze aaneen totdat we het doel bereikt hebben.

Analyse is een vindmethode, synthese geeft een mooi deductief bouwwerk

Diderot, d'Alembert: *Encyclopédie* 1751



“**Analyse** is precies de methode om wiskundige problemen op te lossen, door ze te reduceren tot vergelijkingen. Om problemen op te lossen gebruikt de analyse de algebra, of de rekening van grootheden in het algemeen: de woorden Analyse en Algebra worden dan ook vaak als **synonym** gezien.”

“Analytische Meetkunde” in de *Encyclopédie* 1751



Application de l'Algebre ou de l'Analyse à la Géométrie

“In de Meetkunde van Descartes vindt men **voor het eerst** de **toepassing van de algebra op de meetkunde**, evenals uitmuntende methoden om de **algebra zelf te perfectioneren**: dit grote genie heeft daarmee een onsterfelijke dienst bewezen aan de Wiskunde, en heeft de sleutel gegeven tot de grootste ontdekkingen die men mag hopen te maken in deze wetenschap.”

Doel van de *Géométrie* 1637



“Alle meetkundige problemen kunnen eenvoudig worden herleid tot zulke termen, dat het daarna alleen nodig is de **lengte** van enkele rechten te kennen, om ze [= de oplossingen] te **construeren**”

Doel van de *Géométrie* 1637



“Alle meetkundige problemen kunnen eenvoudig worden herleid tot zulke termen, dat het daarna alleen nodig is de *lengte* van enkele rechten te kennen, om ze [= de oplossingen] te *construeren*”

Dus: oplossingen van meetkundige problemen construeren.

“Herleiding” blijkt te zijn: vertaal het probleem in een algebraïsche vergelijking en los op.

Doel van de *Géométrie* 1637



“Alle meetkundige problemen kunnen eenvoudig worden herleid tot zulke termen, dat het daarna alleen nodig is de **lengte** van enkele rechten te kennen, om ze [= de oplossingen] te **construeren**”

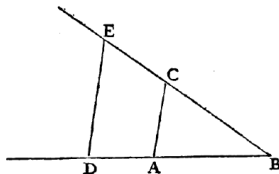
Dus: oplossingen van meetkundige problemen construeren.

“Herleiding” blijkt te zijn: vertaal het probleem in een algebraïsche vergelijking en los op.

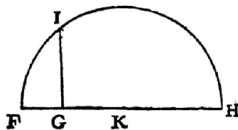
Descartes' diepere doel is om “zekere/exacte” methoden te ontwikkelen voor het oplossen van meetkundige problemen.

Canon van meetkundige constructie

La Multi-
plication.



l'Extra-
ction de la
racine
quarrée.

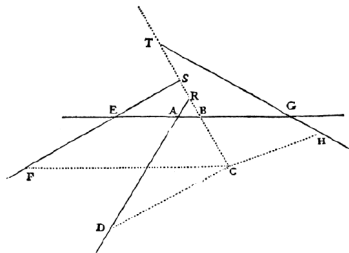


*De algebraïsche “oplossing”
moet dus wel meetkundig
geconstrueerd worden.*

Na keuze van een
eenheidslijnstuk kun je
meetkundige constructies
geven die overeenkomen met
de algebraïsche operaties $+$, $-$,
 $\times$, $\div$, $\sqrt{}$.

(NB: Hogere-orde wortels blijft
gedeeltelijk een probleem)

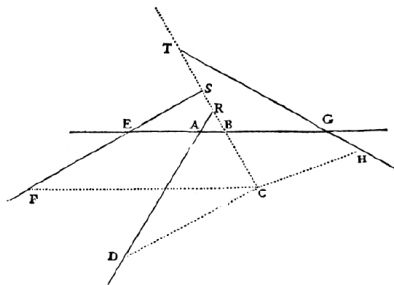
Pappusprobleem oplossen



Descartes:

“Allereerst onderstel ik dat de zaak geklaard is, en om me te redden uit de wirwar van rechten beschouw ik een van de gegeven rechten, en een van die welke gezocht moeten worden, bijvoorbeeld AB en CB, als de belangrijkste waarop ik alle andere zal proberen te betrekken”

Pappusprobleem oplossen



Geef namen aan de bekende en onbekende grootheden.

De onbekenden zijn: $AB = x$
en $BC = y$.

Na veel gemanipuleer:

$$y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{m^2 + ox - \frac{p}{m}x^2}$$

M.a.w.: bij elke keuze van $x = AB$ is $y = BC$ te construeren.

Bovendien liggen alle punten C op een kegelsnede.

Analytische meetkunde?

- ▶ Geen “Cartesiaans coördinatenstelsel”, geen coördinaten.
- ▶ Alle grootheden x , y , etc zijn en blijven (meetkundige) *lengten* en zijn dus positief. Dit leidt tot veel gevalsonderscheidingen.
- ▶ De algebra levert weliswaar een techniek voor *analyse* d.w.z. *vinding*, maar een meetkundig probleem vereist toch een *synthese*, een meetkundige constructie als oplossing.

Descartes = Analytische Meetkunde?



Waarom dan toch Decartes als uitvinder? Bos:

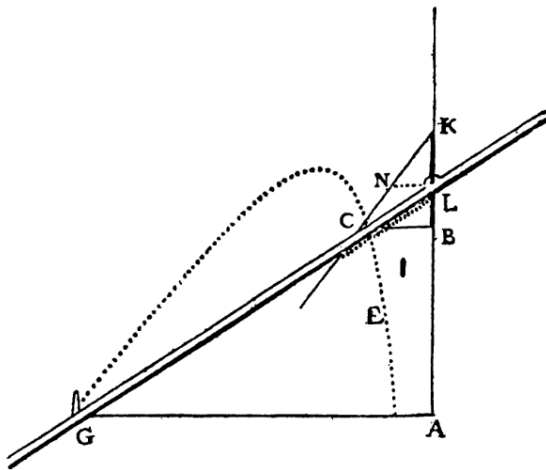
“... omdat latere lezers van het boek zich vooral door de algebraïsche technieken lieten inspireren en weinig interesse toonden in de methodologische problemen die voor Descartes zo belangrijk waren geweest.”

Methodologische kwesties

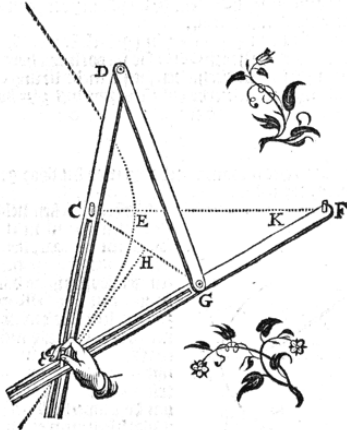
Legitimatie volgens Descartes:

- ▶ Een kromme heeft bestaansrecht in de meetkunde als je er een constructie voor hebt.
- ▶ Als constructie is toegestaan: het snijpunt nemen van twee continu bewegende krommen (of rechten), waarbij de bewegingen slechts van één enkele “basisbeweging” afhangen.
- ▶ Deze krommen blijken precies de algebraïsche krommen te zijn. Alle andere krommen zijn “mechanisch” of “transcendent”.

Voorbeeld van constructie



Voorbeeld (Van Schooten)



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore *J. S. NEWTON*, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos
Professore *Lucasiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. P E P Y S, Reg. Soc. P R Æ S E S.
Julii 5. 1686.

L O N D I N I;
Jussu Societatis Regiæ ac Typis *Josephi Streater*. Prostant Vena-
les apud *Sam. Smith* ad insignia Principis *Walliæ* in Coemiterio
D. Pauli, aliosq; nonnullos Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

P R Æ F A T I O

A D

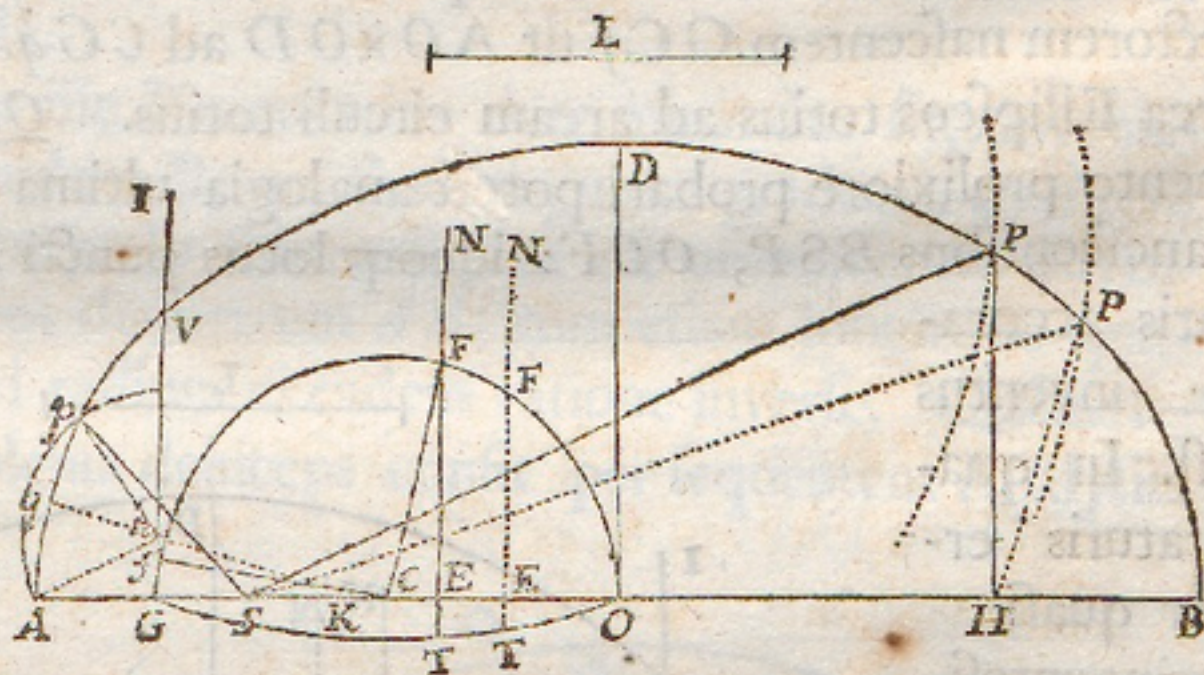
L E C T O R E M.

Cum Veteres Mechanicam (uti Author est Pappus) in rerum Naturalium investigatione maximi fecerint, & recentiores, missis formis substantialibus & qualitatibus occultis, Phenomena Naturæ ad leges Mathematicas revocare aggressi sint: Visum est in hoc Tractatu Mathesin excolere quatenus ea ad Philosophiam spectat. Mechanicam vero duplicem Veteres constituerunt: Rationalem quæ per Demonstrationes accurate procedit, & Practicam. Ad practicam spectant Artes omnes Manuales, a quibus utiq; Mechanica nomen mutuata est. Cum autem Artifices parum accurate operari soleant, fit ut Mechanica omnis a Geometria ita distinguatur, ut quicquid accuratum sit ad Geometriam referatur, quicquid minus accuratum ad Mechanicam. Attamen errores non sunt Artis sed Artificum. Qui minus accurate operatur, imperfectior est Mechanicus, & si quis accuratissime operari posset, hic foret Mechanicus omnium perfectissimus. Nam & Linearum rectarum & Circulorum descriptiones in quibus Geometria fundatur, ad Mechanicam pertinent. Has lineas describere Geometria non docet sed postulat. Postulat enim ut Tyro easdem accurate describere prius didicerit quam limen attingat Geometriæ; dein, quomodo per has operationes Problemata solvantur, docet. Rectas & circulos describere Problemata sunt sed non Geometrica. Ex Mechanica postulatur horum solutio, in Geometria docetur solutorum usus. Ac gloriatur Geometria quod tam paucis principiis aliunde petitis tam multa præstet. Fundatur igitur Geometria in praxi Mechanica, & nihil aliud est quam Mechanicæ universalis pars illa quæ artem mensurandi accurate proponit ac demonstrat. Cum autem artes Manuales in corporibus movendis præcipue versentur, fit ut Geometria ad magnitudinem, Mechanica ad motum vulgo referatur. Quo sensu Mechanica rationalis erit Scientia Motuum qui ex viribus quibuscunq; resultant, & virium quæ ad motus quoscunq; requiruntur, accurate proposita ac demonstrata. Pars hæc Mechanicæ a Veteribus in Potentiis quinque ad artes manuales spectantibus exculta fuit, qui Gravitatem (cum potentia manualis non sit) vix aliter quam in ponderibus per potentias illas movendis considerarunt. Nos autem non Artibus sed Philosophiæ consulentes, deq; potentiis non manualibus sed naturalibus scribes, ea maxime tractamus quæ ad Gravitatem, levitatem, vim Elasticam, r. sisten-
tiam

Cæterum ob difficultatem describendi hanc curvam præstat constructiones vero proximas in praxi Mechanica adhibere. ¶ Ellipseos cujuscvis APB sit AB axis major, O centrum, S umbilicus, OD semiaxis minor, & AK dimidium lateris recti. Secetur AS in G , ut sit AG ad AS ut BO ad BS ; & quærat^r longitudo L , quæ sit ad $\frac{1}{2} GK$ ut est AO quad. ad rectangulum $AS \times OD$. Bisecetur OG in C , centroq; C & intervallo CG describatur semicirculus GFO . Deniq; capiatur angulus GCF in ea ratione ad angulos qua-

tuor rectos, quam habet tempus datum, quo corpus descrip-
sit arcum quæsitum AP , ad tempus periodicum seu revoluti-
onis unius in

Ellipsi: Ad AO demittatur normalis FE , & producat^r eadem
versus F ad usq; N , ut sit EN ad longitudinem L , ut anguli illius
sinus EF ad radium CF ; centroq; N & intervallo AN descriptus
circulus secabit Ellipsin in corporis loco quæsito P quam proxime.



*Haec curva
ad pini vocabula
Invenitur tam
angulus 2^o omitt
tantum in 62.2^a
et 3^a.*