

# Van meetkunde naar analyse

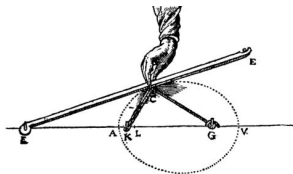
Steven Wepster

Departement Wiskunde  
Universiteit Utrecht

17 maart 2025

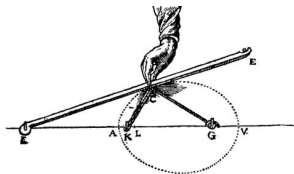
# Het begin

- 17e eeuw: *meetkundige* vragen over krommen, zoals:



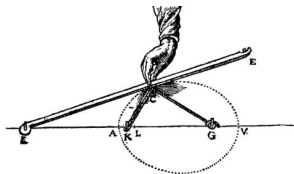
# Het begin

- ▶ 17e eeuw: *meetkundige* vragen over krommen, zoals:
  - ▶ rectificatie: booglengte van de kromme



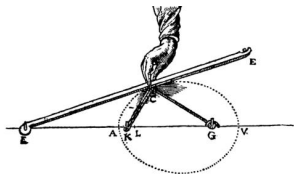
# Het begin

- ▶ 17e eeuw: *meetkundige* vragen over krommen, zoals:
  - ▶ rectificatie: booglengte van de kromme
  - ▶ tangenten (raaklijnen)



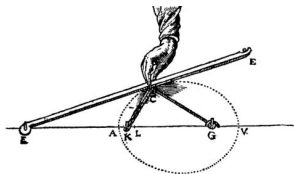
# Het begin

- ▶ 17e eeuw: *meetkundige* vragen over krommen, zoals:
  - ▶ rectificatie: booglengte van de kromme
  - ▶ tangenten (raaklijnen)
  - ▶ quadratuur (oppervlakte)



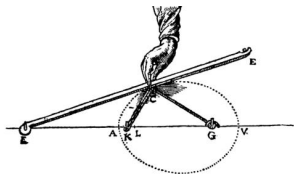
# Het begin

- ▶ 17e eeuw: *meetkundige* vragen over krommen, zoals:
  - ▶ rectificatie: booglengte van de kromme
  - ▶ tangenten (raaklijnen)
  - ▶ quadratuur (oppervlakte)
  - ▶ omgekeerd probleem:  
vind een kromme waarvan de raaklijnen gegeven zijn.



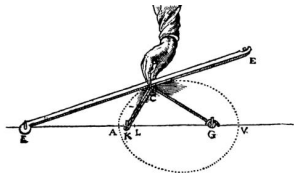
# Het begin

- ▶ 17e eeuw: *meetkundige* vragen over krommen, zoals:
  - ▶ rectificatie: booglengte van de kromme
  - ▶ tangenten (raaklijnen)
  - ▶ quadratuur (oppervlakte)
  - ▶ omgekeerd probleem:  
vind een kromme waarvan de raaklijnen gegeven zijn.
- ▶ de meetkunde stond voorop! formules hadden nauwelijks betekenis



# Het begin

- ▶ 17e eeuw: *meetkundige* vragen over krommen, zoals:
  - ▶ rectificatie: booglengte van de kromme
  - ▶ tangenten (raaklijnen)
  - ▶ quadratuur (oppervlakte)
  - ▶ omgekeerd probleem:  
vind een kromme waarvan de raaklijnen gegeven zijn.
- ▶ de meetkunde stond voorop! formules hadden nauwelijks betekenis
- ▶ “raaklijn” en “oppervlakte” lijken niet op inverse van elkaar (ca 1675)



# Newton, Leibniz als grondleggers van infi

Waarom zij? Omdat zij:

- ▶ al zulke problemen reduceren tot twee: raaklijn en quadratuur;
- ▶ inzien dat raaklijn en quadratuur inverse problemen zijn;
- ▶ algemene methoden (algoritmen) hebben die voor alle krommen werken.

# Newton's wonderjaren 1665-66

In the beginning of the year 1665 I found the Method of approximating series & the Rule for reducing any dignity of any Binomial into such a series. The same year in May I found the method of Tangents . . . , & in November had the direct method of fluxions & the next year in January had the Theory of Colours & in May following I had entrance into  $y^e$  inverse method of fluxions. And the same year I began to think of gravity extending to  $y^e$  orb of the Moon & (having found out how to estimate the force with  $w^{th}$  globe revolving within a sphere presses the surface of the sphere) from Keplers rule . . . I deduced that the forces  $w^{th}$  keep the Planets in their Orbs must [be] reciprocally as the squares of their distances from the centers about  $w^{th}$  they revolve: & thereby compared the force requisite to keep the Moon in her Orb with the force of gravity at the surface of the earth, & found them answer pretty nearly. *All this was in the two plague years of 1665 & 1666.* For in those days I was in the prime of my age for invention & minded Mathematicks & Philosophy more then at any time since.

—ISAAC NEWTON<sup>1</sup>

Newton ontdekt:

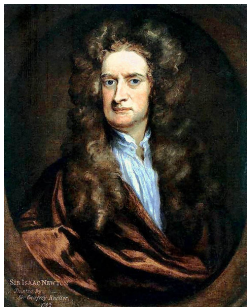
de calculus,

de het spectrum van licht,

de gravitatiewet,

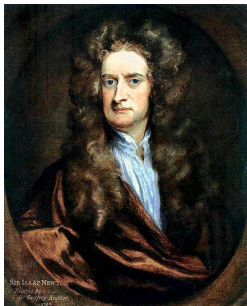
op 23-jarige leeftijd, wanneer de universiteit van Cambridge gesloten is vanwege de pest.

# Newton's fluxierekening



stel  $y$  is een grootheid

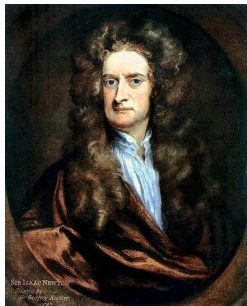
# Newton's fluxierekening



stel  $y$  is een grootheid

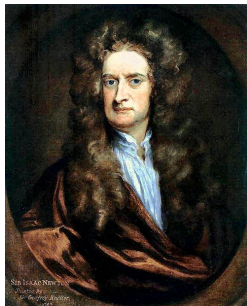
dan  $\dot{y}$  "*fluxie*" van  $y$ , d.w.z. de snelheid waarmee  $y$  verandert

# Newtons fluxierekening



stel  $y$  is een grootheid  
dan  $\dot{y}$  “fluxie” van  $y$ , d.w.z. de snelheid waarmee  $y$  verandert  
en  $\ddot{y}$  de fluxie van  $\dot{y}$  etc.

# Newton's fluxierekening



stel  $y$  is een grootheid  
dan  $\dot{y}$  "*fluxie*" van  $y$ , d.w.z. de snelheid waarmee  $y$  verandert  
en  $\ddot{y}$  de fluxie van  $\dot{y}$  etc.  
omgekeerd is  $y$  de "*fluent*" van  $\dot{y}$

## zo werkt Newton met fluxies

Hij beschouwt een infinitesimaal kort tijdsinterval  $o$ : dit is verwaarloosbaar klein maar niet 0.

## zo werkt Newton met fluxies

Hij beschouwt een infinitesimaal kort tijdsinterval  $o$ : dit is verwaarloosbaar klein maar niet 0.

Dus: na een infinitesimaal kort tijdsinterval  $o$  is  $y$  toegenomen met de grootte  $\dot{y}o$

## zo werkt Newton met fluxies

Hij beschouwt een infinitesimaal kort tijdsinterval  $o$ : dit is verwaarloosbaar klein maar niet 0.

Dus: na een infinitesimaal kort tijdsinterval  $o$  is  $y$  toegenomen met de grootte  $\dot{y}o$

Op een kromme met vergelijking  $y = x^2$  geldt:

$$y + \dot{y}o = (x + \dot{x}o)^2$$

## zo werkt Newton met fluxies

Hij beschouwt een infinitesimaal kort tijdsinterval  $o$ : dit is verwaarloosbaar klein maar niet 0.

Dus: na een infinitesimaal kort tijdsinterval  $o$  is  $y$  toegenomen met de grootte  $\dot{y}o$

Op een kromme met vergelijking  $y = x^2$  geldt:

$$y + \dot{y}o = (x + \dot{x}o)^2$$

$$y + \dot{y}o = x^2 + 2x\dot{x}o + \dot{x}^2o^2$$

## zo werkt Newton met fluxies

Hij beschouwt een infinitesimaal kort tijdsinterval  $o$ : dit is verwaarloosbaar klein maar niet 0.

Dus: na een infinitesimaal kort tijdsinterval  $o$  is  $y$  toegenomen met de grootte  $\dot{y}o$

Op een kromme met vergelijking  $y = x^2$  geldt:

$$y + \dot{y}o = (x + \dot{x}o)^2$$

$$y + \dot{y}o = x^2 + 2x\dot{x}o + \dot{x}^2o^2$$

$$\dot{y}o = 2x\dot{x}o + \dot{x}^2o^2$$

## zo werkt Newton met fluxies

Hij beschouwt een infinitesimaal kort tijdsinterval  $o$ : dit is verwaarloosbaar klein maar niet 0.

Dus: na een infinitesimaal kort tijdsinterval  $o$  is  $y$  toegenomen met de grootheid  $\dot{y}o$

Op een kromme met vergelijking  $y = x^2$  geldt:

$$y + \dot{y}o = (x + \dot{x}o)^2$$

$$y + \dot{y}o = x^2 + 2x\dot{x}o + \dot{x}^2o^2$$

$$\dot{y}o = 2x\dot{x}o + \dot{x}^2o^2$$

$$\dot{y} = 2x\dot{x} + \dot{x}^2o$$

## zo werkt Newton met fluxies

Hij beschouwt een infinitesimaal kort tijdsinterval  $o$ : dit is verwaarloosbaar klein maar niet 0.

Dus: na een infinitesimaal kort tijdsinterval  $o$  is  $y$  toegenomen met de grootte  $\dot{y}o$

Op een kromme met vergelijking  $y = x^2$  geldt:

$$y + \dot{y}o = (x + \dot{x}o)^2$$

$$y + \dot{y}o = x^2 + 2x\dot{x}o + \dot{x}^2o^2$$

$$\dot{y}o = 2x\dot{x}o + \dot{x}^2o^2$$

$$\dot{y} = 2x\dot{x} + \dot{x}^2o$$

$$\dot{y} = 2x\dot{x}.$$

# Gottfried Wilhelm Leibniz



Vergelijkbare ideeën als bij Newton:

# Gottfried Wilhelm Leibniz



Vergelijkbare ideeën als bij Newton:  
 $dy$  is een “infinitesimale” toename van  $y$

# Gottfried Wilhelm Leibniz



Vergelijkbare ideeën als bij Newton:

$dy$  is een “infinitesimale” toename van  $y$

$\int dy$  is de sommatie van een oneindig aantal infinitesimalen

# Gottfried Wilhelm Leibniz



Vergelijkbare ideeën als bij Newton:

$dy$  is een “infinitesimale” toename van  $y$

$\int dy$  is de sommatie van een oneindig aantal infinitesimalen

Wel:  $y + dy = y$ , maar niet:  $dy \neq 0$ ;

# Gottfried Wilhelm Leibniz



Vergelijkbare ideeën als bij Newton:

$dy$  is een “infinitesimale” toename van  $y$

$\int dy$  is de sommatie van een oneindig aantal infinitesimalen

Wel:  $y + dy = y$ , maar niet:  $dy \neq 0$ ;

zo kan de breuk  $\frac{dy}{dx}$  bestaan;

# Gottfried Wilhelm Leibniz



Vergelijkbare ideeën als bij Newton:

$dy$  is een “infinitesimale” toename van  $y$

$\int dy$  is de sommatie van een oneindig aantal infinitesimalen

Wel:  $y + dy = y$ , maar niet:  $dy \neq 0$ ;

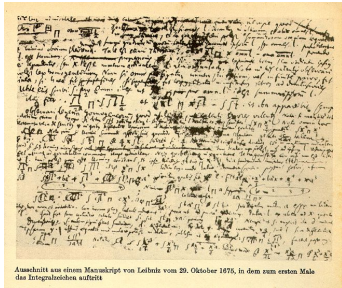
zo kan de breuk  $\frac{dy}{dx}$  bestaan;

Leibniz' notatie “denkt” voor je.

# Grondslag van de calculus bij Leibniz

Uit een manuscript van Leibniz:

*Grondslag van de calculus: verschillen en sommen zijn aan elkaar reciprook, dwz: de som van de differenties van een rij is de term van de rij, en het verschil van de sommen van de rij is ook de term van de rij. De eerste schrijf ik zo:  $\int dx$  aequ.  $x$ , de laatste zo:  $d \int x$  aequ.  $x$ .*



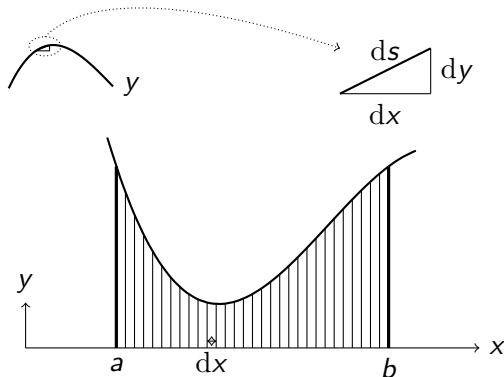
# Toepassen op krommen

Deel kromme op in eindig veel rechte stukjes, elk met abscis  $x_n$  en ordinaat  $y_n$ .

Helling van "raaklijn"  $\leftrightarrow$  differenties  $dy$ ,  $dx$  delen

Quadratuur  $\leftrightarrow$   $y \, dx$  of  $x \, dy$  sommeren

Booglengte  $\leftrightarrow$   $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$  sommeren



*Dit is exact als je een oneindig aantal stukjes neemt.*

# Leibniz' infinitesimaalrekening

Merk op:

- ▶ evident dat  $\int$  en  $d$  inverse operaties zijn;
- ▶ de Hoofdstelling is triviaal
- ▶ notatie geschikt voor algoritmische, algebraïsche manipulaties
- ▶ concepten zijn verankerd in meetkunde



# Leibniz' infinitesimaalrekening

Merk op:

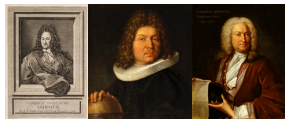
- ▶ evident dat  $\int$  en  $d$  inverse operaties zijn;
- ▶ de Hoofdstelling is triviaal
- ▶ notatie geschikt voor algoritmische, algebraïsche manipulaties
- ▶ concepten zijn verankerd in meetkunde



# Leibniz' infinitesimaalrekening

Merk op:

- ▶ evident dat  $\int$  en  $d$  inverse operaties zijn;
- ▶ de Hoofdstelling is triviaal
- ▶ notatie geschikt voor algoritmische, algebraïsche manipulaties
- ▶ concepten zijn verankerd in meetkunde



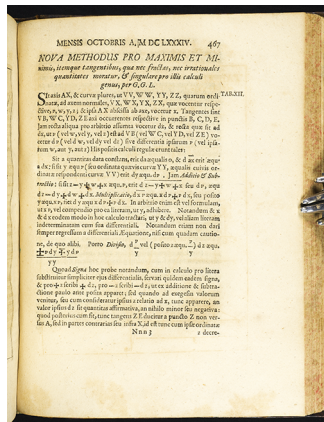
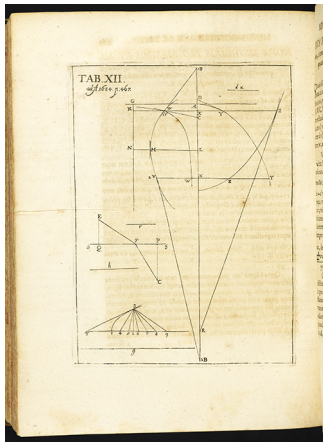
# Leibniz' infinitesimaalrekening

Merk op:

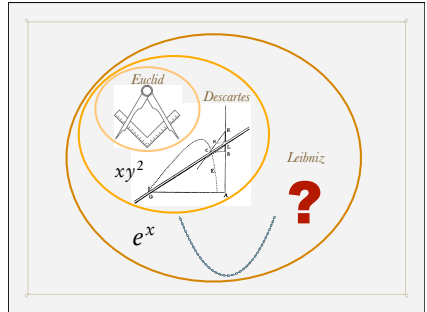
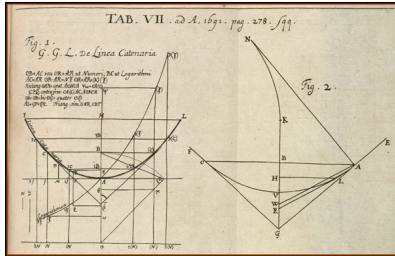
- ▶ evident dat  $\int$  en  $d$  inverse operaties zijn;
- ▶ de Hoofdstelling is triviaal
- ▶ notatie geschikt voor algoritmische, algebraïsche manipulaties
- ▶ concepten zijn verankerd in meetkunde



# Eerste publicatie: Acta Eruditorum, oct 1684



# Mechanische krommen

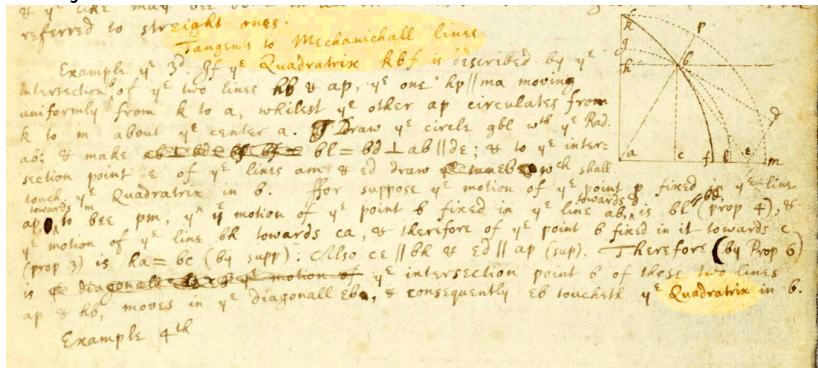


- ▶ meetkunde primair
- ▶ door de natuur gegeven krommen zijn legitiem
- ▶ formules secundair
- ▶ dus kettinglijn superieur aan logaritme

## Meetkundige vraagstukken nog steeds centraal

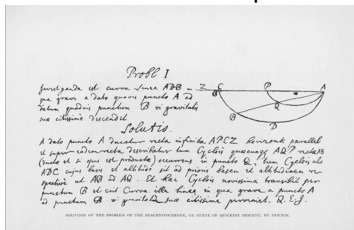
Newton, *Oct 1666 Tract*:

raaklijnen aan mechanische krommen

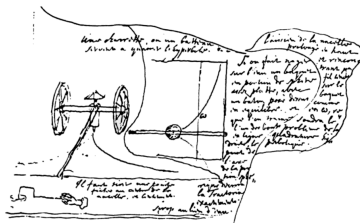


# Meetkundige vraagstukken nog steeds centraal

## Het brachistochroonprobleem



## De tractrix van Huygens



# Reeksen: een resultaat van Leibniz

Reeksen opgevat als polynomen maar dan oneindig...

Staartdelen:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \dots$$

## Reeksen: een resultaat van Leibniz

Reeksen opgevat als polynomen maar dan oneindig...

Staartdelen:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \dots$$

Integreer term voor term:

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 \dots$$

# Reeksen: een resultaat van Leibniz

Reeksen opgevat als polynomen maar dan oneindig...

Staartdelen:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \dots$$

Integreer term voor term:

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 \dots$$

Neem  $x = 1$ :

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots$$

# Reeksen: een resultaat van Leibniz

Reeksen opgevat als polynomen maar dan oneindig...

Staartdelen:

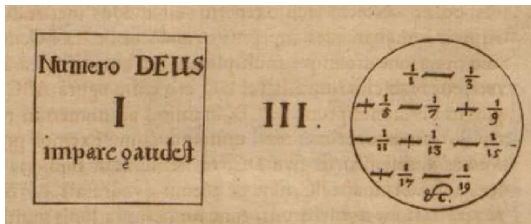
$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \dots$$

Integreer term voor term:

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 \dots$$

Neem  $x = 1$ :

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots$$



“God vermaakt zich  
met de oneven  
getallen”

# Reeksen: Euler, het Bazelprobleem

Sinus tayloren en delen door  $x$ :

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 \dots$$



# Reeksen: Euler, het Bazelprobleem



Sinus tayloren en delen door  $x$ :

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 \dots$$

De linkerkant heeft nulpunten  $x = \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$ ,  
de rechterkant dus ook!

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \dots$$

# Reeksen: Euler, het Bazelprobleem



Sinus tayloren en delen door  $x$ :

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 \dots$$

De linkerkant heeft nulpunten  $x = \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$ ,  
de rechterkant dus ook!

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{x} &= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \dots \\ &= 1 - \frac{x^2}{\pi^2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots\right) + \frac{x^4}{\pi^4}(\dots) + \dots\end{aligned}$$

# Reeksen: Euler, het Bazelprobleem



Sinus tayloren en delen door  $x$ :

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 \dots$$

De linkerkant heeft nulpunten  $x = \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$ ,  
de rechterkant dus ook!

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{x} &= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \dots \\ &= 1 - \frac{x^2}{\pi^2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots\right) + \frac{x^4}{\pi^4}(\dots) + \dots\end{aligned}$$

Concludeer:

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots\right).$$

# Van meetkunde naar infinitesimaalrekening

18e eeuw: belangrijke resultaten! o.a.:

- ▶ reeksen, stelling van Taylor,
- ▶ (hemel)mechanica, variatierekening
- ▶ introductie van functies
- ▶ (partiële) differentiaalvergelijkingen

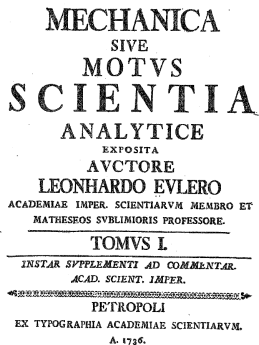
# Van meetkunde naar infinitesimaalrekening

18e eeuw: belangrijke resultaten! o.a.:

- ▶ reeksen, stelling van Taylor,
- ▶ (hemel)mechanica, variatierekening
- ▶ introductie van functies
- ▶ (partiële) differentiaalvergelijkingen

**gewenning en gemak**: steeds meer vertrouwen in formules i.p.v. meetkunde.

# Analyse versus Synthese



*... ik heb geprobeerd de analyse aan de synthetische methode te onttrekken, en dezelfde proposities tot mijn eigen voordeel analytisch te behandelen, waardoor ik merkte dat mijn begrip aanmerkelijk is toegenomen.*<sup>a</sup>

---

<sup>a</sup>Euler 1736, *Mechanica*, voorwoord

# MAAR... kan dat allemaal zomaar?!



George Berkeley, bisschop en filosoof, publiceert in 1734:  
*The Analyst; or a Discourse Addressed to an Infidel  
Mathematician, Wherein It Is Examined Whether the Object,  
Principles, and Inferences of the Modern Analysis are More  
Distinctly Conceived, or More Evidently Deduced, than Religious  
Mysteries and Points of Faith*

– Een stevige kritiek op de gebrekkige grondslagen van de  
infinitesimaalrekening (met name Newton).

# Citaat van Berkeley

*Hoe verder het brein deze vluchtende ideeën analyseert en najaagt, hoe verder het zich verliest in verwildering: de objecten, die eerst nog vluchtig en minuscuul zijn, verdwijnen snel uit het zicht. . .*

## Citaat van Berkeley

*Hoe verder het brein deze vluchtende ideeën analyseert en najaagt, hoe verder het zich verliest in verwildering: de objecten, die eerst nog vluchtig en minuscuul zijn, verdwijnen snel uit het zicht. . .*

*En wat zijn fluxies? De snelheden van verdwijnende incrementen? En wat zijn dát dan weer? Ze zijn noch eindige grootheden, noch oneindig kleine grootheden, ze zijn zelfs niet niets. Moeten we ze de “**Geesten van Verdwenen Grootheden**” noemen?*

De resultaten mochten dan verbluffend zijn, methodologisch werkte het volgens hem alleen door elkaar opheffende fouten. . .

# Euler over infinitesimalen

*Een oneindig kleine grootheid is niets anders dan een verdwijnende grootheid, en dus is het werkelijk gelijk aan 0.*

...

*Iedereen weet [...] dat  $n \cdot 0 = 0$ , en dus ook  $n : 1 = 0 : 0$ . Hiermee is duidelijk dat elk tweetal nullen **meetkundig** een verhouding kunnen hebben, terwijl rekenkundig bekeken de verhouding er een van gelijken is. Tussen nullen is dus elke verhouding mogelijk, daarom gebruiken we in deze wirwar opzettelijk een andere notatie...<sup>1</sup>*

...namelijk  $dx$ ,  $dy$  etc.

---

<sup>1</sup>Euler 1755: *Institutiones Calculi Differentialis* §83, 85

## Euler concludeert:

*[H]et bezwaar tegen de analyse, dat het niet **meetkundig rigoureu**s zou zijn, stort in onder z'n eigen gewicht; er wordt namelijk niets verwaarloosd behalve dat wat al niets is. [We houden dus volledig vast aan] **dezelfde volmaakte meetkundige strengheid als in de boeken van de klassieken**.*

## 50 jaar na Berkeley

Nog in 1784 schrijft de Academie van Berlijn (o.l.v. Lagrange) een prijsvraag uit:

*Het is algemeen bekend dat in [de wiskunde] regelmatig “oneindig groot” en “oneindig klein” gebruikt worden. . . De Academie verlangt een verklaring voor hoe het kan dat zoveel correcte stellingen zijn afgeleid uit een tegenstrijdige aanname.*

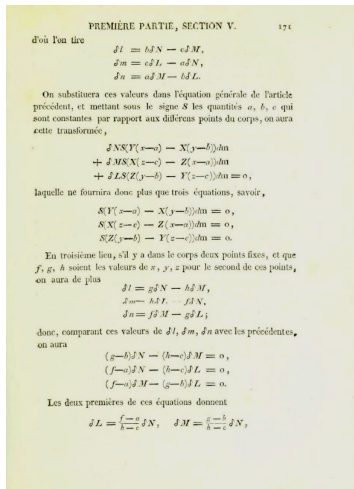


Er komt inderdaad wel respons maar nog niet erg bevredigend.

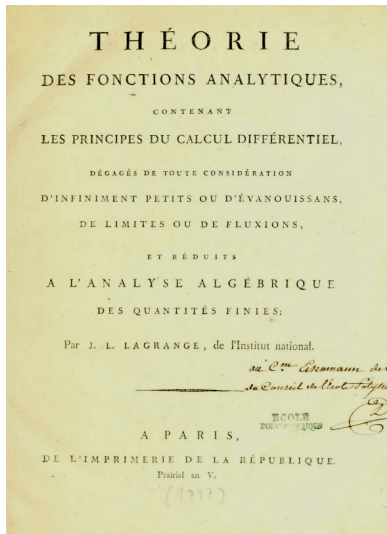
# Lagrange, *Mecanique Analytique*, 1788



“Afbeeldingen komen in dit boek niet voor. De methoden die ik hier uiteenzet, vereisen noch constructies, noch meetkundige of mechanische redeneringen, maar uitsluitend **algebraïsche** operaties volgens een uniforme en reguliere procedure”



# Lagrange, 1797



Theorie  
van de analytische functies  
bevattende  
de principes van de  
differentiaalrekening  
ontdaan van elke beschouwing  
van het oneindig kleine of het  
verdwijnende,  
van limieten of van fluxies,  
en teruggebracht  
tot de algebraïsche analyse  
van eindige grootheden.

## Lagrange, 1797

3. Considérons donc une fonction  $fx$  d'une variable quelconque  $x$ . Si à la place de  $x$  on met  $x + i$ ,  $i$  étant une quantité quelconque indéterminée, elle deviendra  $f(x + i)$ ; et par la théorie des séries on pourra la développer en une suite de cette forme  $fx + pi + qi^2 + ri^3 + \&c.$ , dans laquelle les quantités  $p, q, r, \&c.$ , coefficients des puissances de  $i$ , seront de nouvelles fonctions de  $x$ , dérivées de la fonction primitive  $fx$ , et indépendantes de la quantité  $i$ .

Il est clair que la forme des fonctions  $p, q, r, \&c.$  dépendra uniquement de celle de la fonction  $fx$ ; et on déterminera aisément ces fonctions dans les cas particuliers par les règles ordinaires de l'algèbre, en développant la fonction dans une série ordonnée suivant les puissances de  $i$ .

Hij gaat ervan uit dat elke functie  $f(x)$  een reeksontwikkeling heeft:

$$f(x + \varepsilon) = f(x) + p\varepsilon + q\varepsilon^2 + r\varepsilon^3 + \dots$$

en daarna definieert hij de afgeleiden als:

$$f'(x) = p, \quad f''(x) = 2q, \quad \dots$$

## Lagrange, 1797

3. Considérons donc une fonction  $fx$  d'une variable quelconque  $x$ . Si à la place de  $x$  on met  $x + i$ ,  $i$  étant une quantité quelconque indéterminée, elle deviendra  $f(x + i)$ ; et par la théorie des séries on pourra la développer en une suite de cette forme  $fx + pi + qi^2 + ri^3 + \&c.$ , dans laquelle les quantités  $p, q, r, \&c.$ , coefficients des puissances de  $i$ , seront de nouvelles fonctions de  $x$ , dérivées de la fonction primitive  $fx$ , et indépendantes de la quantité  $i$ .

Il est clair que la forme des fonctions  $p, q, r, \&c.$  dépendra uniquement de celle de la fonction  $fx$ ; et on déterminera aisément ces fonctions dans les cas particuliers par les règles ordinaires de l'algèbre, en développant la fonction dans une série ordonnée suivant les puissances de  $i$ .

Hij gaat ervan uit dat elke functie  $f(x)$  een reeksontwikkeling heeft:

$$f(x + \varepsilon) = f(x) + p\varepsilon + q\varepsilon^2 + r\varepsilon^3 + \dots$$

en daarna definieert hij de afgeleiden als:

$$f'(x) = p, \quad f''(x) = 2q, \quad \dots$$

Dit is een schijn-oplossing, want het bestaan van de reeksontwikkeling kun je alleen aantonen met limieten...

# Wat verstaat men eigenlijk onder “functie”?

Euler (1748): *een functie van een variabele grootheid is een analytische uitdrukking die op een of andere manier is samengesteld uit de variabele en constanten.*

# Wat verstaat men eigenlijk onder “functie”?

Euler (1748): *een functie van een variabele grootheid is een analytische uitdrukking die op een of andere manier is samengesteld uit de variabele en constanten.*

Oneindige sommaties geen probleem.

# Wat verstaat men eigenlijk onder “functie”?

Euler (1748): *een functie van een variabele grootheid is een analytische uitdrukking die op een of andere manier is samengesteld uit de variabele en constanten.*

Oneindige sommaties geen probleem.

Volgens Euler moet je dus het functievoorschrift hebben om van een functie te kunnen spreken!

# Wat verstaat men eigenlijk onder “functie”?

Euler (1748): *een functie van een variabele grootheid is een analytische uitdrukking die op een of andere manier is samengesteld uit de variabele en constanten.*

Oneindige sommaties geen probleem.

Volgens Euler moet je dus het functievoorschrift hebben om van een functie te kunnen spreken!

Deze opvatting kwam snel onder druk te staan.

# Het probleem van de trillende snaar

Golfvergelijking:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$



# Het probleem van de trillende snaar

Golfvergelijking:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Hierin is  $y(x, t)$  de uitwijking van de snaar op plaats  $x$  en tijd  $t$ .



# Het probleem van de trillende snaar

Golfvergelijking:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Hierin is  $y(x, t)$  de uitwijking van de snaar op plaats  $x$  en tijd  $t$ .

Oplossing van de golfvergelijking afhankelijk van de “randvoorwaarde”, d.w.z. de vorm van de snaar op  $t = 0$ .



# Het probleem van de trillende snaar

Golfvergelijking:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$



Hierin is  $y(x, t)$  de uitwijking van de snaar op plaats  $x$  en tijd  $t$ .

Oplossing van de golfvergelijking afhankelijk van de “randvoorwaarde”, d.w.z. de vorm van de snaar op  $t = 0$ .

d'Alembert: oplossing  $y(x, t) = f(t + x) + g(t - x)$  voor “willekeurige” functies  $f$  en  $g$

# Het probleem van de trillende snaar

Golfvergelijking:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$



Hierin is  $y(x, t)$  de uitwijking van de snaar op plaats  $x$  en tijd  $t$ .

Oplossing van de golfvergelijking afhankelijk van de “randvoorwaarde”, d.w.z. de vorm van de snaar op  $t = 0$ .

d'Alembert: oplossing  $y(x, t) = f(t + x) + g(t - x)$  voor “willekeurige” functies  $f$  en  $g$

Daniel Bernoulli: bijvoorbeeld  $f(x) = \sum a_k \sin(kx)$ ? Nee, dat wordt verworpen...

# Het probleem van de trillende snaar

Golfvergelijking:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$



Hierin is  $y(x, t)$  de uitwijking van de snaar op plaats  $x$  en tijd  $t$ .

Oplossing van de golfvergelijking afhankelijk van de “randvoorwaarde”, d.w.z. de vorm van de snaar op  $t = 0$ .

d'Alembert: oplossing  $y(x, t) = f(t + x) + g(t - x)$  voor “willekeurige” functies  $f$  en  $g$

Daniel Bernoulli: bijvoorbeeld  $f(x) = \sum a_k \sin(kx)$ ? Nee, dat wordt verworpen. . .

↪ fysische noodzaak om het functiebegrip te herzien

# Fourier en de warmtevergelijking 1



Warmtevergelijking (diffusie):

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = c \frac{\partial y}{\partial t}$$

Beschrijft de temperatuur  $y(x, t)$  op positie  $x$  en tijd  $t$ , van een (1-dim) staaf.

# Fourier en de warmtevergelijking 1



Warmtevergelijking (diffusie):

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = c \frac{\partial y}{\partial t}$$

Beschrijft de temperatuur  $y(x, t)$  op positie  $x$  en tijd  $t$ , van een (1-dim) staaf.

Randvoorwaarde: de begintemperatuur van de staaf is gegeven,  $y(x, 0) = f(x)$ .

# Fourier en de warmtevergelijking 1



Warmtevergelijking (diffusie):

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = c \frac{\partial y}{\partial t}$$

Beschrijft de temperatuur  $y(x, t)$  op positie  $x$  en tijd  $t$ , van een (1-dim) staaf.

Randvoorwaarde: de begintemperatuur van de staaf is gegeven,  $y(x, 0) = f(x)$ .

Fourier (ca 1807) ontdekte dat de oplossing relatief eenvoudig te vinden is als je mag aannemen dat voor zekere  $a_k$  en  $b_k$ :

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

## Fourier en de warmtevergelijking 2



Warmtevergelijking (diffusie):

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = c \frac{\partial y}{\partial t}$$

Randvoorwaarde:  $y(x, 0) = f(x)$ ,  $f$  een willekeurige functie

Fourier stelt:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

waarin

$$a_k = \int_0^L f(x) \cos kx \, dx, \quad b_k = \int_0^L f(x) \sin kx \, dx.$$

maar **integratie van willekeurige functies** was een nieuw fenomeen!

# Conclusie

- ▶ Infi kwam voort uit meetkundige vragen over krommen.
- ▶ Inspiratie: “mechanische” krommen, reeksen, fysische problemen.
- ▶ Fundamentele kritiek kon niet worden gepareerd.
- ▶ Toepassing op fysische problemen noopte tot herzien van concepten.
- ▶ De betekenis van de term *analyse* verschuift.