

Wiskunde in de 20e eeuw

Steven Wepster

1 april 2025



Outline

Context

Wie, wat, waar en \$\$\$

Grondslagen

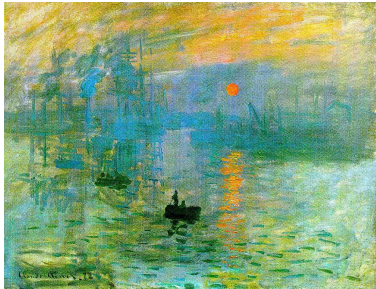
Bourbaki

Lokale geschiedenis: Hans Freudenthal

Computers

Tot slot

18e vs 19e eeuw



Maatschappelijk

twee wereldoorlogen
 koude oorlog en kernwapens
 onderwijs en gezondheidszorg
 industrie en transport
 massaproductie en massamedia
 computers, internet



Graf Hindenburg boven New York, 1937

Maatschappelijk

twee wereldoorlogen
 koude oorlog en kernwapens
 onderwijs en gezondheidszorg
 industrie en transport
 massaproductie en massamedia
 computers, internet



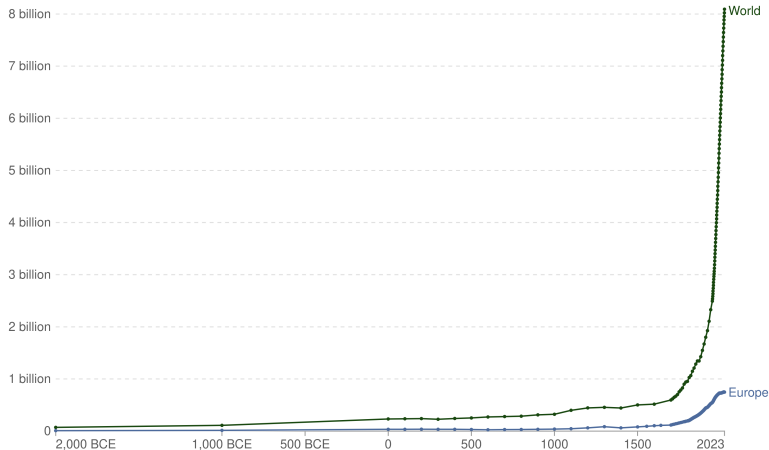
Graf Hindenburg boven New York, 1937

Tot 1940 is Duitsland wetenschappelijk leidend,
 daarna de USA en USSR.

Groei van de wereldbevolking

Population, 2,000 BCE to 2023

Our World
in Data



Outline

Context

Wie, wat, waar en \$\$\$

Grondslagen

Bourbaki

Lokale geschiedenis: Hans Freudenthal

Computers

Tot slot

Wie en Waar

Wie

Wiskundige is een betaalde baan na een studie

Waar

- ▶ Universiteiten (Göttingen, Harvard, MIT, Moskou)
- ▶ Research-instituten: IAS, Steklov Instituut, Max Planck Institut, IHES, CWI
- ▶ Industrie: Shell, NASA, ASML
- ▶ Tech: IBM, Microsoft, Google
- ▶ Financieel: banken, beleggers
- ▶ Onderwijs

Wie betaalt ervoor

- ▶ Universiteiten (door overheid en/of private investeerders)
- ▶ Grote onderzoeksbudgetten: ERC, NWO
- ▶ Bedrijven

Wie betaalt ervoor

- ▶ Universiteiten (door overheid en/of private investeerders)
- ▶ Grote onderzoeksbudgetten: ERC, NWO
- ▶ Bedrijven
- ▶ *Publish or Perish*

Wie betaalt ervoor

- ▶ Universiteiten (door overheid en/of private investeerders)
- ▶ Grote onderzoeksbudgetten: ERC, NWO
- ▶ Bedrijven
- ▶ *Publish or Perish*

Globaal 4 soorten financiering:

- ▶ Algemeen
- ▶ Doelgericht
projecten om specifieke problemen aan te pakken
- ▶ Uit eigen vermogen (Fermat, Huygens)
- ▶ Miskende genieën (Galois, Abel)

Het beroep van wiskundige

Vakorganisaties

- ▶ International Mathematical Union (IMU, 1920)
- ▶ European Mathematical Society (EMS, 1990)
- ▶ Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG, 1778)
onder de zinspreuk: *“een onvermoeide arbeid komt alles te boven”*

Verspreiding van kennis

- ▶ International Congress of Mathematicians ICM, om de 4 jaar
- ▶ Congressen
- ▶ Seminaria
- ▶ Tijdschriften algemeen of gespecialiseerd
- ▶ Boeken
- ▶ Email, brieven
- ▶ Onderwijs

Wat: aan de hand van Fieldsmedailles



De Fieldsmedaille wordt elke 4 jaar uitgereikt door de International Mathematical Union (IMU) als erkenning voor buitengewone wiskundige prestaties.

De prijswinnaars moeten jonger dan 40 jaar oud zijn.

De prijs is vernoemd naar Prof. J.C. Fields (1863–1932), hoogleraar in Toronto en bedenker van het idee.



Wat: Fieldsmedailles

1936	Ahlfors	Riemannoppervlakken
	Douglas	minimale oppervlakken
1950	Schwartz	distributies
	Selberg	priemgetallen, Riemann ζ -functie
1954	Kodaira	differentiaalmeetkunde, Hodgetheorie
	Serre	homotopiegroepen, schoven
1958	Roth	getaltheorie
	Thom	cobordisme, differentieerbare variëteiten
1962	Hörmander	p.d.v., operatoren
	Milnor	schepping van differentiaaltopologie
1966	Atiyah	o.a. K-theorie en complexe variëteiten
	Cohen	keuze-axioma en continuümhypothese
	Grothendieck	K-theorie, homologe algebra
	Smale	differentiaaltopologie
1970	Baker	transcendente getallen
	Hironaka	singulariteiten op algebraïsche variëteiten
	Novikov	(co)homologie, differentiaaltopologie
	Thompson	classificatie van groepen

Wat: Fieldsmedailles vervolg

1974	Bombieri	functietheorie, p.d.v.
	Mumford	algebraïsche meetkunde en modulieruimten
1978	Deligne	Weilvermoeden, Riemannhypothese
	Fefferman	meerdimensionale complexe analyse
	Margulis	Liegroepen, combinatoriek, ergoden
	Quillen	K-theorie
1982	Connes	operator-algebra's en differentiaalmeetkunde
	Thurston	interactie tussen topologie, analyse en meetkunde
	Yau	d.v., algebraïsche meetkunde, Calabi-Yau
1986	Donaldson	differentiaalmeetkunde in 4-dim
	Faltings	rationale punten op algebraïsche krommen
	Freedman	differentiaalmeetkunde in 4-dim
1990	Drinfeld	Langlands-programma en quantumgroepen
	Jones	knopentheorie en algebra
	Mori	klassificatie van algebraïsche variëteiten
	Witten	fysisch inzicht geeft wiskundige stellingen
1994	Bourgain	analyse, banachruimten, ergoden
	Lions	p.d.v., kansrekenen, toepassingen
	Yoccoz	differentiaalmeetkunde, dynamische systemen

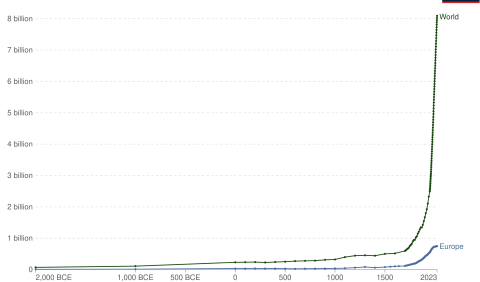
Wat: in één woord:

Veel.

Wat: in één woord:

Veel.

Population, 2,000 BCE to 2023

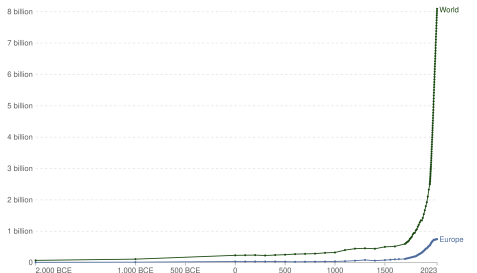


Wat: in één woord:

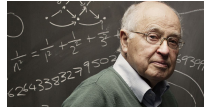
Veel.

Hier worden we niet veel wijzer van.

Population, 2,000 BCE to 2023

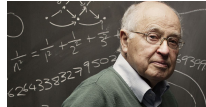


Atiyah's opvatting over de 20e eeuw



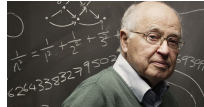
1. Van lokaal (specifiek, coördinaten, expliciete formules)
naar globaal (algemeen, kwalitatief, topologie)

Atiyah's opvatting over de 20e eeuw



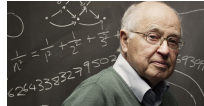
1. Van lokaal (specifiek, coördinaten, expliciete formules)
naar globaal (algemeen, kwalitatief, topologie)
2. Hogere dimensies
($\mathbb{C}$ -functies, differentiaalmeetk., functionaalanalyse)

Atiyah's opvatting over de 20e eeuw



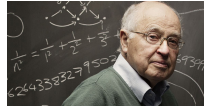
1. Van lokaal (specifiek, coördinaten, expliciete formules)
naar globaal (algemeen, kwalitatief, topologie)
2. Hogere dimensies
($\mathbb{C}$ -functies, differentiaalmeetk., functionaalanalyse)
3. Van commutatief naar niet-commutatief

Atiyah's opvatting over de 20e eeuw



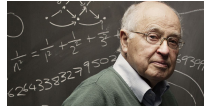
1. Van lokaal (specifiek, coördinaten, expliciete formules)
naar globaal (algemeen, kwalitatief, topologie)
2. Hogere dimensies
($\mathbb{C}$ -functies, differentiaalmeetk., functionaalanalyse)
3. Van commutatief naar niet-commutatief
C19: quaternionen, matrices, uitwendige algebra

Atiyah's opvatting over de 20e eeuw



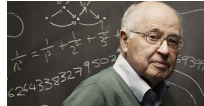
1. Van lokaal (specifiek, coördinaten, expliciete formules)
naar globaal (algemeen, kwalitatief, topologie)
2. Hogere dimensies
($\mathbb{C}$ -functies, differentiaalmeetk., functionaalanalyse)
3. Van commutatief naar niet-commutatief
C19: quaternionen, matrices, uitwendige algebra
C20: operatortheorie, quantumtheorie, Heisenbergrelaties

Atiyah's opvatting over de 20e eeuw



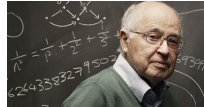
1. Van lokaal (specifiek, coördinaten, expliciete formules)
naar globaal (algemeen, kwalitatief, topologie)
2. Hogere dimensies
($\mathbb{C}$ -functies, differentiaalmeetk., functionaalanalyse)
3. Van commutatief naar niet-commutatief
C19: quaternionen, matrices, uitwendige algebra
C20: operatortheorie, quantumtheorie, Heisenbergrelaties
4. Van lineair naar niet-lineair
(dynamische systemen, chaos, Yang-Millstheorie)

Atiyah's opvatting over de 20e eeuw



1. Van lokaal (specifiek, coördinaten, expliciete formules)
naar globaal (algemeen, kwalitatief, topologie)
2. Hogere dimensies
($\mathbb{C}$ -functies, differentiaalmeetk., functionaalanalyse)
3. Van commutatief naar niet-commutatief
C19: quaternionen, matrices, uitwendige algebra
C20: operatortheorie, quantumtheorie, Heisenbergrelaties
4. Van lineair naar niet-lineair
(dynamische systemen, chaos, Yang-Millstheorie)
5. Wisselwerking meetkunde – algebra
(homologie, K-theorie, Liegroepen, het Monster F_1)

Atiyah's opvatting over de 20e eeuw



1. Van lokaal (specifiek, coördinaten, expliciete formules)
naar globaal (algemeen, kwalitatief, topologie)
2. Hogere dimensies
($\mathbb{C}$ -functies, differentiaalmeetk., functionaalanalyse)
3. Van commutatief naar niet-commutatief
C19: quaternionen, matrices, uitwendige algebra
C20: operatortheorie, quantumtheorie, Heisenbergrelaties
4. Van lineair naar niet-lineair
(dynamische systemen, chaos, Yang-Millstheorie)
5. Wisselwerking meetkunde – algebra
(homologie, K-theorie, Liegroepen, het Monster F_1)
6. Wisselwerking wiskunde – natuurkunde
(symplectische meetk, Yang-Mills, kwantumvelden)

Outline

Context

Wie, wat, waar en \$\$\$

Grondslagen

Bourbaki

Lokale geschiedenis: Hans Freudenthal

Computers

Tot slot

Ingrijpende veranderingen in de 19e eeuw

- ▶ Analyse: arithmetisering en de-geometrisering

Ingrijpende veranderingen in de 19e eeuw

- ▶ Analyse: arithmetisering en de-geometrisering
- ▶ (Euclidische) meetkunde niet meer de basis van alles

Ingrijpende veranderingen in de 19e eeuw

- ▶ Analyse: arithmetisering en de-geometrisering
- ▶ (Euclidische) meetkunde niet meer de basis van alles
- ▶ In plaats daarvan: constructie van $\mathbb{R}$, verzamelingenleer

Ingrijpende veranderingen in de 19e eeuw

- ▶ Analyse: arithmetisering en de-geometrisering
- ▶ (Euclidische) meetkunde niet meer de basis van alles
- ▶ In plaats daarvan: constructie van $\mathbb{R}$, verzamelingenleer
- ▶ Rond 1900 veel nieuwe tegen-intuïtieve resultaten:

Ingrijpende veranderingen in de 19e eeuw

- ▶ Analyse: arithmetisering en de-geometrisering
- ▶ (Euclidische) meetkunde niet meer de basis van alles
- ▶ In plaats daarvan: constructie van $\mathbb{R}$, verzamelingenleer
- ▶ Rond 1900 veel nieuwe tegen-intuïtieve resultaten:
 - ▶ Niet-euclidische meetkunde is consistent

Ingrijpende veranderingen in de 19e eeuw

- ▶ Analyse: arithmetisering en de-geometrisering
- ▶ (Euclidische) meetkunde niet meer de basis van alles
- ▶ In plaats daarvan: constructie van $\mathbb{R}$, verzamelingenleer
- ▶ Rond 1900 veel nieuwe tegen-intuïtieve resultaten:
 - ▶ Niet-euclidische meetkunde is consistent
 - ▶ Cantor's bijjectie tussen $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$
(“ik zie het, maar ik geloof het niet!”)

Ingrijpende veranderingen in de 19e eeuw

- ▶ Analyse: arithmetisering en de-geometrisering
- ▶ (Euclidische) meetkunde niet meer de basis van alles
- ▶ In plaats daarvan: constructie van $\mathbb{R}$, verzamelingenleer
- ▶ Rond 1900 veel nieuwe tegen-intuïtieve resultaten:
 - ▶ Niet-euclidische meetkunde is consistent
 - ▶ Cantor's bijectie tussen $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$
(“ik zie het, maar ik geloof het niet!”)
 - ▶ Russell's paradox in verzamelingenleer

Ingrijpende veranderingen in de 19e eeuw

- ▶ Analyse: arithmetisering en de-geometrisering
- ▶ (Euclidische) meetkunde niet meer de basis van alles
- ▶ In plaats daarvan: constructie van $\mathbb{R}$, verzamelingenleer
- ▶ Rond 1900 veel nieuwe tegen-intuïtieve resultaten:
 - ▶ Niet-euclidische meetkunde is consistent
 - ▶ Cantor's bijectie tussen $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$
(“ik zie het, maar ik geloof het niet!”)
 - ▶ Russell's paradox in verzamelingenleer
 - ▶ Hoe consistent is Peano's axiomatisering van de rekenkunde?

Ingrijpende veranderingen in de 19e eeuw

- ▶ Analyse: arithmetisering en de-geometrisering
- ▶ (Euclidische) meetkunde niet meer de basis van alles
- ▶ In plaats daarvan: constructie van $\mathbb{R}$, verzamelingenleer
- ▶ Rond 1900 veel nieuwe tegen-intuïtieve resultaten:
 - ▶ Niet-euclidische meetkunde is consistent
 - ▶ Cantor's bijectie tussen $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$
(“ik zie het, maar ik geloof het niet!”)
 - ▶ Russell's paradox in verzamelingenleer
 - ▶ Hoe consistent is Peano's axiomatisering van de rekenkunde?
 - ▶ ...

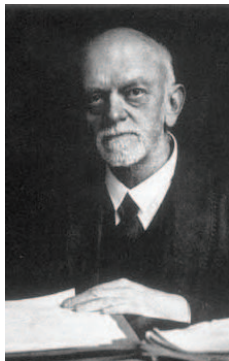
Ingrijpende veranderingen in de 19e eeuw

- ▶ Analyse: arithmetisering en de-geometrisering
- ▶ (Euclidische) meetkunde niet meer de basis van alles
- ▶ In plaats daarvan: constructie van $\mathbb{R}$, verzamelingenleer
- ▶ Rond 1900 veel nieuwe tegen-intuïtieve resultaten:
 - ▶ Niet-euclidische meetkunde is consistent
 - ▶ Cantor's bijjectie tussen $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$
(“ik zie het, maar ik geloof het niet!”)
 - ▶ Russell's paradox in verzamelingenleer
 - ▶ Hoe consistent is Peano's axiomatisering van de rekenkunde?
 - ▶ ...
- ▶ $\implies$ Crisis!
Hoe voorkomen we paradoxen, wat is nog betrouwbaar?

Reacties op grondslagen crisis

stroming:	Logicisme	Intuïtionisme	Formalisme
wie:	Russell 	Brouwer 	Hilbert 
wiskunde is:	af te leiden uit logica	schepping van de menselijke geest	taal met regels volgens interne noodzaak
	(mislukt)	constructief, verwerpt bewijs uit ongerijmde	relatie regels $\leftrightarrow$ fysica?
bewijsbaarheid van stellingen:	constructie van $\mathbb{Q}$ lukt al niet	soms niet	altijd
Gödel's onvolledigheid	repareerbaar	??	desastreus en irrelevant

Hilbert's radiotoespraak 1930



"Wir müssen wissen, wir werden wissen"

[https://old.maa.org/press/periodicals/convergence/
david-hilberts-radio-address-german-transcription](https://old.maa.org/press/periodicals/convergence/david-hilberts-radio-address-german-transcription)

Outline

Context

Wie, wat, waar en \$\$\$

Grondslagen

Bourbaki

Lokale geschiedenis: Hans Freudenthal

Computers

Tot slot

Nicolas Bourbaki (1934–)



Collectief van vooral (jonge) Franse wiskudingen
Henri Cartan, André Weil, Dieudonné, Chevalley, ...
later ook Serre, Grothendieck, Tate, Connes, ...

Intensieve samenwerking

Doel: een reeks nieuwe standaardleerboeken schrijven:
Éléments de mathématique

Nadruk op *structuren* en *morfismen*

Uiterst rigoureuus en algemeen, strenge formalisten!

Voorbeeld: categorietheorie

Categorietheorie

1945: Eilenberg en Mac Lane

- ▶ Categorietheorie bestudeert *wiskundige structuren* op een abstracte, algemene manier

Categorietheorie

1945: Eilenberg en Mac Lane

- ▶ Categorietheorie bestudeert *wiskundige structuren* op een abstracte, algemene manier
- ▶ Een *categorie* bestaat uit *objecten* en *pijlen* tussen objecten:

$$A \xrightarrow{f} B$$

Categorietheorie

1945: Eilenberg en Mac Lane

- ▶ Categorietheorie bestudeert *wiskundige structuren* op een abstracte, algemene manier
- ▶ Een *categorie* bestaat uit *objecten* en *pijlen* tussen objecten:

$$A \xrightarrow{f} B$$

- ▶ Voorbeelden:

Categorietheorie

1945: Eilenberg en Mac Lane

- ▶ Categorietheorie bestudeert *wiskundige structuren* op een abstracte, algemene manier
- ▶ Een *categorie* bestaat uit *objecten* en *pijlen* tussen objecten:
$$A \xrightarrow{f} B$$
- ▶ Voorbeelden:
 - ▶ verzamelingen en functies

Categorietheorie

1945: Eilenberg en Mac Lane

- ▶ Categorietheorie bestudeert *wiskundige structuren* op een abstracte, algemene manier
- ▶ Een *categorie* bestaat uit *objecten* en *pijlen* tussen objecten:

$$A \xrightarrow{f} B$$

- ▶ Voorbeelden:
 - ▶ verzamelingen en functies
 - ▶ groepen en homomorfismen

Categorietheorie

1945: Eilenberg en Mac Lane

- ▶ Categorietheorie bestudeert *wiskundige structuren* op een abstracte, algemene manier
- ▶ Een *categorie* bestaat uit *objecten* en *pijlen* tussen objecten:

$$A \xrightarrow{f} B$$

- ▶ Voorbeelden:
 - ▶ verzamelingen en functies
 - ▶ groepen en homomorfismen
 - ▶ topologische ruimten en continue functies

Categorietheorie

1945: Eilenberg en Mac Lane

- ▶ Categorietheorie bestudeert *wiskundige structuren* op een abstracte, algemene manier
- ▶ Een *categorie* bestaat uit *objecten* en *pijlen* tussen objecten:

$$A \xrightarrow{f} B$$

- ▶ Voorbeelden:
 - ▶ verzamelingen en functies
 - ▶ groepen en homomorfismen
 - ▶ topologische ruimten en continue functies
 - ▶ één groep en groeps-elementen

Categorietheorie

1945: Eilenberg en Mac Lane

- ▶ Categorietheorie bestudeert *wiskundige structuren* op een abstracte, algemene manier
- ▶ Een *categorie* bestaat uit *objecten* en *pijlen* tussen objecten:

$$A \xrightarrow{f} B$$

- ▶ Voorbeelden:
 - ▶ verzamelingen en functies
 - ▶ groepen en homomorfismen
 - ▶ topologische ruimten en continue functies
 - ▶ één groep en groeps-elementen
- ▶ Een *functor* is een morfisme tussen twee categorieën

Categorietheorie

1945: Eilenberg en Mac Lane

- ▶ Categorietheorie bestudeert *wiskundige structuren* op een abstracte, algemene manier
- ▶ Een *categorie* bestaat uit *objecten* en *pijlen* tussen objecten:

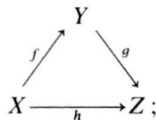
$$A \xrightarrow{f} B$$

- ▶ Voorbeelden:
 - ▶ verzamelingen en functies
 - ▶ groepen en homomorfismen
 - ▶ topologische ruimten en continue functies
 - ▶ één groep en groeps-elementen
- ▶ Een *functor* is een morfisme tussen twee categorieën
- ▶ Voorbeeld (fundamenteaalgroep): homotopie gesloten paden geven een functor van de categorie van topologische ruimten naar de categorie van groepen:

$$X \xrightarrow{\pi_1} \pi_1(X).$$

Mac Lane, *Categories for the working mathematician*

Category theory starts with the observation that many properties of mathematical systems can be unified and simplified by a presentation with diagrams of arrows. Each arrow $f : X \rightarrow Y$ represents a function; that is, a set X , a set Y , and a rule $x \mapsto f x$ which assigns to each element $x \in X$ an element $f x \in Y$; whenever possible we write $f x$ and not $f(x)$, omitting unnecessary parentheses. A typical diagram of sets and functions is



it is commutative when h is $h = g \circ f$, where $g \circ f$ is the usual composite function $g \circ f : X \rightarrow Z$, defined by $x \mapsto g(f x)$. The same diagrams apply in other mathematical contexts; thus in the “category” of all topological spaces, the letters X , Y , and Z represent topological spaces while f , g , and h stand for continuous maps. Again, in the “category” of all groups, X , Y , and Z stand for groups, f , g , and h for homomorphisms.

Bourbaki: *Éléments d'histoire des mathématiques*, 1960

TABLE DES MATIÈRES

Fondements des mathématiques ; logique ; théorie des ensembles.....	9
Numération ; analyse combinatoire.....	65
L'évolution de l'algèbre	68
Algèbre linéaire et algèbre multilinéaire.....	78
Polynômes et corps commutatifs	92
Divisibilité ; corps ordonnés.....	110
Algèbre non commutative.....	120
Formes quadratiques ; géométrie élémentaire.....	129
Espaces topologiques	146
Espaces uniformes	152
Nombres réels	155
Exponentielles et logarithmes	167
Espaces à n dimensions.....	169
Nombres complexes ; mesure des angles.....	171
Espaces métriques	176
Calcul infinitésimal	178
Développements asymptotiques	221
La fonction gamma.....	226
Espaces fonctionnels.....	228
Espaces vectoriels topologiques	230
Intégration	246
Bibliographie	261

Bourbaki's invloed op onderwijs: *New Math*

- 2 Een andere bewerking is *het gemiddelde nemen*.

Voor deze bewerking bestaat geen algemeen gebruikt tekenje, daarom kiezen we er zelf een, bijvoorbeeld ∇

$5 \nabla 9 = 7$ betekent dan: het gemiddelde van 5 en 9 is 7.

a. Bereken: $4 \nabla 10$ $1 \nabla 13$ $14 \nabla 14$ $0 \nabla 64$

b. Zijn de antwoorden natuurlijke getallen?

*c. Is $\mathbb{N}$ gesloten ten opzichte van de bewerking ∇ ?

Pas op! Is $4 \nabla 7$ een natuurlijk getal?

- 3 Het is niet moeilijk allerlei bewerkingen te bedenken.

Een voorbeeld: met $a \circ b$ bedoelen we: neem het kwadraat van a en tel bij de uitkomst b op.

Dus $4 \circ 7 = 23$, want $4^2 = 16$ en $16 + 7 = 23$

a. Bereken nu:

$$3 \circ 5 \qquad 9 \circ 8 \qquad 0 \circ 0$$

$$1 \circ 2 \qquad 2 \circ 1 \qquad 4 \circ 4$$

*b. Is $\mathbb{N}$ gesloten ten opzichte van deze bewerking?

- 4 Maak een tabel voor de bewerking *het gemiddelde nemen in* $\mathbb{N}$. Zet in kop en voorkolom de getallen 0, 1, 2, 3, 4, 5.

- *5 Maak een dergelijke tabel als in opdracht 4 voor de bewerking $\circ$ van opdracht 3. Schrijf de zes getallen van de hoofddiagonaal op. Is er een regelmaat in deze rij getallen? Als dat zo is, schrijf dan de volgende vier getallen van deze rij op.

7.5 Commutatieve bewerkingen

Bij het optellen verandert de uitkomst niet als we de termen omwisselen. Bijvoorbeeld: $7 + 9 = 9 + 7$

Algemeen geldt in $\mathbb{N}$: $a + b = b + a$

Je weet dat voor het vermenigvuldigen ook een dergelijke bijzonderheid geldt.

Algemeen geldt in $\mathbb{N}$: $a \times b = b \times a$

Bewerkingen

Omdat bij het optellen en het vermenigvuldigen de volgorde van de termen of de factoren veranderd mag worden heten optellen en vermenigvuldigen *commutatieve* bewerkingen.

We zeggen ook wel dat optellen en vermenigvuldigen de commutatieve eigenschap bezitten.

Delen bezit de commutatieve eigenschap niet.

$9 : 3$ is niet gelijk aan $3 : 9$

OPDRACHTEN

- 1 Je hebt in de vorige paragraaf allerlei bewerkingen aangetroffen, ook in de opdrachten. Maak een lijstje van deze opdrachten en vermeld erbij of de bewerking commutatief of niet commutatief is.

- 2 $a * b$ betekent: verdubbel a en tel bij de uitkomst de helft van b op. Voorbeeld: $3 * 4 = 6 + 2 = 8$

a. Bereken: $5 * 6$ $4 * 4$ $2 * 8$ $8 * 2$ $5 * 0$

b. heeft deze bewerking de commutatieve eigenschap?

- 3 Het nemen van de doorsnede van twee verzamelingen is ook een bewerking. Nu niet een bewerking met getallen, maar met verzamelingen. De doorsnede van twee verzamelingen is opnieuw een verzameling.

$$A = \{5, 6, 7, 9, 11, 13\}$$

$$B = \{1, 4, 7, 10, 13, 16\}$$

a. Bereken $A \cap B$ en $B \cap A$

b. Is het nemen van de doorsnede van twee verzamelingen een commutatieve bewerking?

- *4 A en B zijn de verzamelingen genoemd in opdracht 3.

a. Bereken $A \cap \mathbb{N}$ en $B \cap \mathbb{N}$

b. Bereken $A \cap \emptyset$ en $B \cap \emptyset$

c. Welke verzameling zou je als het neutrale element kunnen beschouwen voor de bewerking *doorsnede nemen*?

commutatief

Bourbaki's invloed op onderwijs: *New Math*

- 
- 3** Het nemen van de doorsnede van twee verzamelingen is ook een bewerking. Nu niet een bewerking met getallen, maar met verzamelingen. De doorsnede van twee verzamelingen is opnieuw een verzameling.

$$A = \{5, 6, 7, 9, 11, 13\}$$

$$B = \{1, 4, 7, 10, 13, 16\}$$

- Bereken $A \cap B$ en $B \cap A$
- Is het nemen van de doorsnede van twee verzamelingen een commutatieve bewerking?

- *4** A en B zijn de verzamelingen genoemd in opdracht 3.

- 
- Bereken $A \cap \mathbb{N}$ en $B \cap \mathbb{N}$
 - Bereken $A \cap \emptyset$ en $B \cap \emptyset$
 - Welke verzameling zou je als het neutrale element kunnen beschouwen voor de bewerking *doorsnede nemen*?

Outline

Context

Wie, wat, waar en \$\$\$

Grondslagen

Bourbaki

Lokale geschiedenis: Hans Freudenthal

Computers

Tot slot

Hans Freudenthal



1905 Luckenwalde – 1990 Utrecht

1930 promoveert bij Hopf en Bieberbach (Berlijn, topologie)

1930–40 assistent van Brouwer (Amsterdam)

later ondergedoken

1946–75 hoogleraar te Utrecht,
bouwt het MI op tot internationaal niveau

1965 “Wiskundegebouw” nu HFG

1971 oprichter IOWO, het latere Freudenthal Instituut,
“realistische wiskunde”

Kenmerkend: inspirerend, literair, brede wiskunde, educatie

1965: de Uithof met het Wiskundegebouw



Outline

Context

Wie, wat, waar en \$\$\$

Grondslagen

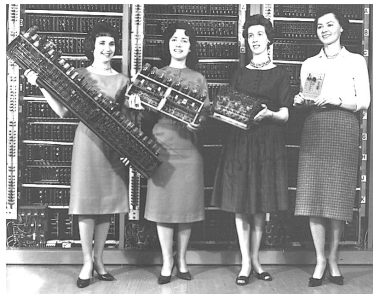
Bourbaki

Lokale geschiedenis: Hans Freudenthal

Computers

Tot slot

Computers en wiskunde



The ENIAC women

- ▶ programmeren, informatica
- ▶ rekenkracht, supercomputers
- ▶ computeralgebra, symbolic computation
- ▶ computerbewijzen: vierkleurenprobleem
- ▶ Lean en AI

Outline

Context

Wie, wat, waar en \$\$\$

Grondslagen

Bourbaki

Lokale geschiedenis: Hans Freudenthal

Computers

Tot slot

"A mathematician, like a painter or poet, is a maker of patterns. If his patterns are more permanent than theirs, it is because they are made with ideas."

G.H. Hardy, *A Mathematician's Apology*, 1941

