

# Delische en andere problemen

Steven Wepster

Departement Wiskunde  
Universiteit Utrecht

13 februari 2023

# Het “Delische probleem”

Theon van Smyrna heeft bij Eratostenes gevonden:

*... toen de god aan de Deliërs door een orakel verkondigde dat zij, om van de pest bevrijd te worden, een altaar moesten maken dubbel zo groot als het bestaande, raakten de bouwkundigen in grote verlegenheid om erachter te komen, hoe een lichaam dubbel zo groot als een ander kon worden gemaakt. Zij gingen toen Plato om raad vragen, en deze zeide hun, dat de god het orakel niet gegeven had omdat hij een verdubbeld altaar nodig had, maar om de Grieken te berispen, dat zij zich niet om de wiskunde bekommerden en de meetkunde geringschatten.*

# Drie klassieke constructieproblemen uit de Griekse oudheid

**Verdubbeling van kubus** Gegeven een kubus, construeer een kubus met dubbel volume

**Trisectie van hoek** Gegeven een hoek, construeer een hoek  $\frac{1}{3}$  zo groot

**Kwadratuur van cirkel** Gegeven een cirkel, construeer een vierkant met gelijk oppervlak

# Deze problemen zijn *veel* en *lang* bestudeerd

- ▶ al sinds (minstens) 5<sup>e</sup> eeuw v. Chr.
- ▶ 1837 Wantzel: kubusverdubbeling en trisectie zijn niet oplosbaar met passer en latje
- ▶ 1882 Von Lindemann:  $\pi$  is transcendent, dus cirkelkwadratuur onmogelijk met passer en latje

*MAAR: meetkunde is meer dan passer en latje!*

# Waarom worden deze problemen bestudeerd

Verdubbeling van kubus

is ruimtelijke versie van **verdubbeling van vierkant**

Trisectie van hoek

generaliseert **bisectie van hoek**

Kwadratuur van cirkel

complementeert **kwadratuur van driehoek en van rechthoek**

Dit zijn dus voordehandliggende generalisaties van eenvoudige passer en latje constructieproblemen.

# Waarom worden deze problemen bestudeerd

Verdubbeling van kubus

is ruimtelijke versie van **verdubbeling van vierkant**

Trisectie van hoek

generaliseert **bisectie van hoek**

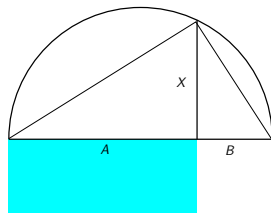
Kwadratuur van cirkel

complementeert **kwadratuur van driehoek en van rechthoek**

Dit zijn dus voordehandliggende generalisaties van eenvoudige passer en latje constructieproblemen.

Bovendien: we hebben van Euclides geleerd wat het belang van *constructies* is.

# Verdubbeling van vierkant: middelevenredige (Eucl.VI:8)

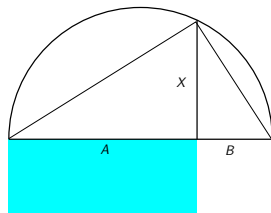


**Probleem:** gegeven twee lijnstukken  $A$  en  $B$ , vind lijnstuk  $X$  zo dat  $A : X = X : B$

**Constructie:** zie figuur (passer en latje!)

**Bewijs** berust op gelijkvormigheid van driehoeken

# Verdubbeling van vierkant: middelevenredige (Eucl.VI:8)



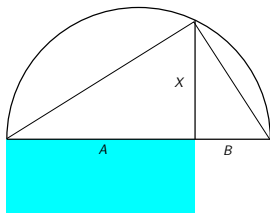
**Probleem:** gegeven twee lijnstukken  $A$  en  $B$ , vind lijnstuk  $X$  zo dat  $A : X = X : B$

**Constructie:** zie figuur (passer en latje!)

**Bewijs** berust op  
gelijkvormigheid van  
driehoeken

Dus: als  $A$  en  $B$  de zijden van een rechthoek zijn dan is  $X$  de zijde van een vierkant met gelijke oppervlakte.

# Verdubbeling van vierkant: middelevenredige (Eucl.VI:8)



**Probleem:** gegeven twee lijnstukken  $A$  en  $B$ , vind lijnstuk  $X$  zo dat  $A : X = X : B$

**Constructie:** zie figuur (passer en latje!)

**Bewijs** berust op gelijkvormigheid van driehoeken

Dus: als  $A$  en  $B$  de zijden van een rechthoek zijn dan is  $X$  de zijde van een vierkant met gelijke oppervlakte.

Dus ook: constructie voor vierkantverdubbeling.

(vraag: hoe dan?)

# Twee middelevenredigen: kubusverdubbeling

**Probleem:** gegeven twee lijnstukken  $A$  en  $B$ , vind lijnstukken  $X$  en  $Y$  zo dat  $A : X = X : Y = Y : B$ .

**Constructie:** ???

# Twee middelevenredigen: kubusverdubbeling

**Probleem:** gegeven twee lijnstukken  $A$  en  $B$ , vind lijnstukken  $X$  en  $Y$  zo dat  $A : X = X : Y = Y : B$ .

**Constructie:** ???

Ca. 430 v. Chr. Hippocrates van Chios:

# Twee middelevenredigen: kubusverdubbeling

**Probleem:** gegeven twee lijnstukken  $A$  en  $B$ , vind lijnstukken  $X$  en  $Y$  zo dat  $A : X = X : Y = Y : B$ .

**Constructie:** ???

Ca. 430 v. Chr. Hippocrates van Chios:

uit  $A : X = X : Y$  volgt  $AY = X^2$ ,

uit  $A : X = Y : B$  volgt  $AB = XY$ ,

# Twee middelevenredigen: kubusverdubbeling

**Probleem:** gegeven twee lijnstukken  $A$  en  $B$ , vind lijnstukken  $X$  en  $Y$  zo dat  $A : X = X : Y = Y : B$ .

**Constructie:** ???

Ca. 430 v. Chr. Hippocrates van Chios:

uit  $A : X = X : Y$  volgt  $AY = X^2$ ,

uit  $A : X = Y : B$  volgt  $AB = XY$ ,

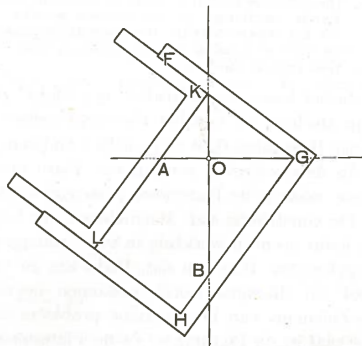
zodoende  $A^2B = AXY = X^3$

en dus oplossing van kubusprobleem

(vraag: hoe dan?)



## “Plato-constructie” van twee middelevenredigen



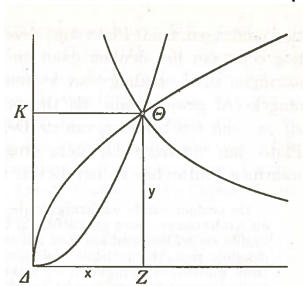
$OA$  en  $OB$  zijn gegeven lengten,  
 $OK$  en  $OG$  zijn twee  
middelevenredigen ertussenin:

$$OA : OK = OK : OG = OG : OB$$

Echter, Plato verfoeide dit soort “mechanische” oplossingen, en vermoedelijk is deze constructie niet van hemzelf.

# Van Platoconstructie naar krommen

Menaechmos, ca. 350 v. Chr.: puntsgewijze “constructie” van 3 krommen welke door 1 punt gaan.



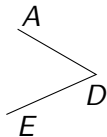
Modern: intersectie van twee parabolen en een hyperbool:

$$AY = X^2, \quad AB = XY, \quad Y^2 = XB.$$

De  $X$ -coördinaat van het snijpunt lost de kubusverdubbeling op.

# Archimedes: trisectie met *Neusis*

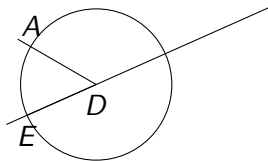
**Neusis** is “inpassen” van een gegeven lengte tussen twee gegeven krommen (of rechten), op een lijn door een gegeven punt.



- Gevraagd:  $\angle ADE$  in drieën te delen. Constructie:

# Archimedes: trisectie met *Neusis*

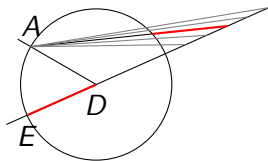
**Neusis** is “inpassen” van een gegeven lengte tussen twee gegeven krommen (of rechten), op een lijn door een gegeven punt.



- ▶ Gevraagd:  $\angle ADE$  in drieën te delen. Constructie:
- ▶ trek cirkel, verleng diameter

# Archimedes: trisectie met *Neusis*

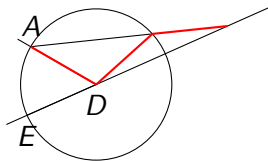
**Neusis** is “inpassen” van een gegeven lengte tussen twee gegeven krommen (of rechten), op een lijn door een gegeven punt.



- ▶ Gevraagd:  $\angle ADE$  in drieën te delen. Constructie:
- ▶ trek cirkel, verleng diameter
- ▶ Vind een lijn door  $A$  zo dat  $ED$  precies tussen cirkel en verlengde diameter past

# Archimedes: trisectie met *Neusis*

**Neusis** is “inpassen” van een gegeven lengte tussen twee gegeven krommen (of rechten), op een lijn door een gegeven punt.

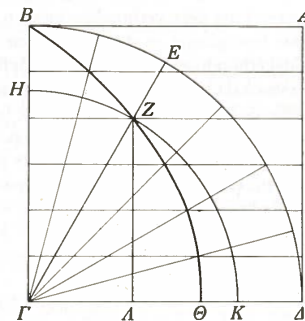


- ▶ Gevraagd:  $\angle ADE$  in drieën te delen. Constructie:
- ▶ trek cirkel, verleng diameter
- ▶ Vind een lijn door  $A$  zo dat  $ED$  precies tussen cirkel en verlengde diameter past

## Quadratrix

Deinostratos 300 v. Chr.:

## Twee synchroon bewegende linealen: schuiver en draaier

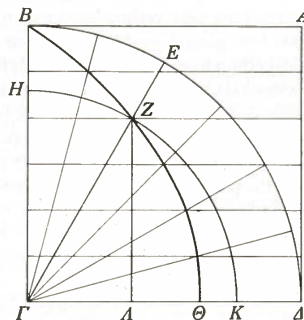


► boog  $BE\Delta : \Gamma\Delta = \Gamma\Delta : \Gamma\Theta$

# Quadratrix

Deinostratos 300 v. Chr.:

Twee synchroon bewegende linealen: schuiver en draaier

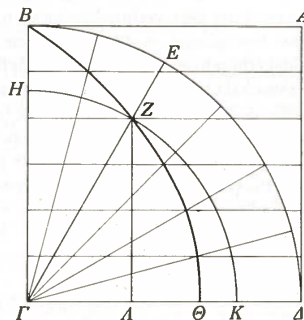


- ▶ boog  $BE\Delta : \Gamma\Delta = \Gamma\Delta : \Gamma\Theta$
- ▶ (modern) parametrizeer met  $\theta$ :  
 $x = \phi / \tan \phi$ ,  
 $y = \phi$ ;

# Quadratrix

Deinostratos 300 v. Chr.:

Twee synchroon bewegende linealen: schuiver en draaier

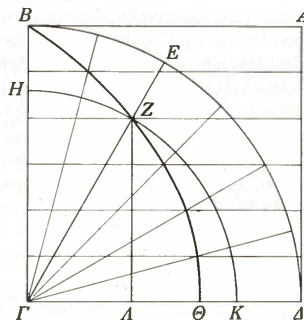


- ▶ boog  $BE\Delta$  :  $\Gamma\Delta = \Gamma\Delta : \Gamma\Theta$
- ▶ (modern) parametrizeer met  $\theta$ :  
 $x = \phi / \tan \phi$ ,  
 $y = \phi$ ;
- ▶ dus  $\Gamma B = \pi/2$

# Quadratrix

Deinostratos 300 v. Chr.:

## Twee synchroon bewegende linealen: schuiver en draaier

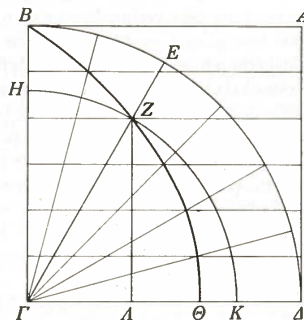


- ▶ boog  $BE\Delta : \Gamma\Delta = \Gamma\Delta : \Gamma\Theta$
- ▶ (modern) parametriseer met  $\theta$ :  
 $x = \phi / \tan \phi$ ,  
 $y = \phi$ ;
- ▶ dus  $\Gamma B = \pi/2$
- ▶ bovendien  $\Gamma\Theta = \lim_{\phi \rightarrow 0} x = 1$

# Quadratrix

Deinostratos 300 v. Chr.:

Twee synchroon bewegende linealen: schuiver en draaier

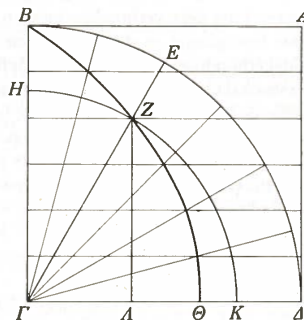


- ▶ boog  $BE\Delta$  :  $\Gamma\Delta = \Gamma\Delta : \Gamma\Theta$
- ▶ (modern) parametrizeer met  $\theta$ :  
 $x = \phi / \tan \phi$ ,  
 $y = \phi$ ;
- ▶ dus  $\Gamma B = \pi/2$
- ▶ bovendien  $\Gamma\Theta = \lim_{\phi \rightarrow 0} x = 1$
- ▶ concludeer  $\Gamma B : \Gamma\Theta = \pi : 2$

# Quadratrix

Deinostratos 300 v. Chr.:

Twee synchroon bewegende linealen: schuiver en draaier



- ▶ boog  $BE\Delta : \Gamma\Delta = \Gamma\Delta : \Gamma\Theta$
- ▶ (modern) parametrizeer met  $\theta$ :  
 $x = \phi / \tan \phi$ ,  
 $y = \phi$ ;
- ▶ dus  $\Gamma B = \pi/2$
- ▶ bovendien  $\Gamma\Theta = \lim_{\phi \rightarrow 0} x = 1$
- ▶ concludeer  $\Gamma B : \Gamma\Theta = \pi : 2$
- ▶ (daarnaast ook handig voor trisectie)

# Pappus' classificatie van problemen

Pappus, ca. 320 n. Chr.

Drie categoriën, elk probleem moet in zijn eigen categorie worden opgelost:

1. met passer & latje
2. met bovendien ook kegelsneden
3. met bovendien ook andere krommen

Pervers! Denk aan Wantzel, Lindemann!