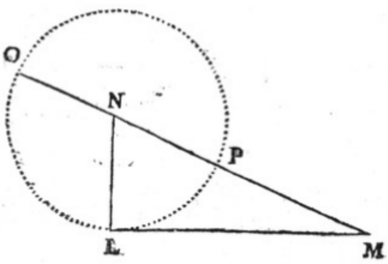
Descartes (1637) vindt dat je meetkundige problemen op een meetkundige manier moet oplossen. Wel vertaalt hij het meetkundig probleem naar een algebraprobleem: dit doet hij door alle lijnstukken namen te geven (a, b, c, ... voor bekende lijnstukken en z, y, x, ... voor onbekende, gezochte lijnstukken) en vervolgens vergelijkingen op te stellen tussen deze variabelen. Maar de algebra ziet hij daarbij slechts als een hulpmiddel. Dit betekent dat een algebraïsche “oplossing” niet volstaat: deze moet eerst weer terugvertaald worden in een meetkundige constructie. Pas dan is het meetkundige probleem opgelost. Merk op dat elke variabele staat voor de lengte van een lijnstuk, en dus *positief* moet zijn.

1. Stel dat een meetkundig probleem heeft geleid tot een van de vergelijkingen $z^2 = az + b^2$ of $z^2 + az = b^2$ (bij Descartes zijn constanten zoals a, b altijd positief).

   Vind de positieve oplossing van deze vergelijkingen, en geef een constructie voor een lijnstuk met die lengte. Hint (uit de vertaling van J.H. Glazemaker, 1659):

En dan zal deze [p] wortel, of onbekende lijn, lichtelijk gevonden worden. Want indien ik, tot een voorbeelt $z^2 \propto az + bb$ heb, zo maak ik de [q] rechthoekige driehoek NLM, welks zijde LM met b, de [r] vierkante wortel van de bekende hoegrootheit bb, gelijk is, en d'andere zijde LN gelijk met $\frac{1}{2}a$, de helft van d'andere bekende [s] hoegrootheit, die door z, de welk ik onderstel d'onbekende

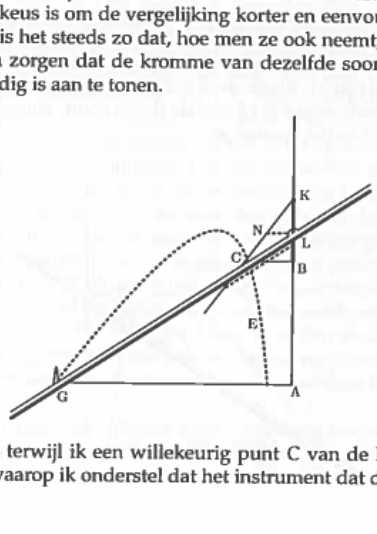


m *Radix.* n *Quantitas.* o *Multiplicare.* p *Radix.* q *Triangulus rectangulus.* r *Radix quadrata.* s *Quantitas.*

2. Zie bijgaande vertaling uit de Géométrie van Descartes (bron: W.W. Wilhelm, *Meetkunde*, 2009).

Meetkunde.

Als ik zo wil weten van welke soort de kromme E C is, die ik denk beschreven te zijn door het snijpunt van de liniaal G L en het rechtlijnig vlak C N K L, waarvan de zijde K N onbe-
320 perkt is verlengd in de richting van C, en die over het vlak eronder in een rechte lijn wordt bewogen, dat wil zeggen, op zo'n manier dat de afstand K L steeds langs een deel valt van de rechte B A die aan weerskanten is verlengd, en zo de liniaal G L rond het punt G doet bewegen, omdat deze zo verbonden is met dat vlak dat die steeds door het punt L gaat. Dan kies ik een rechte, zoals A B om hiervan verschillende punten in relatie te brengen met al die punten van de kromme E C, en op die lijn A B kies ik een punt, zoals A, om daarbij de berekening te beginnen. Ik zeg dat ik beide kies, omdat men vrij is ze te nemen zo men wil. Want hoewel er veel keus is om de vergelijking korter en eenvoudiger te maken is het steeds zo dat, hoe men ze ook neemt, men altijd kan zorgen dat de kromme van dezelfde soort is, wat
321 eenvoudig is aan te tonen.



Daarna, terwijl ik een willekeurig punt C van de kromme neem, waarop ik onderstel dat het instrument dat dient om

Tweede Boek.

de kromme te beschrijven is terecht gekomen, trek ik vanuit dit punt C de rechte C B evenwijdig aan G A, en omdat C B en B A twee onbepaalde en onbekende grootheden zijn, noem ik de een y en de ander x. Maar om tenslotte de relatie te bepalen tussen de een en de ander beschouw ik ook de bekende grootheden die de beschrijving van de kromme bepalen, zoals G A die ik a noem, K L die ik b noem en N L, evenwijdig aan G A, die ik c noem. Vervolgens zeg ik: zoals N L staat tot L K, of $c{:}b$, zo verhoudt zich C B, of y, tot B K, die daardoor gelijk is aan $\frac{b}{c}y$ zodat B L $= \frac{b}{c}y - b$, en A L $= x + \frac{b}{c}y - b$. Vervolgens: zoals C B staat tot L B, of y staat tot $\frac{b}{c}y - b$, zo verhoudt zich a, of G A tot L A of $x + \frac{b}{c}y - b$. Door de tweede met de derde te vermenigvul- 322
digen krijgt men $\frac{ab}{c}y - ab$, wat gelijk is aan $xy + \frac{b}{c}y^2 - by$, wat het resultaat is van de vermenigvuldiging van de eerste met de laatste. Daarom is de vergelijking die gevonden moest worden:

$$y^2 = cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac,$$

aan welke men herkent dat de kromme E C van de eerste soort is, omdat zij immers niets anders is dan een hyperbool.

Als men bij het instrument om de kromme te beschrijven die hyperbool gebruikt in plaats van de rechte C N K, of een andere kromme van de eerste soort die het vlak C N K L bepaalt zal het snijpunt van die kromme en de liniaal G L in plaats van de hyperbool C E een andere kromme beschrijven die van de tweede soort zal zijn. Als C N K een cirkel is, waarvan L het middelpunt is zal men de eerste conchoïde van de klassieken beschrijven, en als het een parabool is waarvan K B de diameter is, zal men de kromme beschrijven, waarvan ik eerder heb gezegd dat het de eerste en eenvoudigste was van het vraagstuk van Pappus als er niet meer dan vijf rechten zijn gegeven door hun ligging. Maar

Korte uitleg bij de figuur (zie ook de tekst): GL is een lineaal die steeds tegen de pin G aan ligt, terwijl hij bij L met een scharnier vastzit aan driehoek NKL. Deze driehoek kan op en neer schuiven langs AB. Verleng steeds zijde NK zo dat er een snijpunt C is met de lineaal. De kromme ECG is het 'spoor' van het punt C als je de driehoek NKL beweegt.

(a) Halverwege de rechter kolom geeft Descartes de vergelijking van de kromme ECG en concludeert dat het een hyperbool is. Zie je dat makkelijk aan de vergelijking, aan de figuur, of aan beide?

(b) Onderzoek welke kromme het instrument produceert als hoek NKL recht is (kwalitatief; d.w.z. je hoeft niet de vergelijking af te leiden).

Eén van de personen die in de voetsporen van Descartes trad, was J(oh)an de Witt. In 1659 schreef hij een verhandeling over kegelsneden: *Elementa Curvarum Linearum*. We bestuderen propositie 16 van boek II.

Gegeven zijn de punten A en B. Gevraagd wordt de vergelijking van de kromme van alle punten C waarvoor geldt dat het afstandsverschil $AC - BC$ constant is.

Zij E het voetpunt van de loodlijn uit C op AB. De Witt noemt $AE = x$, $EC = y$, $AB = a$ en $AC - BC = b$. Opmerking: de notatie $x = a$ bij De Witt komt overeen met $|x - a|$ bij ons, en zijn teken voor "is gelijk aan" is $\propto$, zoals ook bij Descartes).

(Terzijde: b moet een aanwijsbaar lijnstuk in de figuur zijn, daarom introduceert hij het punt D met $AD = b$.)

3. (a) Controleer de berekening in de rechterkolom tot en met de vergelijking net onder de figuur.

Stelling 12 in dit boek luidt: *Si aequatio sit* $\frac{lyy}{g} \propto xx - ff$, *erit Locus quaesitus linea Hyperbolica.*

(b) Hoe herken je de vergelijking van Stelling 12 als een hyperbool?

(c) Waarom maakt hij de substitutie $v = x - \frac{a}{2}$?

P R O B L E M A II.

Propositio 16.

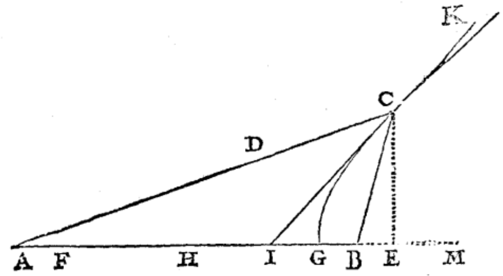
Datis duobus punctis tertium invenire, à quo ad bina data ductæ rectæ lineæ dato differant intervallo, locumque determinare ac describere, quem quæsitum punctum contingat.

Sint data duo puncta A & B, oporteatque invenire tertium, utputa C, ita nempe ut ductæ rectæ CA, CB differant dato intervallo FG seu AD.

Quoniam in quæstione angulus datus non est, quò facilior sit operatio, assumatur rectus, ideoque à puncto C in rectam AB, quæ data puncta conjungit, productam, si opùs fuerit, intelligatur demissa perpendicularis, ut CE; tum, suppositis, juxta Regulam, AE & EC incognitis atque indeterminatis, assumptum angulum AEC comprehendentibus, tanquam cognitis ac determinatis, earum prior, nimirum AE, vocetur x, ac posterior, nempe EC, nominetur y, ipsa autem AB, seu datorum punctorum cognita distantia, vocetur a, & data FG sive AD exprimatur per b. Hinc cum BE sive (si punctum B cadat inter A & E) AE — AB, aut (si punctum E inter A & B cadat) AB — AE sit

$\infty\ x - a$, & AC $\infty \sqrt{xx+yy}$, at BC $\infty \sqrt{xx - 2ax + aa + yy}$; sitque AC — AD ∞ BC: æquatio erit $\sqrt{xx+yy} - b \infty \sqrt{xx - 2ax + aa + yy}$, factâque operatione convenienti, ut utraque æquationis pars à signo radicali liberetur, & transpositis transponendis, erit $4bbyy \infty 4aaxx - 4bbxx - 4a^3x + 4bbax + a^4 - 2bbaa + b^4$. Vnde factâ divisione per $4aa - 4bb$ habebitur $\frac{bbyy}{aa-bb} \infty xx - ax + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$. Deinde assumpto juxta Regulam $v \infty x - \frac{1}{2}a$, erit $x \infty v + \frac{1}{2}a$, ideoque substituto hoc valore in locum ipsius x, atque ejusdem quadrato loco xx, expunctisque iis quæ se invi-

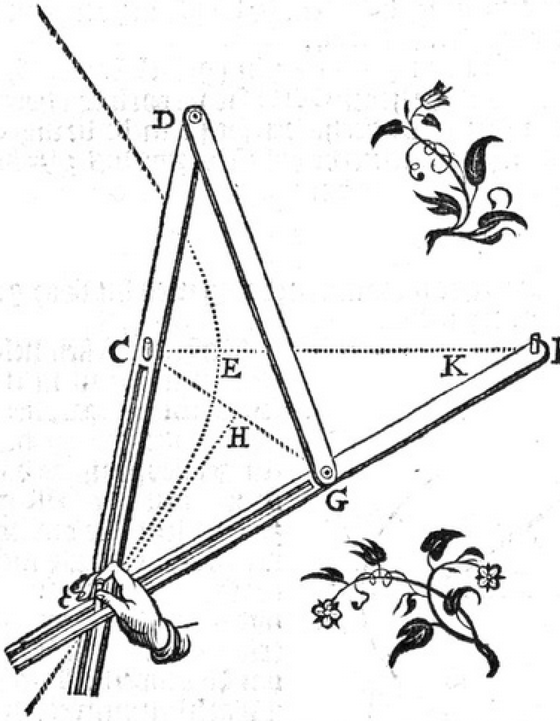
Fig. 1.



cem destruunt, erit $\frac{bbyy}{aa-bb} \infty vv - \frac{1}{4}bb$. Qui quidem casus est Theorematis 12^mi hujus libri, ac proinde Locus quæsitus erit Hyperbola. Cumque v assumpta sit pro $x - \frac{1}{2}a$, si ab A versùs E sumatur AH $\infty \frac{1}{2}a$, erit, juxta Regulam, H centrum, & semidiameter transversa (puta HG ab una, & HF ab altera parte,) $\infty \sqrt{\frac{1}{4}bb}$, id est, $\frac{1}{2}b$; ita ut diameter transversa FG (quæ quidem, ob applicatam CE ad diametrum HE perpendicularem, transversus quoque axis est,) sit ∞b. Ratio autem transversæ diametri ad parametrum, seu quadrati transversæ ad quadratum secundæ diametri, erit ut bb ad $aa - bb$. Vnde per ea quæ libri primi capitibus secundo & ultimo exposita sunt Hyperbolam ipsam describere haud difficile erit. Porrò cum quadratum semi-diametri transversæ sit $\infty \frac{1}{4}bb$, erit quadratum semi-secundæ diametri $\infty \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$. Atqui cum FB sive BH + HF sit $\infty \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, & BG sive BH — HG $\infty \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, erit quoque rectangulum FBG $\infty \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$, nempe ∞ quadrato semi-secundæ diametri, sive, ut Veteres loquebantur, æquale quadranti figuræ ad transversum axem factæ: ideoque puncta A & B ea ipsa sunt, quæ vulgo oppositarum Hyperbolarum Foci sive Vmbilici nuncupantur. Vnde apparet, ex præmissis rectè inferri, quæ sequuntur.

Tot slot kijken we naar een werktuig uit Frans van Schooten's *Tractaet van de Tuyghwerckelycke Beschrijving der Kegel-sneden op een Vlack.* De rechte armen van het werktuig kunnen draaien om de vaste punten C en F. Verder geldt dat $CE = FK$, $CD = FG = EK$ en $DG = CF$.

4. Toon aan dat de hand met het potlood bij ϵ een deel van een hyperbooltak tekent als dit werktuig beweegt. Hint: gebruik de meetkunde van Propositie 16 bij De Witt.


D
C
E
K
F
H
G

Hendrik van Heuraet

Halverwege de zeventiende eeuw was er in Nederland een groep van wiskundigen die zich bezig hielden met de nieuwste ontwikkelingen in de wiskunde en dan vooral het werk *Géométrie* van Descartes. Het was voornamelijk de wiskundige en docent Frans van Schooten jr. die een groepje studenten om zich heen verzamelde om zich bezig te houden met deze wiskunde. Onder deze studenten vielen bijvoorbeeld Christiaan Huygens, Johan de Witt, Johannes Hudde en Hendrick van Heuraet.

Van Schooten heeft een vertaling van *Géométrie* geschreven vanuit het Frans naar het meer gebruikelijke Latijn. Aan deze vertaling, *Geometria*, voegde hij ook brieven van zijn leerlingen toe. Van Schooten legde veel van Descartes' wiskunde uit, maar hield zich hierbij nog aan de grenzen die Descartes voor zijn meetkunde had opgesteld. In tegenstelling tot zijn leerlingen. Deze bedachten juist nieuwe methoden en gingen op bepaalde vlakken verder dan Descartes gegaan was. Op deze manier droegen zij niet alleen bij aan het uitleggen van de wiskunde van Descartes, maar ook het vernieuwen en uitbreiden ervan.

Een van de brieven die werd toegevoegd aan *Geometria* was *Transmutatione curvarum linearum in rectas* (*the transformation of curves into straight lines*), geschreven door Hendrick Van Heuraet. In de brief beschrijft Van Heuraet een stelling, het bewijs van de stelling en een voorbeeld. De stelling en het bewijs ervan ga je onderzoeken. De brief is geschreven in het Latijn, maar letterlijk vertaald naar het Engels en je krijgt zowel de Latijnse tekst als de Engelse. Het gedeelte van de brief die je gaat bekijken omvat twee pagina's: pagina 101 en 103 tot en met *Which had to be proved* in de Engelse vertaling. Alledrie de vragen gaan over dit stuk van de brief.

1. Geef in je eigen woorden de inhoud weer van de stelling van Van Heuraet en zijn bewijs voor de stelling. Deze 'vertaling' moet **begrijpelijk** zijn voor een wiskundestudent die geen geschiedenis van de wiskunde volgt. De stelling en het bewijs staan op de gehele pagina 101 en pagina 103 tot en met de zin *Which had to be proved* (deze zin staat halverwege pagina 103). Let op: we zoeken dus niet een zo letterlijk mogelijke vertaling.

2. In het bewijs ben je het lijnstuk Σ tegengekomen. Wat was het nut van het gebruik van dit lijnstuk?

3. Wat valt je op aan de manier waarop Van Heuraet zijn stelling bewijst? Op welke vlakken is hij conservatief en waar juist vernieuwend?

HENRICI van HEVRAET EPISTOLA DE TRANSMVTATIONE CVRVARVM LINEARVM IN RECTAS.

Clarissimo Viro

D. FRANCISCO à SCHOOTEN
HENRICVS van HEVRAET
S. D.

CVm nuperrimè ex tuis ad me datis; Vir Clarissime, intellexerim, desiderio te teneri videndi Methodum à me inventam, cujus beneficio complures curvæ lineæ (ut tibi indicavit D. Huddenius) in rectas possunt transmutari: non omittendum duxi, quin eandem tibi ocyùs transmitterem, tuoque inprimis judicio exponerem. Verùm, præmonere te volui, eam à me tūnc temporis excogitatam esse, cùm iter in Galliam meditarer, quo nec omnia, quæ ea de re dici queunt, perpendere, nec quæ ante discessum inveneram, chartis committere valui. In Gallia verò nunquam rebus Mathematicis vacare, sed me totum aliis studiis applicare constitui; adeò ut vix quicquam prælo dignum me scribere posse confidam. Attamen ut petitioni tuæ utcunque satisfaciam, habitâ ratione temporis, quod mihi valde carum est: visum fuit in memoriam revocare, ac breviter conscribere, quæ ante circa hanc rem meditatus sum, eaque paucis hîc subjicere. Quæ, si Mathematicis non displicitura judices, Commentariis tuis adjungere poteris.

Dat. Salmurii, die 13 Ianuarii. A°. 1659.

Vale, & perge amare ex asse tuum

HENRICVM van HEVRAET.

Huddenius noster te salutat diligenter.

Ttt 3 Si

TRANSLATION*)

pag. 517

Hendrick van Heuraet
Letter
on the
transformation
of curves
into straight lines.

To the Honourable
Mr. Frans van Schooten
Hendrick van Heuraet
sends a salute.

When I had understood very recently, Honourable Sir, from your letter directed to me, that you desired to see the Method, invented by me, by means of which (as Mr. Hudde has indicated to you) several curves can be transformed into straight lines: I thought it right not to omit sending it to you quickly, and above all exposing it to your judgement. But previously I want to warn you, that I have devised this method while planning my journey to France because of which I was not able neither to weigh everything that can be said on that point, nor to commit to paper the things I had found before my departure. I decided, however not to occupy myself in France with mathematical matters, but to devote myself completely to other studies, to that extent that I hardly trust myself to be able to write anything worth printing. However, to satisfy your request anyhow, reckoning with the very scarce time I have, it seemed good to me to recall and briefly write down what I've thought out on this matter before, and to add these things here concisely. And if you judge that these things won't displease the Mathematicians, you may add them to your Commentaries.

Farewell, and pursue your affection for
yours faithfully
Hendrick van Heuraet

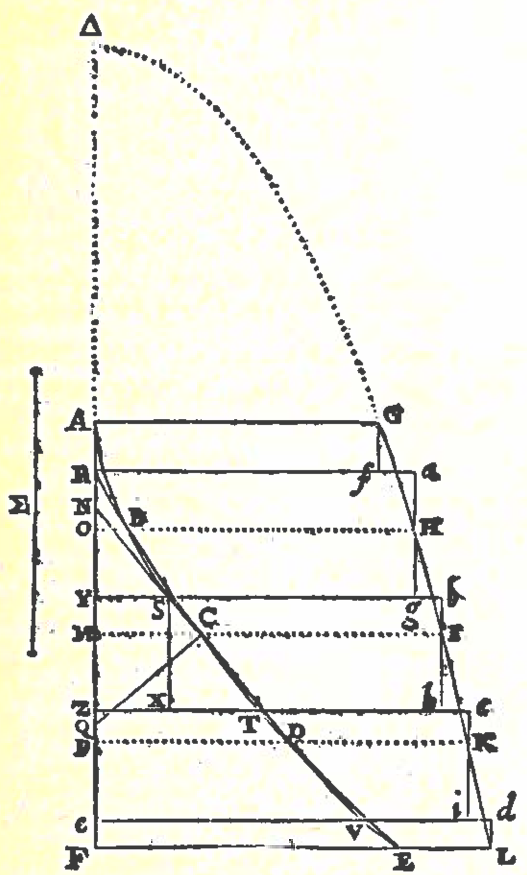
Saumur, January 13, 1659

Our Hudde gives his kind regards to you.

*In this translation we preserved to a large extent the original notation. So we use (as van Heuraet did) "yy" for "y^2","▭ VE,Σ" for "the rectangle with sides VE and Σ" and Descartes' sign of equality "∞".

518 HENRICI van HEURAET EPISTOLA

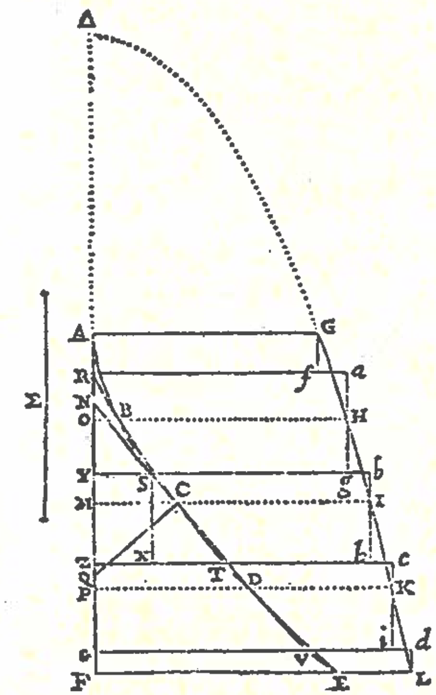
Si dentur duæ lineæ curvæ, exempli gratia, A B C D E, G H I K L, & recta A F, ejus naturæ, ut, (ducta ex puncto M, in linea A F pro libitu assumpto, perpendiculari M I, secante datas curvas in C & I, uti & C Q perpendiculari ad curvam A B C D E,) M C sit ad C Q, sicut linea aliqua data Σ ad M I: erit superficies A G H I K L F æqualis rectangulo comprehenso sub data linea Σ & alia recta æquali curvæ A B C D E.



Dividatur linea A F in partes quotcunque, verbi gratiâ, in punctis O, M, & P, ducanturque perpendiculares O H, M I, P K, secantes curvam A B C D E in punctis B, C, & D, ac curvam G H I K L, in punctis H, I, & K; & per puncta A, B, C, D, & E agantur tangentes, quæ sibi mutuò occurrant in R, S, T, & V; & per hæc puncta ducantur lineæ R *a*, Y *b*, Z *c*, *e d* perpendiculares ipsi A F; & per puncta G, H, I, K, & L agantur lineæ ipsi A F parallelæ, secantes R *a* in *f* & *a*, Y *b* in *g* & *b*, Z *c* in

pag 518[*)]

Let there be given two curves, e.g. ABCDE, GHIKL, and the straight line AF[1)] such that (if from an arbitrary point M on line AF the perpendicular MI is drawn, cutting the given curves in C and I, while CQ is taken perpendicular to the curve ABCDE) MC is to CQ as a certain given segment Σ to MI: then the superficies AGHIKLF will be equal to the rectangle contained by the given segment Σ and another segment equal to the curve ABCDE.



Let the line AF be divided in as many parts as you like, for example in the points O, M and P. And let the perpendiculars OH, MI, PK be drawn, cutting the curve ABCDE in the points B, C and D, and the curve GHIKL in the points H, I and K. And let through the points A, B, C, D, and E tangents be drawn, meeting eachother in R[2)], S, T, and V. And let through these points the lines R*a*, Y*b*, Z*c*, *ed* be drawn, perpendicular to AF. And let through the points G, H, I, K and L lines be drawn parallel to AF, cutting R*a* in *f* and *a*, Y*b* in *g* and *b*, Z*c*

*) The numbers 1),2) etc. refer to the notes.

in h & c, ed in i & d; denique ex S ducatur SX parallela lineæ AF, producaturque tangens TS uſque in N.

Propter rectum angulum NCQ, erit CM ad CQ, ut MN ad NC. Atqui MN eſt ad NC, ut SX ad ST. Quare erit SX ad ST, ut CM ad CQ. Et quia CM eſt ad CQ, ut Σ ad MI, erit & SX ad ST, ut Σ ad MI, ac proinde rectangulum ſub SX ſive YZ & MI ſive Yb æquale rectangulo ſub ST & Σ. Eodem modo demonſtrabitur, rectangulum ce eſſe æquale $\square^{lo}$ ſub TV & Σ, & $\square\, dF \infty \square$ VE, Σ, & $\square\, aY \infty \square^{lo}$ ſub RS & Σ. Quapropter omnia hæc rectangula ſimul ſumpta æqualia erunt rectangulo ſub Σ & alia recta æqualia omnibus tangentibus ſimul ſumptis. Vnde cum illud verum ſit, quotcunque rectangula atque tangentes extiterint, & figura ex parallelogrammis conſtans, ſi eorum numerus in infinitum augeatur, deſinat in ſuperficiem AGHIKLF, ac tangentes ſimiliter in lineam curvam ABCDE, liquet ſuperficiem AGHIKLF æqualem eſſe rectangulo ſub Σ & recta æquali curvæ ABCDE. Quod erat demonſtrandum.

Quomodo autem hinc longitudo datæ curvæ lineæ inveſtigari poſſit, ſequentibus exemplis patebit.

Sit primò curva ABCDE ejus naturæ, ut, ſumpto in linea AF pro libitu puncto M, ductâque perpendiculari MC, ſi AM vocetur x, & MC vocetur y, ſemper yy ſit $\infty \frac{x^3}{a}$. Deinde poſitis AQ ∞s, CQ ∞v, & MI ∞z: erit QM $\infty s-x$, & ejus quadratum $\infty ss-2sx+xx$. Cui ſi addatur quadratum ex MC, hoc eſt, yy ſive $\frac{x^3}{a}$, invenietur $ss-2sx+xx+\frac{x^3}{a} \infty vv$.

Propter duas æquales radices mult. juxta meth. Huddenii per $\underline{\;0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 0,\;}$

& invenietur $-2sx+2xx+\frac{3x^3}{a} \infty 0$.

Vnde AQ ſive $s \infty x+\frac{3xx}{2a}$, à qua ſi ſubtrahatur AM ∞x, remanebit MQ $\infty \frac{3xx}{2a}$, cujus quadratum eſt $\frac{9x^4}{4aa}$. cui adde $\square$ CM ſeu $\frac{x^3}{a}$, & proveniet $\square$ CQ $\infty \frac{9x^4}{4aa}+\frac{x^3}{a}$. Erit jam ut CM $\sqrt{\frac{x^3}{a}}$ ad CQ $\sqrt{\frac{9x^4}{4aa}+\frac{x^3}{a}}$, ita cognita aliqua linea, puta $\frac{1}{3}a$, (licet enim.

pag 519

in h and c, ed in i and d. And finally let from S SX be drawn parallel to the line AF, and let the tangent TS be produced to N.

Because of the right angle NCQ, CM will be to CQ as MN to NC. But MN is to NC as SX to ST. So SX will be to ST as CM to CQ. And because CM is to CQ as Σ to MI, there will also hold that SX is to ST as Σ to MI, and therefore the rectangle contained by SX or YZ and MI or Yb will be equal to the rectangle contained by ST and Σ. In the same way one proves the rectangle ce[3] to be equal to the $\square$ contained by TV and Σ, and $\square\, dF \infty \square$ VE, Σ and $\square\, aY \infty \square$ contained by RS and Σ. Therefore these rectangles taken together will be equal to the rectangle contained by Σ and another segment[4], equal to the tangents taken together. Because this is true for any number of rectangles and tangents, and the figure consisting of the parallelograms will finally become the superficies AGHIKLF if their number is increased to infinity, and because similarly the tangents will finally become the curve ABCDE, it is clear that the superficies AGHIKLF is equal to the rectangle contained by Σ and another segment equal to the curve ABCDE. Which had to be proved.

However, how the length of the given curve can be investigated using this, will reveal itself in the following examples.

Let first the curve ABCDE be such that, if on line AF an arbitrary point M is taken, if further the perpendicular MC is drawn, if AM is called x and MC is called y, yy always is $\infty \frac{x^3}{a}$. Further putting AQ ∞s, CQ ∞v and MI ∞z; there will hold QM $\infty s-x$, and its square $\infty ss-2sx+xx$. And if the square of MC, that is yy or $\frac{x^3}{a}$, is added to it, one will find $ss-2sx+xx+\frac{x^3}{a} \infty vv$.

Because of two equal roots[5] multiply according to Hudde's method[6] with $\underline{\;0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 0,\;}$

and one will find $-2sx+2xx+\frac{3x^3}{a} \infty 0$.

Therefore AQ or $s \infty x+\frac{3xx}{2a}$, and if from this AM ∞x is subtracted, there will remain MQ $\infty \frac{3xx}{2a}$, the square of which is $\frac{9x^4}{4aa}$. To this add $\square$ CM or $\frac{x^3}{a}$, and there will appear $\square$ CQ $\infty \frac{9x^4}{4aa}+\frac{x^3}{a}$. Thus, as CM – i.e. $\sqrt{\frac{x^3}{a}}$ – will be to CQ – i.e. $\sqrt{\frac{9x^4}{4aa}+\frac{x^3}{a}}$ –, so some known segment, put it $\frac{1}{3}a$ (for one

520 HENR. van HEVRAET EP. DE TRANSMVT. &c.

enim eam pro libitu assumere) ad MI ∞ z, eritque $z \infty \sqrt{\frac{1}{4}ax + \frac{1}{9}aa}$. Id quod arguit, lineam GHIKL esse Parabolam, cujus vertex est in Δ, existente $A\Delta \infty \frac{4}{9}a$, & latere recto $\infty \frac{1}{4}a$. ac proinde longitudo lineæ curvæ ABCDE est $\sqrt{\frac{v^3}{a}} - \frac{8}{27}a$, existente $\Delta F \infty v$.

Similiter si loco $yy \infty \frac{x^3}{a}$ ponatur hæc æquatio $y^4 \infty \frac{x^5}{a}$, aut $y^6 \infty \frac{x^7}{a}$, aut $y^8 \infty \frac{x^9}{a}$, atque sic porrò in infinitum: invenietur semper superficies AGHIKLF ejus naturæ ut quadrari possit, ac proinde omnes hæ curvæ in rectam sunt permutabiles.

Si verò ABCDE sit Parabola, cujus axis AG, & latus rectum ∞ a: invenietur MQ $\infty \frac{2x^3}{aa}$, & ejus quadratum $\infty \frac{4x^6}{a^4}$. cui adde quadratum CM, & habebitur $\frac{4x^6}{a^4} + \frac{x^4}{aa}$ pro $\square$ CQ. Hinc ut CM $\frac{xx}{a}$ ad CQ $\sqrt{\frac{4x^6}{a^4} + \frac{x^4}{aa}}$, sic cognita aliqua linea, puta a, ad MI ∞ z: eritque $z \infty \sqrt{4xx + aa}$, & linea GHIKL Hyperbola, cujus axis linea AG, centrum punctum A, latus rectum $\infty \frac{1}{2}a$, & transversum $\infty 2a$.

Quod ipsum docet, longitudinem curvæ Parabolicæ inveniri non posse, quin simul inveniatur quadratura Hyperbolæ, & vice versâ.

F I N I S.

pag. 520

may choose it arbitrary) to MI ∞ z, and so you will have $z \infty \sqrt{\frac{1}{4}ax + \frac{1}{9}aa}$.
And this argues that the line GHIKL is a parabola, the vertex of which is in Δ, with $A\Delta \infty \frac{4}{9}a$, and with latus rectum[7] $\infty \frac{1}{4}a$. And thus the length of the curve ABCDE is $\sqrt{\frac{v^3}{a}} - \frac{8}{27}a$, if $\Delta F \infty v$[8].

Similarly, if you put instead of $yy \infty \frac{x^3}{a}$ the following equation $y^4 \infty \frac{x^5}{a}$, or $y^6 \infty \frac{x^7}{a}$, or $y^8 \infty \frac{x^9}{a}$, and so on to infinity: you will always find such a superficies AGHIKLF that it can be squared, and therefore all these curves can be transformed into a straight line.

If, however, ABCDE is a parabola, having axis AG and latus rectum ∞ a: then you will find MQ $\infty \frac{2x^3}{aa}$ and its square $\infty \frac{4x^6}{a^4}$. Add to this CM squared, and you will have $\frac{4x^6}{a^4} + \frac{x^4}{aa}$ for $\square$ CQ. From this: as CM - i.e. $\frac{xx}{a}$ - is to CQ i.e. $\sqrt{\frac{4x^6}{a^4} + \frac{x^4}{aa}}$, so some known segment, put it a, to MI ∞ z: and so you will have $z \infty \sqrt{4xx+aa}$, and the line GHIKL will be a hyperbola, having axis AG, centre A, latus rectum $\infty \frac{1}{2}a$[9] and latus transversum $\infty 2a$[9].

And from this exactly we learn that the length of the parabolic curve cannot be found unless at the same time the quadrature of the hyperbola is found, and vice versa.

THE END.