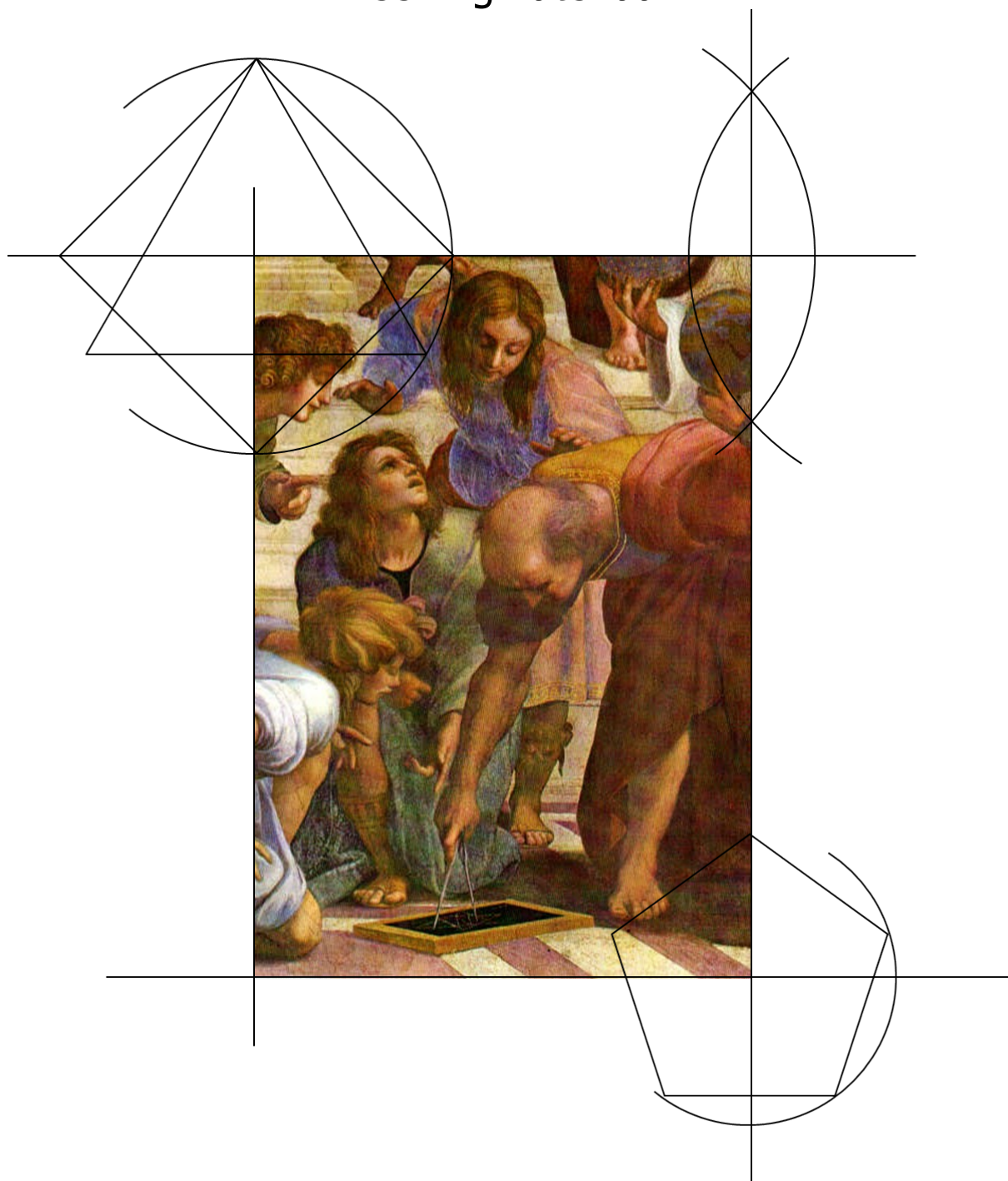


Meetkundige constructies

Leerlingmateriaal



Nynke Koopmans
Roeland Hiele

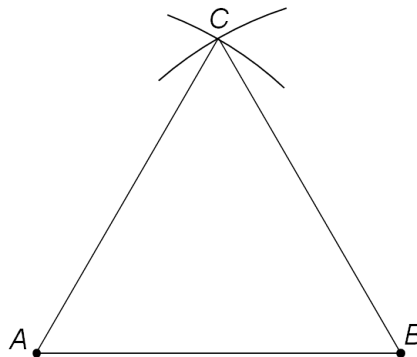
Historical Aspects of Classroom Mathematics
Universiteit Utrecht, juni 2013



Inleiding

Een meetkundige constructie is een tekening van vlakke figuren en lijnen, gemaakt met passer, lat, en potlood. Hierbij staat beschreven hoe de tekening is ontstaan. Met een lat wordt een liniaal bedoeld zonder schaal aanduiding. Je kunt er dus geen maten mee opnemen of aftekenen. Voor ons is tegenwoordig een lijn met getallen, zoals deze ook op een geo-driehoek of op een liniaal voorkomt een vanzelfsprekend begrip, maar dit is pas sinds Descartes in de 17^e eeuw een aanvaard principe. In de tijd van de Grieken (ongeveer 400 voor Christus tot 700 na Christus) kwam de uitspraak van de school van Pythagoras “Alles is getal” vooral neer op dat alles zich verhoudt als getal en ging het dus meer om de verhoudingen tussen getallen, dan om het getal zelf. Constructies zijn daardoor ook gebaseerd op een lengte-eenheid, en het kiezen van een ander lengte-eenheid doet niets af aan de geldigheid van de constructie. Een groot voordeel is dat deze manier van construeren op grote schaal is uit te voeren. Zowel een passer als lat kan je namelijk vervangen door een touw. Zo kan je bijvoorbeeld een tuin aanleggen volgens een constructie die je eerst op papier hebt gemaakt.

De hoogtijdagen van de Griekse wiskunde, van ongeveer 700 voor Christus tot 400 na Christus, vormen een belangrijke periode in de geschiedenis van de wiskunde. Er werd een basis gelegd voor de hedendaagse moderne wiskunde. Dit komt doordat zij geavanceerde meetkunde bedreven, met als basis meetkundige constructies, waarbij het idee van een formeel bewijs werd opgezet en gehanteerd. “Waarom heb je met een bepaalde constructie nu bereikt wat je wilde bereiken?”. Waarom heb je bijvoorbeeld met de constructie in de onderstaande figuur een gelijkzijdige driehoek geconstrueerd?



In de Griekse meetkunde leefde daarom de overtuiging dat alles wat bestond, ook te construeren was. En als iets niet te construeren was, bestond het daarom ook niet. Zo waren er enkele problemen waar wiskundigen nog eeuwen lang mee geworsteld hebben. De bekendste zijn:

- **De kwadratuur van een cirkel** - Een rechthoek construeren met een even groot oppervlak als een gegeven cirkel.
- **Driedeling van een hoek** - Een hoek in drie gelijke hoeken delen met behulp van een constructie.
- **Verdubbeling van de kubus** - Een kubus construeren waarvan de inhoud het dubbele is van de inhoud van een gegeven kubus.

Je kunt je voorstellen dat ze wel degelijk bestaan, maar er zijn sindsdien bewijzen voor elk probleem geleverd dat ze niet te construeren zijn met alleen passer, potlood en lat. Dat betekent dat de Griekse denkwijze over dat alles wat bestaat ook te construeren is, niet klopt.

Euclides leefde rond 300 voor Christus en heeft één van de meest invloedrijke werken in de geschiedenis van de wiskunde geschreven: de Elementen. Een boek waarin hij de eigenschappen van vlakke figuren en gehele getallen afleidt uit axioma's. Een axioma is een bewering die wordt aangenomen, en dus niet te bewijzen valt uit andere aannames. Deze axioma's dienen als basis om eigenschappen te bewijzen. Euclides' belangrijkste prestatie was dat hij ze allemaal in één samenhangend geheel wist te plaatsen, aangezien veel van deze eigenschappen al bekend waren. De schoonheid van de Elementen volgt uit het gebruik van slechts vijf axioma's waaruit Euclides 468 logisch opvolgende stellingen afleidde en formeel bewees.

De vijf axioma's waaruit alle eigenschappen van de vlakke meetkunde af te leiden zijn:

1. Door twee punten gaat één rechte lijn.
2. Elk lijnstuk kan willekeurig ver worden verlengd.
3. Elk middelpunt en elke straal beschrijven een cirkel.
4. Alle rechte hoeken zijn gelijk.
5. Als een rechte lijn twee andere rechte lijnen snijdt zodat de binnenhoeken aan één kant samen minder dan 180 graden zijn, dan snijden deze twee lijnen, wanneer ze tot in het oneindige worden verlengd, elkaar aan diezelfde kant.

Geen enkel van de axioma's kan bewezen worden. Het zijn uitgangspunten waarop de vlakke meetkunde is gebaseerd.

Vele wiskundigen hebben geprobeerd het vijfde postulaat te bewijzen uit de vier andere. Maar het ironische is, dat pas in de 19^e eeuw bewezen is dat er zonder het vijfde postulaat (maar wel de vier andere) een andere meetkunde kan ontstaan, zoals de bolmeetkunde en hyperbolische meetkunde. In de vlakke meetkunde (situatie 1) kun je bij een gegeven punt en lijn slechts op één manier een lijn door het punt trekken dat de gegeven lijn niet snijdt. In de bolmeetkunde (situatie 2) is er geen enkele lijn door het gegeven punt wat de gegeven lijn niet snijdt. Daarentegen zijn er in de hyperbolische meetkunde (situatie 3) oneindig veel lijnen door een gegeven punt die de gegeven lijn niet zullen snijden. Met andere woorden in bolmeetkunde heb je geen evenwijdige lijnen, in de hyperbolische meetkunde juist oneindig veel evenwijdige lijnen door een punt aan een gegeven lijn en in de vlakke meetkunde maar één evenwijdige lijn. Het vijfde postulaat maakt de meetkunde van Euclides dus tot de vlakke meetkunde en wordt daarom ook wel Euclidische meetkunde genoemd.



Vanaf het moment van het publiceren van de Elementen tot in de vroege 20^e eeuw (toen al meer dan 22 eeuwen lang!) waren de Elementen een belangrijk leerboek voor het onderwijs in de wiskunde en voornamelijk de meetkunde. De strikte methode om met behulp van redenering vanuit slechts enkele axioma's, stellingen te bewijzen is nog steeds van belang in de ontwikkeling van de wetenschap en wiskunde.

In deze lesmodules leer je meetkundige constructies maken, net zoals de Grieken met passer, potlood en lat. Daarbij zal je niet alleen de constructies maken, maar ook verder nadenken over de vraag die ook de Grieken zichzelf stelden: "Waarom heb ik nu geconstrueerd wat ik wilde construeren?".

Deze lessenserie bestaat uit vijf modules:

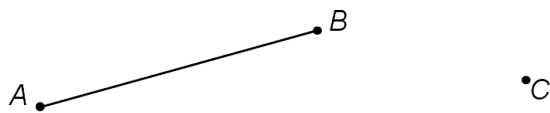
- Module 1: De basisconstructies
- Module 2: Constructies van bijzondere lijnen in driehoeken en de diepere betekenis
- Module 3: Lengtes construeren die de uitkomst van een som representeren
- Module 4: De wortel van een getal construeren in de vorm van een lengte
- Module 5: Regelmatige veelhoeken construeren

Module 1: Basisconstructies

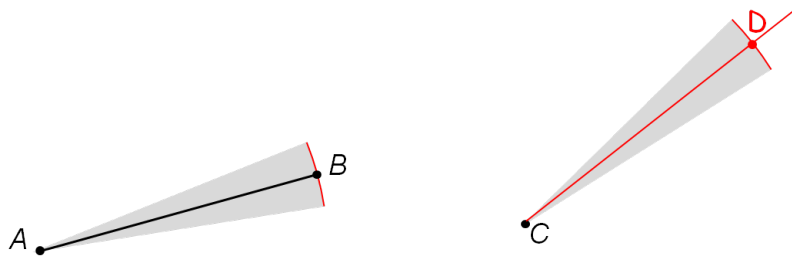
In deze module krijg je te maken met de belangrijkste basisconstructies en grijpen we terug naar enkele proposities van het construeren uit de Elementen van Euclides. Deze basisconstructies gaan over lijnstukken en hoeken, deze heb je nodig om de constructies te maken in de latere modules. Aan het eind van deze module kan je met behulp van de geleerde basisconstructies al de meeste geometrische figuren construeren.

1. Een lijnstuk met gelijke lengte aan gegeven lijnstuk

In propositie 2 van boek I beschrijft Euclides hoe je met een passer, lat en potlood een lijnstuk kan tekenen met gelijke lengte aan een gegeven lijnstuk. In figuur 1.1 is lijnstuk AB en punt C gegeven. De constructie is uitgebeeld in figuur 1.2. Een lijnstuk CD is geconstrueerd, zo dat $\text{lengte } AB = \text{lengte } CD$.



figuur 1.1



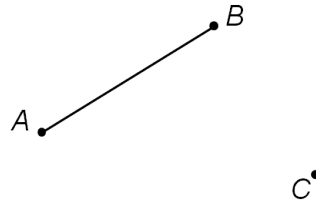
figuur 1.2

- Geef het stappenplan waarmee lijnstuk CD geconstrueerd is.
- Gegeven is lijnstuk KL en punt M op het **werkblad**. Construeer een lijnstuk MN met lengte KL .
- Gegeven is lijnstuk PQ op het **werkblad**. Construeer de gelijkzijdige driehoek PQR .

2. De lengte van een lijnstuk verdubbelen

Op soortelijke wijze als in opdracht 1 kun je ook de lengte van een lijnstuk verdubbelen.

In figuur 1.3 is lijnstuk AB en punt C gegeven. De figuur staat ook op het **werkblad**.



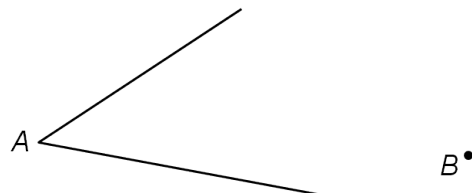
figuur 1.3

- Construeer op het **werkblad** een lijnstuk CD , zo dat deze een lengte van $2 \cdot AB$ heeft.
- Beschrijf de stappen die je hebt doorlopen.
- Gegeven is lijnstuk PQ en punt R op het **werkblad**.
Construeer een lijnstuk RS met een lengte van $4 \cdot PQ$.
- Gegeven is lijnstuk KL en punt A op het **werkblad**.
Construeer $\triangle ABC$ waarvoor geldt dat $AB = 5 \cdot KL$, $BC = 3 \cdot KL$ en $AC = 6 \cdot KL$.

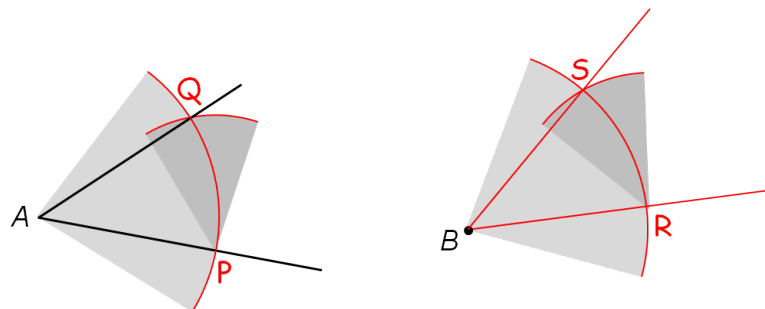
3. Een hoek met gelijke grootte aan een gegeven hoek

In propositie 23 van boek I beschrijft Euclides het tekenen van een hoek van gelijke grootte aan een gegeven hoek. In figuur 1.4 is $\angle A$ en punt B gegeven. De constructie wordt uitgebeeld in figuur 1.5.

Een $\angle B$ is geconstrueerd, zo dat $\angle B = \angle A$.



figuur 1.4

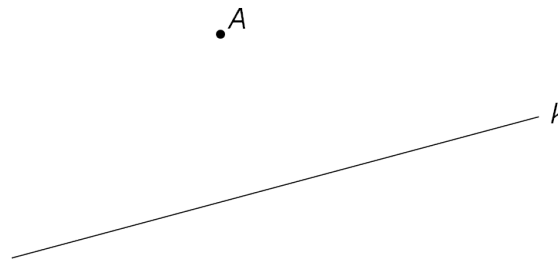


figuur 1.5

- Leg uit met welke stappen $\angle B$ geconstrueerd is.
- Gegeven is $\angle D$ en punt E op het **werkblad**. Construeer een $\angle E$, zo dat geldt $\angle E = \angle D$.
- Gegeven is $\angle F$ en punt G op het **werkblad**. Construeer een $\angle G$, zo dat geldt $\angle G = 2 \cdot \angle F$.

4. Een lijn door een gegeven punt evenwijdig aan een gegeven lijn

In propositie 31 van boek I beschrijft Euclides het construeren van een lijn door een gegeven punt evenwijdig aan een gegeven lijn. In opdracht 3 heb je geleerd hoe je een hoek kunt construeren met gelijke grootte aan een gegeven hoek. Gegeven zijn de lijn k en het punt A , zoals in figuur 1.6. De figuur staat ook op het **werkblad**.



figuur 1.6

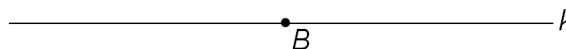
- Construeer op het **werkblad** een lijn door punt A evenwijdig aan k . Hint: Creëer Z-hoeken.
- Beschrijf de stappen die je hebt doorlopen.
- Op het **werkblad** staan de lijnstukken KL en KN getekend. KL en KN zijn twee zijden van het parallellogram $KLMN$. Construeer, gebruikmakend van evenwijdigheid, het parallellogram $KLMN$.

5. Een loodrechte lijn op een lijn door een punt op de lijn

In propositie 11 van boek I beschrijft Euclides het construeren van een lijn loodrecht op een gegeven lijn, door een gegeven punt op die lijn:

Gegeven is de lijn k en het punt B . Kies een willekeurig punt P ergens op k en teken het punt Q , zo dat $BP = BQ$. Teken de gelijkzijdige driehoek PQR . Teken lijn m door B en R . De lijn m staat loodrecht op k .

In figuur 1.7 is lijn k en punt B gegeven. De figuur staat ook op het **werkblad**.



figuur 1.7

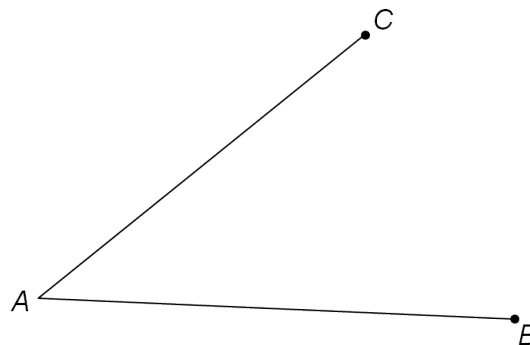
- Volg de beschrijving hierboven en construeer op het **werkblad** de lijn m door B loodrecht op k .
- Gegeven is lijnstuk KL op het **werkblad**. Construeer vierkant $KLMN$.
- Gegeven is lijnstuk AB en punt P op het **werkblad**. Van rechthoek $PQRS$ is gegeven dat zijde $PQ = 3 \cdot AB$ en zijde $PS = 4 \cdot AB$. Construeer rechthoek $PQRS$.

6. Een hoek in twee gelijke hoeken delen

In propositie 9 van boek I beschrijft Euclides het construeren van de deellijn of bissectrice van een gegeven hoek:

Gegeven is $\angle BAC$. Kies een willekeurig punt D ergens op been AC en teken het punt E op been AB, zo dat $AD = AE$. Teken de gelijkzijdige driehoek DEF. Teken lijn m vanuit A door F. De lijn m is de deellijn of bissectrice van $\angle BAC$.

In figuur 1.8 is $\angle BAC$ gegeven. De figuur staat ook op het **werkblad**.



figuur 1.8

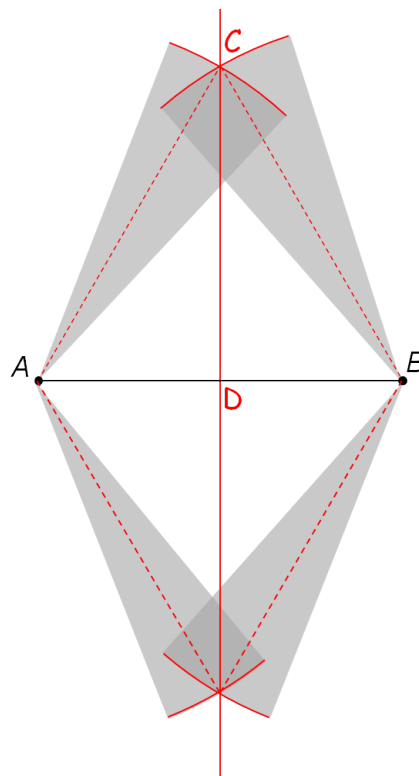
- a. Volg de beschrijving hierboven en construeer op het **werkblad** deellijn m .
- b. Beschrijf de relatie tussen $\triangle AFD$ en $\triangle AFE$ en licht toe hoe hieruit volgt dat $\angle CAF = \angle BAF$.
- c. Euclides maakt in zijn constructie gebruik van een gelijkzijdige driehoek.
Waarom hoeft de driehoek niet per se gelijkzijdig te zijn? Welke andere vorm driehoek kan je ook gebruiken?
- d. Het is mogelijk om een bissectrice te construeren met een vaste passermaat. Dit wil zeggen dat je met één vaste passerstand alle cirkelbogen in je constructie tekent. Construeer op het **werkblad** nogmaals de bissectrice van $\angle BAC$, maar dan met een vaste passermaat.
- e. Gegeven is $\angle P$ op het **werkblad**.
Deel $\angle P$ door middel van construeren in vier gelijke hoeken.

7. Een lijnstuk in twee gelijke lengten verdelen

In propositie 10 van boek I beschrijft Euclides het delen van een gegeven lijnstuk AB in twee stukken. Dit doet hij door middel van het tekenen van de gelijkzijdige driehoek ABC en vervolgens van $\angle ACB$ de bissectrice te tekenen. De bissectrice van $\angle ACB$ snijdt lijnstuk AB in D , zo dat $AD = BD$. De constructie is afgebeeld in figuur 1.9.



figuur 1.9

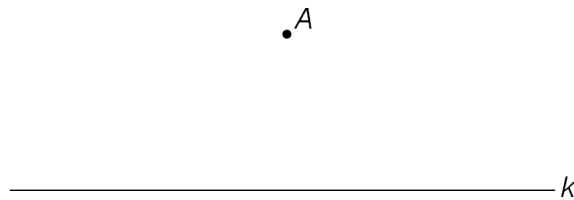


figuur 1.10

- Leg uit dat geldt $AD = BD$. Hint: gebruik congruente driehoeken.
- Licht toe dat de lijn door CD de middelloodlijn van lijnstuk AB is.
- Euclides maakt in zijn constructie wederom gebruik van gelijkzijdige driehoeken. Licht toe dat de driehoeken niet per se gelijkzijdig hoeven te zijn.
- Het is mogelijk om de middelloodlijn te construeren met een vaste passermaat anders dan lengte AB . Construeer met een vaste passermaat (anders dan lengte AB) de middelloodlijn van AB op het **werkblad**. Gebruik deze methode voortaan bij het construeren van het midden van een lijnstuk of de middelloodlijn van een lijnstuk.
- Wat is de maximale en minimale vaste passermaat die je kan nemen ten opzichte van lengte AB ?
- Op het **werkblad** zijn $\angle A$, lijnstuk BC en punt K gegeven. Voor parallellogram $KLMN$ geldt dat $KL = BC$ en $KN = BC : 2$. Verder is gegeven dat $\angle K = \angle A$. Construeer parallellogram $KLMN$.

8. Een loodrechte lijn op een lijn door een punt naast de lijn

In propositie 12 van boek I beschrijft Euclides het tekenen van een loodlijn op een lijn, door een punt naast de lijn. Wanneer we figuur 1.11 bekijken, gaat deze propositie over het tekenen van een lijn door punt A loodrecht op lijn k . De figuur staat ook op het **werkblad**.



figuur 1.11

- Construeer op het **werkblad** loodlijn m door A op lijn k . Hint: gebruik de opgedane kennis van opdracht 5 en 7.
- Beschrijf de stappen die je hebt doorlopen.

9. Afsluitende opdrachten

- Gegeven is de stomphoekige driehoek ABC op het **werkblad**.
Construeer $\triangle KLM$ waarvoor geldt dat $\text{opp } \triangle KLM = \text{opp } \triangle ABC$, $KL = AB$ en $\angle K = 90^\circ$.
- Gegeven is lijnstuk PQ op het **werkblad**. Van piramide $TABCD$ is gegeven dat het grondvlak rechthoekig is met $AB = 3 \cdot PQ$ en $BC = 5 \cdot PQ$. Verder is gegeven dat $TA = TD = 4 \cdot PQ$ en $TB = TC = 3 \cdot PQ$.
Construeer de uitslag van $TABCD$.

Module 2: Bijzondere lijnen in driehoeken

Inleiding

Je komt op de middelbare school al vroeg in aanraking met driehoeken en de bijzondere lijnen die daar bij horen. Deze module gaat in op het construeren van deze lijnen, bepaalde eigenschappen er van, en dus ook waarom ze die eigenschappen hebben.

1. De zwaartelijnen van een driehoek

Eén soort bijzondere lijn in een driehoek is een zwaartelijn. De definitie van een zwaartelijn is als volgt:

Een zwaartelijn gaat door een hoekpunt van een driehoek en snijdt de overstaande zijde middendoor.

- a. Hoeveel zwaartelijnen heeft elke driehoek?
- b. Construeer op het **werkblad** de zwaartelijnen van $\triangle ABC$. Wat valt je op?

2. De hoogtelijnen van een driehoek

Naast de zwaartelijnen heeft een driehoek ook nog hoogtelijnen. De definitie van een hoogtelijn is als volgt:

Een hoogtelijn van een driehoek gaat door een hoekpunt van een driehoek en snijdt de overstaande zijde, of het verlengde er van, loodrecht.

- a. Hoeveel hoogtelijnen heeft elke driehoek?
- b. Construeer op het **werkblad** de hoogtelijnen van $\triangle DEF$. Wat valt je op?

3. De bissectrices van de hoeken van een driehoek

In module 1 heb je in opdracht 6 geleerd hoe je een bissectrice van een hoek kunt construeren. Je weet dat een bissectrice een hoek middendoor deelt. De bissectrice van een hoek heeft nog een andere eigenschap:

Voor de bissectrice van een hoek geldt dat elk punt op de bissectrice gelijke afstand heeft tot beide benen van de hoek.

- a. Gegeven is $\triangle PQR$ op het **werkblad**. Construeer de bissectrices van $\angle P$, $\angle Q$ en $\angle R$. Wat valt je op?

4. De middelloodlijnen van de zijden van een driehoek

In module 1 heb je in opdracht 7 geleerd hoe je een middelloodlijn van een gegeven lijnstuk kunt construeren. Je weet dat een middelloodlijn een lijnstuk middendoor deelt en daarbij dit lijnstuk loodrecht snijdt. De middelloodlijn van een lijnstuk heeft nog een andere eigenschap:

Voor een middelloodlijn van een gegeven lijnstuk geldt dat elk punt op de middelloodlijn gelijke afstand heeft tot de twee eindpunten van het lijnstuk.

- a. Gegeven is $\triangle PQR$ op het **werkblad**. Construeer de middelloodlijnen van zijden PQ , QR en PR van $\triangle PQR$. Wat valt je op?

5. Omgeschreven en ingeschreven cirkel

Je gaat leren hoe je de omgeschreven en ingeschreven cirkel van een driehoek construeert. Je ontdekt dat twee van de eerder ontdekte snijpunten van de vier genoemde bijzondere lijnen de middelpunten van deze cirkels zijn.

De bissectrices van de drie hoeken van een driehoek gaan door één punt. Noem dit punt M .

- a. Leg uit *waarom* de drie bissectrices door één punt gaan.
Hint: maak gebruik van de eerder genoemde eigenschap van de bissectrice.
- b. Noem in de figuur van 3a op het **werkblad** het punt waar de drie bissectrices doorheen gaan het punt M en teken de cirkel met middelpunt M rakend aan zijde PQ . Wat valt je op?
- c. De cirkel die alle drie de zijdes van een driehoek raakt, heet de ingeschreven cirkel. Beschrijf hoe je in zo weinig mogelijk stappen de ingeschreven cirkel kunt construeren.

De middelloodlijnen van de drie zijden van een driehoek gaan door één punt. Noem dit punt N .

- d. Leg uit *waarom* de drie lijnen door één punt gaan.
Hint: maak gebruik van de eerder genoemde eigenschap van de middelloodlijn.
- e. Noem in de figuur van 4a op het **werkblad** het punt waar de drie middelloodlijnen doorheen gaan het punt N en teken de cirkel met middelpunt N en straal NP . Wat valt je op?
- f. De cirkel door alle drie de hoekpunten van een driehoek heet de omgeschreven cirkel. Beschrijf hoe je in zo weinig mogelijk stappen de omgeschreven cirkel kunt construeren.

6. De rechte van Euler

Leonhard Euler is volgens velen één van de belangrijkste wiskundigen ooit en wordt beschouwd als de belangrijkste wiskundige van de 18^e eeuw. Zijn publicaties overstijgen de 800. Bekende symbolen zoals het getal π en e zijn van hem afkomstig. Tot dan toe was het symbool π , wat voor ons zo vanzelfsprekend is, nog niet toegekend aan de verhouding van de omtrek en de diameter van een cirkel. Euler verrijkte de wiskunde op alle fronten waar de wiskunde zich tot op dat moment zich ontwikkeld had. Ook op het vlak van de meetkunde heeft hij nieuwe ontdekkingen gedaan. Een voorbeeld hiervan is het verband tussen de hoekpunten H , de ribben R en zijvlakken Z van een veelvlak, een regelmatige ruimtelijke figuur. Euler toonde aan dat de relatie tussen deze elementen van een veelvlak wordt gegeven door de formule $H - R + Z = 2$. Voldoen de veelvlakken die je kent aan deze formule? De volgende vragen zullen gaan over een veelhoek, een vlakke figuur.

- a. Gegeven is $\triangle ABC$ op het **werkblad**. Construeer in zo weinig mogelijk stappen het hoogtepunt H , het zwaartepunt Z en het middelpunt M van de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$.

Euler vond een relatie tussen het hoogtepunt, het zwaartepunt en het middelpunt van de omgeschreven cirkel van een willekeurige driehoek. Hij bewees dat deze drie punten altijd op een rechte liggen. Deze relatie staat bekend als *de rechte van Euler*.

- b. Teken een lijn door de drie punten en controleer of de drie punten op één lijn liggen. Als je netjes getekend hebt, zou dit moeten kloppen.

7. Afsluitende opdracht: Middelpunt van een cirkel

Inmiddels heb je gezien hoe je bij een driehoek twee bijzondere cirkels kunt construeren, namelijk de omgeschreven- en de ingeschreven cirkel. In beide gevallen construeerde je de cirkel aan de hand van het middelpunt. Maar wat als juist de cirkel gegeven is? Kun je dan ook het middelpunt vinden?

- a. Gegeven is cirkel c op het **werkblad**.
Construeer het middelpunt M . Hint: denk aan de omgeschreven cirkel.
- b. Beschrijf hoe je met behulp van construeren, in zo weinig mogelijk stappen, het middelpunt van een cirkel kunt vinden.

8. Afsluitende opdracht: Middendriehoek

Waarom gaan de drie hoogtelijnen van een driehoek nu precies door één punt? Een antwoord kan gevonden worden door middel van de *middendriehoek*.

Door van twee zijden van een driehoek de middens met elkaar te verbinden krijg je een lijnstuk. Zo'n lijnstuk noemt men ook wel een *middenparallel*. Met gelijkvormigheid en F-hoeken kan men aantonen dat dit lijnstuk evenwijdig loopt met de overige zijde van de driehoek. Door alle drie de middens van de drie zijden van een driehoek te verbinden ontstaan drie middenparallellellen die samen de middendriehoek vormen.

- a. Gegeven is $\triangle ABC$ op het **werkblad**.
Construeer de middelloodlijnen van $\triangle ABC$ en vervolgens de middendriehoek van $\triangle ABC$. Noem de middendriehoek $\triangle DEF$.
- b. De middelloodlijnen van $\triangle ABC$ zijn een drietal bijzondere lijnen van middendriehoek $\triangle DEF$.
Welk drietal bijzondere lijnen zijn dit en waarom?
- c. Leg uit hoe je hieruit af kunt leiden dat de hoogtelijnen altijd door één punt gaan.

Module 3: Construerend rekenen

Inleiding

In deze module maak je een uitstapje naar de link tussen meetkunde en getallen. De Grieken mixten deze twee wiskundige gebieden niet op de manier zoals jij dat gaat doen, maar tegenwoordig is die connectie niet meer weg te denken. Descartes, waar het cartesiaans assenstelsel dat jij in de wiskunde lessen gebruikt naar vernoemd is, heeft als eerste over deze manier van rekenend construeren geschreven. Hij benaderde de meetkunde met behulp van assenstelsels en formules en gaf de aanzet tot de overbrugging van tot dan toe twee losse gebieden: de meetkunde en de algebra. Als er in deze module over een getal wordt gesproken, wordt daar in Euclidische termen lengte mee bedoeld. Helaas konden er binnen de Griekse meetkunde niet meer dan drie getallen met elkaar vermenigvuldigd worden. Dit kwam omdat zij met meetkundige ogen naar de bewering 'vermenigvuldigen' keken. Dat gaat als volgt:

- Als je twee lengtes met elkaar vermenigvuldigt, krijg je een oppervlakte.
- Als je een oppervlakte met een lengte vermenigvuldigt, krijg je een inhoud.
- Als je een inhoud zou vermenigvuldigen met een lengte zou er iets in de vierde dimensie ontstaan. Iets wat niet in onze wereld voorkomt, daarom niet te construeren is en dus ook niet bestaat.

Dat betekent niet dat Grieken niet vier getallen konden vermenigvuldigen, want bij aantallen kon dat uiteraard wel. Ze mixten dit soort berekeningen alleen niet met meetkunde. Dat ga jij wel doen. Als er in deze module wordt gesproken over een getal wordt daarmee de lengte van een lijnstuk bedoeld.

1. Optellen

- a. Gegeven zijn twee lijnstukken AB van lengte 3 en CD van lengte 5 op het **werkblad**. Construeer een derde lijnstuk EF met lengte 8.
- b. Construeer een lijnstuk AG met lengte 8.

2. Aftrekken

Op dezelfde manier als optellen, kan je ook aftrekken.

- a. Neem dezelfde lijnstukken AB van lengte 3 en CD van lengte 5 op het **werkblad**. Construeer lijnstuk CH van lengte twee.
- b. Construeer een lijnstuk KL van lengte 1. Je mag daarbij geen gebruik maken van het delen van lijnstuk CH .

3. Vermenigvuldigen

Je gaat hier niet een oppervlakte construeren die de uitkomst van de vermenigvuldiging representeert zoals de Grieken deden. Je gaat hier een lijnstuk construeren waarbij de lengte van het lijnstuk de uitkomst van de vermenigvuldiging representeert.

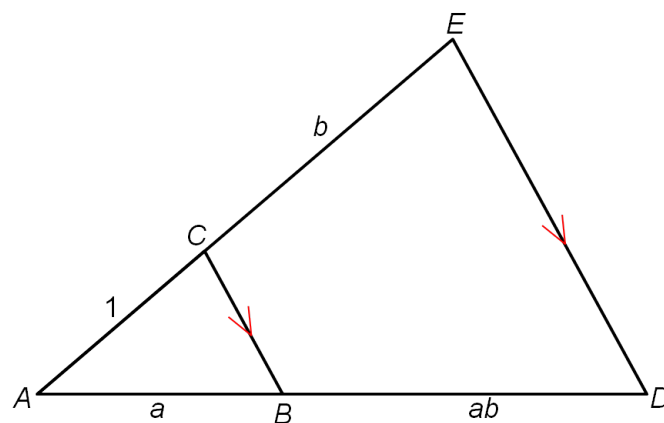
- Gegeven is het lijnstuk BC op het **werkblad**.
Construeer een lijnstuk BD dat 2 keer zo lang is als BC .
- Construeer een lijnstuk BE dat 5 keer zo lang is als BC .
- Construeer een lijnstuk BF dat 8 keer zo lang is als BC .

Bij de constructie van BF is het handig, gebruik te maken van de verdubbeling van BC . Door een verdubbeling herhaald toe te passen, kun je op een snelle manier elke willekeurige lengte 2, 4, 8, 16, 32, ... zo groot maken.

- Maak deze opdracht alleen als je bij 3b geen verdubbelingsconstructie hebt gebruikt.
Construeer nogmaals in zo weinig mogelijk stappen een lijnstuk dat 5 keer zo lang is als BC .
- Beredeneer hoeveel constructiestappen minimaal nodig zijn om een lijnstuk 200 keer zo lang te maken.
- Kun je met deze techniek ook een lijnstuk vermenigvuldigen met 2,8?

Je kan nu elk lijnstuk een factor a keer zo lang maken. Hoewel de verdubbelingsconstructie een iets snellere manier biedt, wordt het problematisch als je getallen gaat vermenigvuldigen die geen gehele getallen zijn. Daarnaast kan een vermenigvuldiging met simpelweg een erg groot geheel getal ook al erg veel stappen opleveren.

Er bestaat een constructie waarin twee willekeurige getallen (gerepresenteerd door lengtes) vermenigvuldigd kunnen worden. Deze constructie is weergegeven in figuur 3.1.



figuur 3.1

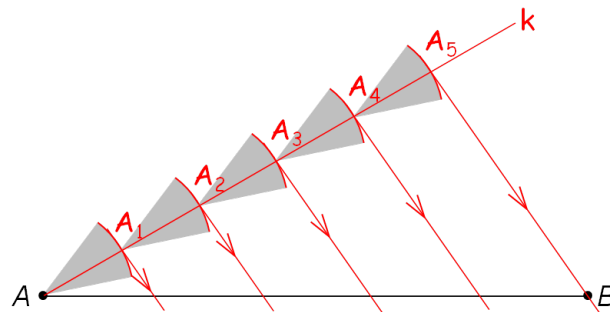
- Leg uit hoe de constructie is opgezet en hoe daaruit volgt dat lengte BD het product is van lengte AB en lengte CE . Hint: maak gebruik van gelijkvormigheid.
- Op het werkblad zijn gegeven de lijnstukken KL , MN en PQ met lengtes 1, c en d .
Construeer een lijnstuk met de lengte van het product cd .
- Op het werkblad zijn gegeven de lijnstukken AB , CD , EF en GH met lengtes 1, a , b en c .
Construeer een lijnstuk met de lengte van het product abc .

4. Delen

Naast het optellen, aftrekken en vermenigvuldigen van lengtes die getallen representeren, kan je ook getallen delen. Eén soort deling heb je al gedaan in module 1, namelijk het delen door 2.

- Welke eerdere constructie kan opgevat worden als het delen door 2?
- Gebruik deze constructie om op het **werkblad** lijnstuk AB in 8 gelijke stukken te delen.
- Kun je met deze constructie een lijnstuk ook in 6 gelijke stukken verdelen? Licht je antwoord toe.

Met deze constructie kun je een lijnstuk in 2, 4, 8, 16, ... gelijke stukken verdelen, maar met deze constructie is het niet mogelijk om een lijnstuk in bijvoorbeeld 3, 5, 6 of 7 stukken te verdelen. Hiervoor is dus een andere constructie nodig. Thales van Milete, een Griekse koopman die 500 v. Chr. leefde en onder andere bekend staat vanwege de stelling van Thales, kwam met de constructie voor het delen van een lijn in een willekeurig aantal stukken. In figuur 3.2 is een voorbeeld van zo'n constructie gegeven om een lijnstuk AB in vijf gelijke stukken te delen.



figuur 3.2

- Beschrijf de stappen van de constructie.
- Maakt het uit welke straal gekozen wordt voor de cirkelbogen en hoe schuin lijn k staat?
- Op het werkblad staat lijnstuk AB nogmaals gegeven. Verdeel lijnstuk AB in zes gelijke delen.
- Kun je deze techniek gebruiken om een lijnstuk te delen door 2,8?

Bij de constructie van Thales deel je een getal door een geheel getal. Maar voor het delen door een niet-geheel getal zoals bijvoorbeeld een lengte van 2,8 is deze constructie niet bruikbaar. Daarom is er een andere constructie waarbij dit wel mogelijk is. Deze constructie heeft veel weg van de gelijkvormigheidsconstructie van figuur 3.1.

- Bedenk een constructie voor het delen van twee getallen en voer deze uit.
- Op het werkblad zijn gegeven de lijnstukken CD , EF en GH met lengtes 1, a en b . Construeer een lijnstuk met de lengte van de deling a/b .

5. Afsluitende opdrachten

- Op het werkblad zijn gegeven de lijnstukken AB , BC , CD , DE en EF met lengtes 1, a , b , c en d . Construeer een lijnstuk met de lengte van $\frac{ab}{cd}$.
- Gegeven zijn de lijnstukken AB , BC en CD met lengtes 1, a en b . De lengte van product ab is de omtrek van de gelijkzijdige driehoek KLM . Construeer $\triangle KLM$.
- Gegeven zijn de lijnstukken PQ , QR en RS met lengtes 1, p en q . Construeer het vierkant $ABCD$ waarvan AC lengte $\frac{p}{q}$ heeft.

Module 4: Wortels

Inleiding

De vijfde en meteen laatste construeerbare operatie is de wortel trekken van een getal. Descartes stelde in zijn boek *Géométrie* voor het eerst dat de operatie worteltrekken te construeren is.

1. Wortel constructies

In deze opdracht ga je een aantal wortels leren construeren. Op het **werkblad** staat een lengte-eenheid die je gebruikt bij de opdrachten.

- Construeer $\sqrt{2}$.
- Construeer $\sqrt{5}$.
- Construeer $\sqrt{8}$.
- Construeer $\sqrt{10}$.
- Construeer $\sqrt{13}$.

Gebruikmakend van de stelling van Pythagoras en de kennis die je bij opgave a t/m e hebt opgedaan is het ook mogelijk om misschien niet zo voor de hand liggende wortels te construeren.

- Construeer $\sqrt{3}$.
- Construeer $\sqrt{7}$.
- Voor het construeren van $\sqrt{7}$ zijn er twee mogelijkheden. Geef naast je antwoord op opdracht g nog een tweede mogelijke constructie.

In de laatste drie opgaven heb je een indirecte manier gebruikt om $\sqrt{n}$ te construeren.

- Zoek uit wat het minimale aantal constructiestappen is om $\sqrt{43}$ te construeren.

2. De directe constructie van $\sqrt{n}$

Net als bij vermenigvuldigen en delen, is er voor $\sqrt{n}$ een directe constructie. In deze opgave leer je deze directe constructie.

- De constructie is gebaseerd op de stelling van Thales. Geef de stelling van Thales.
- Voor $\triangle ABC$ geldt dat $\angle C = 90^\circ$. Op het **werkblad** is zijde AB en het voetpunt D van de hoogtelijn uit C gegeven. Construeer $\triangle ABC$.
- Neem $AD = p$, $BD = q$ en $CD = h$. Toon aan dat geldt $h^2 = pq$.
- Leg uit dat met deze constructie van elk getal de wortel te construeren is. Maak hierbij handig gebruik van de vergelijking uit 2c.

3. Afsluitende opdrachten

- Construeer een gelijkzijdige driehoek met zijde $\sqrt{24}$.
- Construeer $\triangle ABC$ waarvan gegeven is dat $AB = \sqrt{20}$ en $BC = \sqrt{15}$ en waarvan de straal van de omgeschreven cirkel $\sqrt{8}$ is.

Module 5: Regelmatige veelhoeken construeren

In de voorgaande modules zijn we de constructies van een paar regelmatige veelhoeken al tegengekomen zoals de constructie van regelmatige drie- en vierhoeken. In deze module ga een aantal lastig te construeren veelhoeken leren construeren. Als inleiding hierop gaan we eerst terug naar de constructies van de regelmatige vierhoek en driehoek, alleen nu beredeneerd vanuit de omgeschreven cirkel.

1. Regelmatige vierhoek

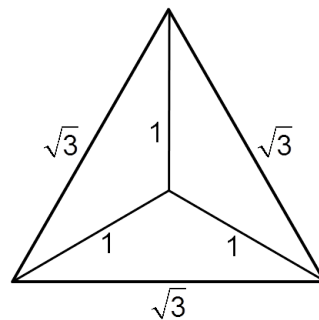
Bij regelmatige veelhoeken kunnen we een omgeschreven en een ingeschreven cirkel tekenen. Een handige vaardigheid is het construeren van een veelhoek in een gegeven cirkel.

- a. Construeer in cirkel c op het **werkblad** een regelmatige vierhoek $ABCD$ met de hoekpunten gelegen op de cirkel.

2. Regelmatige driehoek

Net als een regelmatige vierhoek is er in een gegeven cirkel ook een regelmatige driehoek te construeren.

- a. Zie figuur 5.1. Toon aan dat voor een gelijkzijdige driehoek met zijden $\sqrt{3}$ de afstand van elk hoekpunt tot het hoogtepunt van de driehoek gelijk is aan 1.

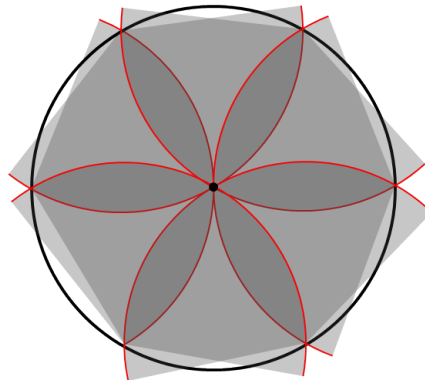


figuur 5.1

- b. Op het **werkblad** is cirkel d gegeven. Construeer een regelmatige driehoek DEF waarvan de hoekpunten op de cirkel liggen.

3. Regelmatige zeshoek

Naast de regelmatige driehoek en vierhoek kun je ook een regelmatige zeshoek in een gegeven cirkel construeren. In de figuur hieronder is een constructie gegeven die een regelmatige zeshoek oplevert.

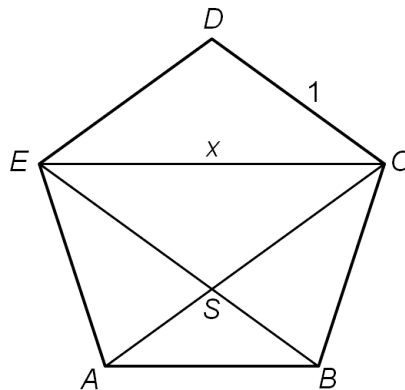


figuur 5.2

- Leg uit waarom deze constructie een regelmatige zeshoek oplevert.
- Leg uit dat je deze constructie kunt gebruiken om een regelmatige driehoek in een cirkel te construeren.
- Construeer op je **werkblad** in cirkel e in een regelmatige driehoek KLM met deze nieuwe constructie. Doe dit in zo weinig mogelijk stappen.

4. Regelmatige vijfhoek

In het rijtje van de regelmatige veelhoeken ontbreekt nog de constructie van de regelmatige vijfhoek. In figuur 5.3 is regelmatige vijfhoek $ABCDE$ met zijden 1 afgebeeld. Verder zijn er drie diagonalen AC , BE en CE getekend.

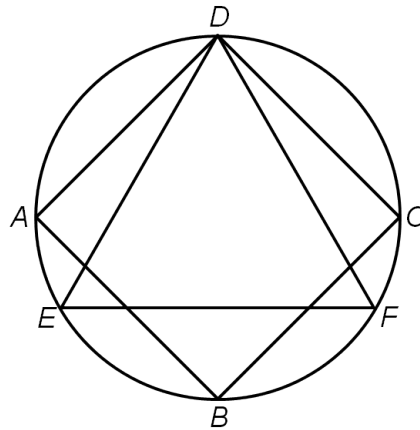


figuur 5.3

- Toon met gelijkvormigheid aan dat geldt $\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$.
- Toon aan dat hieruit volgt dat $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
- Construeer met behulp van de lengte-eenheid op het **werkblad** een vijfhoek $PQRST$ met zijden 1.

5. Regelmatige twaalfhoek

Door regelmatige drie-, vier-, vijf- en zeshoeken te combineren, kunnen grotere regelmatige veelhoeken geconstrueerd worden. In figuur 5.4 is een regelmatige vierhoek $ABCD$ en een regelmatige driehoek DEF getekend, waarvan de omgeschreven cirkels samenvallen.



figuur 5.4

- Leg met behulp van de figuur uit dat een regelmatige twaalfhoek kan worden geconstrueerd door regelmatige driehoeken en vierhoeken te combineren.
- Construeer een twaalfhoek. Kies zelf een combinatie van regelmatige veelhoeken en een handige grootte.

6. Afsluitende opdracht: regelmatige vijftienhoek

- Construeer een vijftienhoek.
- Leg uit waarom de verkregen vijftienhoek regelmatig is.