Functies van $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

meest voorstelbaar: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

of $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

1) Contoursverzamelingen
2) Hoe krijg je een idee van zo'n fie.
3). limieten
4) continuiteit
5) diff
6) integreren

Contourlijnen bij een fie $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

zijn lijnen waarvoor geldt $f(x,y)=c$
voor een constante c

Voorbeeld.

$$f(x,y) = \frac{x}{2+x^2+y^2}$$

Vind de contourlijnen:

$$\frac{x}{2+x^2+y^2} = c \rightsquigarrow \text{als } c=0 \text{ dan } x=0$$ dwz de y-as is contourlijn

$$x = c(2+x^2+y^2)$$

$$\frac{x}{c} = 2 + x^2 + y^2$$

mits $c \neq 0$

$$x^2 - \frac{x}{c} + 2 + y^2 = 0$$

$$\left(x-\frac{1}{2c}\right)^2 - \frac{1}{4c^2} + 2 + y^2 = 0$$

$$\boxed{\left(x-\frac{1}{2c}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4c^2} - 2}$$

contourlijn bij $c \neq 0$

Cirkels met midpt $\left(\frac{1}{2c}, 0\right)$
en straal $\sqrt{\frac{1}{4c^2}-2}$
mits $\frac{1}{4c^2} > 2$

$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ Contourlijnen zoeken:

$\frac{x-y}{x+y} = c$ $\quad x - y = c(x+y)$

$$(1-c)x = (1+c)\,y$$

$$y = \frac{1-c}{1+c}\,x$$

Dit zijn rechte lijnen door O met helling $\frac{1-c}{1+c}$ mits $c \neq -1$.

Als $c = -1$ dan $f(x,y) = -1$

$$x - y = -x - y$$
$$x = 0$$

Limieten achtergrond: §10.1 open / gesloten / omgeving

§12.2 Def. onbruikbaar

Alternatief: p 679 onder / p. 680 boven

(a) Veeltermen zoals $P(x,y) = x^3 + x^2 y + y$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} P(x,y) = P(a,b)$$

(b) Als $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$

en $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = M$

dan $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) + g(x,y) = L + M$

$$f(x,y)\cdot g(x,y) = LM$$

$$\frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M} \text{ mits } M \neq 0.$$

etc.

Continuiteit

f is continu in (a,b)

als geldt dat

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$