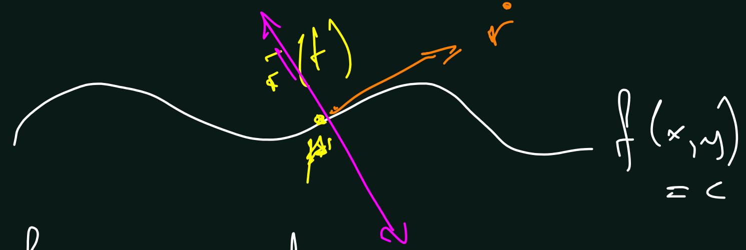
$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Neem een contour $f(x,y) = c$ voor constante c

Dit geeft een contourlijn en die parametriseren we met

$\bar r = \bar r(t)$ dwz $f(\bar r(t)) = c$



$$\bar r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Diff hem naar t: $\frac{\partial f}{\partial x}(\bar r(t))\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar r(t))\frac{dy}{dt} = 0$

Andere notatie: $f_1(\bar r(t))\,\dot x(t) + f_2(\bar r(t))\,\dot y(t) = 0$

Lees dit als inproduct:

$$\begin{pmatrix} f_1(\bar r(t)) \\ f_2(\bar r(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot x(t) \\ \dot y(t) \end{pmatrix} = 0$$

of korter:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} f_1(\bar r) \\ f_2(\bar r) \end{pmatrix}}_{\text{gradient van } f} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \dot x \\ \dot y \end{pmatrix}}_{= \dot{\bar r}} = 0$$

NIEUW

De vector $\underbrace{\begin{pmatrix} f_1(\bar r) \\ f_2(\bar r) \end{pmatrix}}_{\text{zie figuur}}$ staat dus orthogonaal op $\dot{\bar r}$

Def De gradient van $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is de vector

$$\text{grad } f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, \dots \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

$$= \left(f_1, f_2, f_3, \dots f_n \right)$$

part. diff.

∇ [Nabla (harp)
Del ($\heartsuit$, hart)

Voorbeeld: $f(x,y) = x^2 + y^2$ $\qquad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Contourlijnen zijn cirkels.

Neem contour $x^2 + y^2 = 1$

Parametriseer:

$$\bar{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

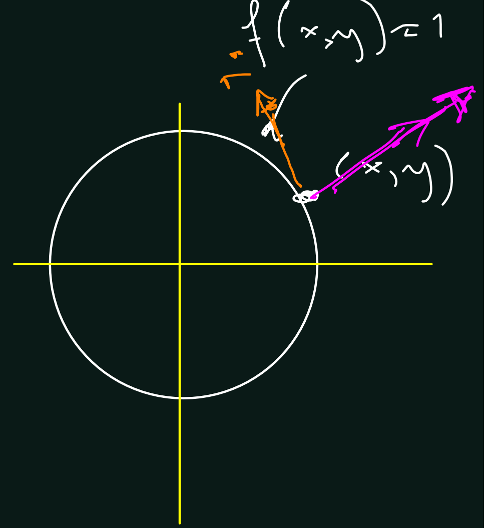
$$\dot{\bar{r}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

Dan diffi

$f(x,y) = 1$ diff naar t:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0$$ f invullen

$$2x \cdot \dot{x} + 2y\,\dot{y} = 0$$ $\vec{r}$ invullen



$$2\cos t(-\sin t) + 2\sin t\cos t = 0$$

Ha, dat klopt nog ook.

Bovendien, $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$

Okee dus ∇f staat $\perp$ contourlijn. Maar welke kant op?

- Neem $z = f(x,y)$ en een eenheidsvector $\hat{u}$ (lengte 1)
- Bekijk een rechte lijn door (a,b) met richting $\hat{u}$

$\vec{r}(t) = (a,b) + t\,\hat{u}$ Parameter t

• Merk op: $t = 0$: $\bar r(0) = (a, b)$

$\frac{d\bar r}{dt} = \hat u$ en $\left|\frac{d\bar r}{dt}\right| = 1$

• Kijk nu naar hoe f verandert langs dit pad.

$$\frac{d}{dt} f(\bar r(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar r)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar r)\frac{dy}{dt} = \nabla f(\bar r)\cdot \dot{\bar r} =$$
$$= \nabla f(\bar r)\cdot \hat u$$

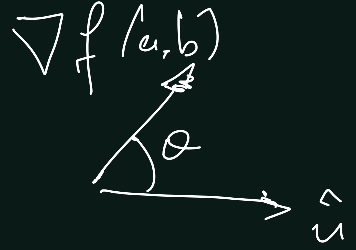
• En doe dit vooral in $t=0$, dwz in $\bar r(0) = (a, b)$

$$\boxed{\left.\frac{d}{dt} f(\bar r(t))\right|_{t=0}} = \nabla f(a,b)\cdot \hat u$$

de verandering van f langs $\hat u$

(*)

• Interpreteer $\nabla f(a,b)\cdot\hat u = |\nabla f(a,b)|\,|\hat u|\cos\theta$ met θ als hieronder



$= |\nabla f(a,b) \cos\theta$

dit is maximaal als $\cos\theta = 1$

dwz als $\theta = 0$

dwz als $\nabla f(a,b)$ evenwijdig aan $\hat{u}$

Conclusie:

1). $\nabla f(a,b)$ staat in de richting van de grootste toename van f.

2). [Neem $\theta = \pi$] $-\nabla f(a,b)$ staat in de richting vd grootste afname.

3) $-\nabla f(a,b) \leq \nabla f(a,b) \cdot \hat{u} \leq \nabla f(a,b)$

4). $\nabla f(a,b) \cdot \hat{u}$ geeft de toename van f in de richting van $\hat{u}$

Naar aanleiding hiervan definieren we: richtingsafgeleide

van f in (a,b) in de richting $\hat{u}$.

notatie: $D_{\hat{u}} f(a,b)$

is per def. $\frac{d}{dt} f(a+tu_1, a+tu_2)\Big|_{t=0}$

En vervolgens stelling:

$$D_{\hat{u}} f(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot \hat{u}$$