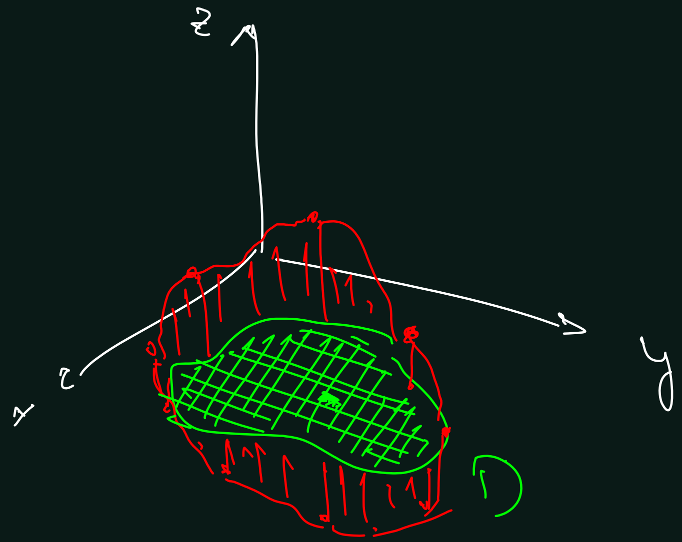
§14.1+2(+3) Integreren.

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad z = f(x,y)$

in $\mathbb{R}$: gebied D



f integreren over D

1). D opdelen in kleine vierkantes dA

2). Kies in elk vierkantje één punt (x_i, y_i) en bereken $f(x_i, y_i)$

$f(x_i, y_i)\, dA \approx$ volume van zo'n balkje $\longrightarrow$

3) Tel bij elkaar: $\sum\sum f(x_i, y_i)\, dA$

4). Neem $\lim dA \to 0$

Twee kansen: $\lim_{dA \to 0} \sum\sum f(x_i, y_i)\, dA$

→ Convergent, dit is $\iint_D f(x,y)\, dA$

→ Divergent: $\iint_D f(x,y)\, dA$ bestaat niet

(f is niet int.baar over D)

Het misgaan kan liggen aan:

1). D niet begrensd (later). $\Bigg\| \rightarrow$ Convergentie / divergentie is spannend.

2) f niet begrensd (later)

3). de rand van D is te ingewikkeld (afblijven)

Eigenschappen van dubbele integraal $\iint_D f(x,y)\, d\underline{A}$

$$\iint_D f(x,y)\, d(x,y)$$

Zie p. 871. Onder andere:

(b) Opp van D is $\iint_D 1\, dA = \iint_D d(x,y)$

Trouwens, $\iint_D dA$ is ook het volume van een ding met hoogte 1 en grondvlak D.

(e). <u>Lineariteit</u> $\iint_D \lambda f(x,y) + \mu g(x,y)\, dA = \lambda \iint_D f\, dA + \mu \iint_D g\, dA$

(f) Als $f \le g$ op gebied D, dan $\iint_D f\,dA \le \iint_D g\,dA$

(g). Driehoeksongelijkheid $\left|\iint_D f(x,y)\,dA\right| \le \iint_D |f(x,y)|\,dA$

Gebruiken

$$\iint_C \sin x + y^3 + 4\,dA = 4\pi R^2$$

$\downarrow$ Lineariteit

$$\iint_C \sin x\,dA + \iint_C y^3\,dA + 4\underbrace{\iint_C dA}$$

C is cirkel met straal R.

Sin is oneven fct.
C is symmetrisch tov y-as
integraal = 0

4 · opp cirkel = $4\pi R^2$

= 0 ook vanwege symmetrie.

14.2. Terminologie:

$$\iint_D f(x,y)\,d(x,y)$$ dubbele integraal

$$\int_p^q \underbrace{\int_a^b f(x,y)\,dx}\,dy$$ herhaalde integraal.

$$\int_r^s \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$ — " — " —

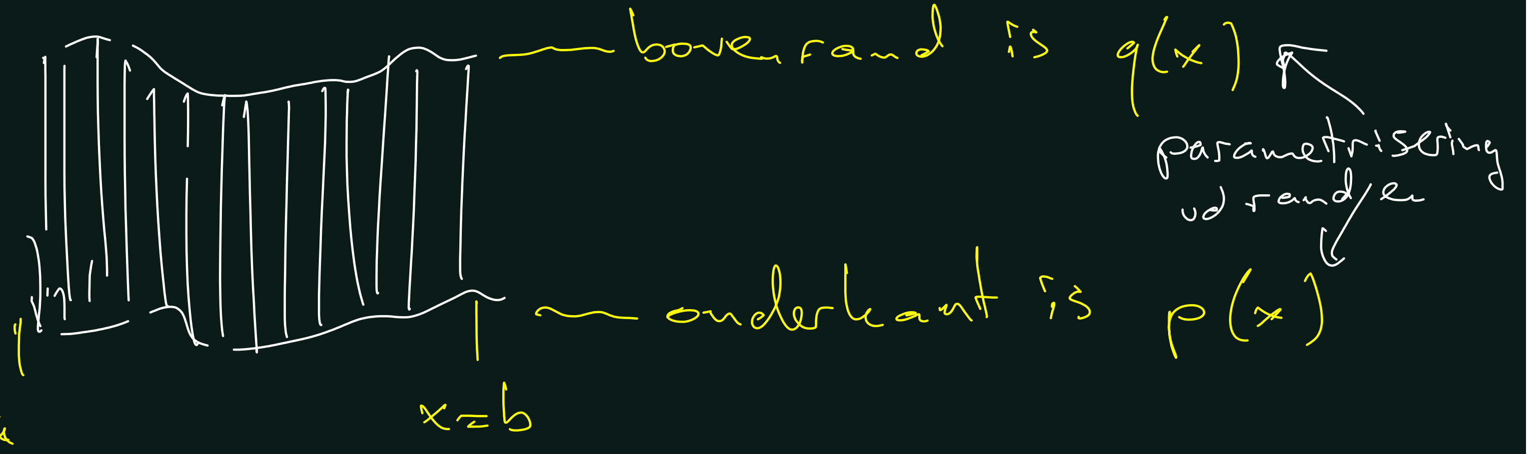
THEMA: dubbele integralen omzetten in herhaalde int.

Belangrijk: dit vereist vooral een goede behandeling van D.

(soms) opdelen

(zeker) parametriseren

D heet y-simpel als het er uitziet als:

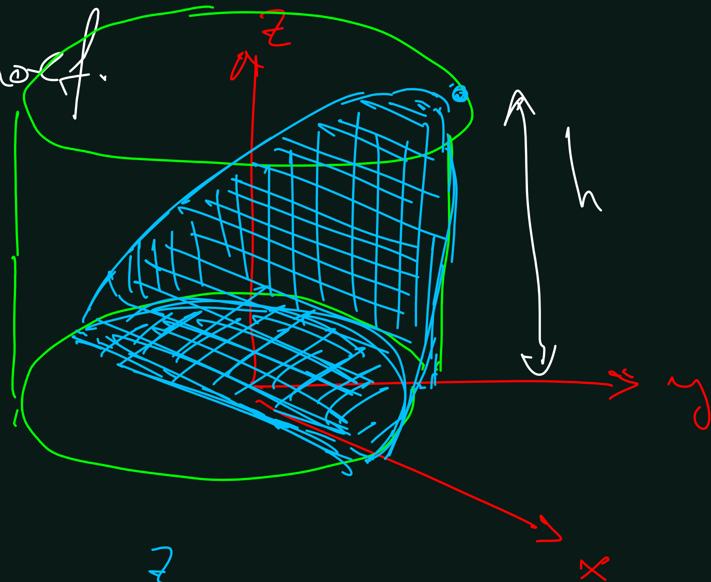


$$\iint_D f(x,y)\,d(x,y) = \int_a^b \int_{p(x)}^{q(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

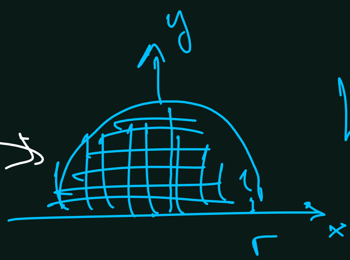
D heet x-simpel als het er uitziet als

$$\iint_D f(x,y)\,d(x,y) = \int_a^b \int_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Voorbeeld. Volume van de cylinderhoef.

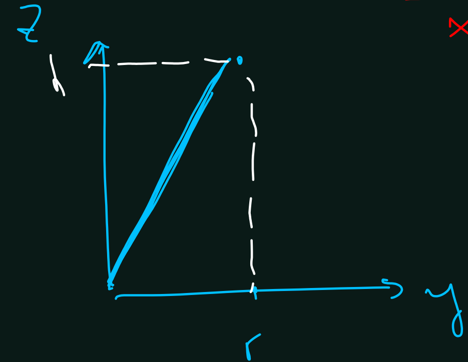


Noem dit D



halve cirkel met straal r

in elk punt (x,y) van D is de hoogte vd hoef: $z = \frac{h}{r} y$

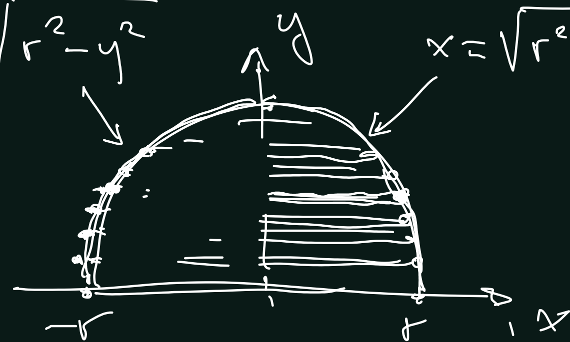


$$\mathrm{Vol} = \iint_D z \, d(x,y) = \frac{h}{r} \iint_D y \, d(x,y)$$

Je hebt hier keuze: eerst over x of eerst y integreren.

Bijv. eerst over x:

$$\frac{h}{r} \iint_D y \, d(x,y) = \frac{h}{r} \int_0^r \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{+\sqrt{r^2-y^2}} y \, dx \, dy$$



$$= 2\frac{h}{r}\int_0^r y \int_0^{\sqrt{r^2-y^2}} dx \, dy$$

$$= 2\frac{h}{r}\int_0^r y \left[x \right]_{x=0}^{x=+\sqrt{r^2-y^2}} dy$$

$$= \frac{2h}{r}\int_0^r y\sqrt{r^2-y^2}\, dy$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{2h}{r}\left[(r^2-y^2)^{3/2} \right]_{y=0}^{y=r} = +\frac{2}{3}\frac{h}{r} r^3 = \frac{2}{3}hr^2$$

Andere manier: binnenste integraal over y:

$$\int_{-r}^{+r}\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} y \, dy \, dx$$

etc