Plusopgave over hyperbolische functies WT1 okt 2017

Sin en cos zijn bekende functies die je in verband kunt brengen met de (eenheids)cirkel. In deze opgave introduceren we verwante functies die in de natuurkunde veel voorkomen: de *sinus hyperbolicus* sinh en *cosinus hyperbolicus* cosh. We definiëren ze als

$$\sinh t = \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}, \qquad \cosh t = \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}.$$

Ter illustratie: de *kettinglijn* is de kromme die je ziet als je de twee uiteinden van een ketting op enige afstand van elkaar ophangt; deze kromme heeft de vorm van een cosinus hyperbolicus.

1. Schets in één figuur de grafieken van $y = \mathrm{e}^x$, $y = \mathrm{e}^{-x}$, $\sinh x$ en $\cosh x$. Doe dit netjes. Je hoeft geen functieonderzoek te doen; gebruik gewoon wat je weet over de grafiek van $y = \mathrm{e}^x$.

2. Wat is het grootst mogelijke domein van deze functies? Vind alle nulpunten. Onderzoek of deze functies *even*, *oneven* of geen van beide zijn.

3. Bepaal de afgeleides van sinh en cosh. Wat valt je op?

4. Bereken $\cosh t - \sinh t$ en $\cosh t + \sinh t$. Laat hiermee *zonder extra rekenwerk* zien dat $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$. Hint: merkwaardig product.

Het resultaat van de laatste opgave lijkt op de bekende uitdrukking $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$. Zoals je weet doorloopt het punt $(x, y) = (\cos t, \sin t)$ een cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 1$ wanneer je t laat lopen van 0 tot 2π. Evenzo doorloopt het punt $(x, y) = (\cosh t, \sinh t)$ één tak van een hyperbool met vergelijking $x^2 - y^2 = 1$ wanneer je t laat lopen over heel $\mathbb{R}$.

5. Schets de kromme $x^2 - y^2 = 1$ (dit is een hyperbool). Onderzoek in welk punt van de kromme je bent voor verschillende waarden van t; teken dit ook duidelijk in je figuur.

Aangezien sinh een 1-op-1 functie is, heeft hij een inverse. Deze inverse heet de *arcsinus hyperbolicus*, notatie arsinh naar analogie met de gonio-functies. We gaan nu deze inverse expliciet uitrekenen.

6. Noem $\operatorname{arsinh} x = t$ en merk op dat *dus* geldt $x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t})$. Substitueer hierin $\mathrm{e}^t = u$. Dit geeft een uitdrukking waarin x en u voorkomen. Manipuleer deze in de vorm van een kwadratische vergelijking in u. Los op voor u. Concludeer dat $\operatorname{arsinh} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$. Leg uit waarom $\log(x - \sqrt{x^2 + 1})$ geen optie is.

7. Herhaal de stappen van de vorige opgave, maar nu met $\operatorname{arcosh} x = t$. Als alles goed gaat kom je uit op $\operatorname{arcosh} x = \log(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$. Leg uit waarom je hier *wel twee* oplossingen krijgt, ja zelfs had moeten verwachten.

Om het laatste punt nog iets te verduidelijken: $\cosh t$ is niet 1-op-1: het is zelfs een even functie. Dit betekent dat er een inverse is voor de linkerhelft van de grafiek ($t \le 0$) en een andere inverse voor de rechterhelft ($t \ge 0$). Net zo zijn $-\sqrt{t}$ en $+\sqrt{t}$ twee verschillende inverses van $f(t) = t^2$, horende bij het domein $t \le 0$ of $t \ge 0$.

8. Leg uit: de twee inverses van een *even* functie $y = f(x)$ zijn elkaars spiegelbeeld bij spiegelen in de x-as.

9. Je moet je nu dus afvragen: zijn de twee uitdrukkingen voor $\operatorname{arcosh} x$, te weten $\operatorname{arcosh} x = \log(x - \sqrt{x^2-1})$ en $\operatorname{arcosh} x = \log(x + \sqrt{x^2-1})$, elkaars spiegelbeeld bij spiegelen in de x-as? Leg eerst uit dat hiervoor nodig is:
$$\frac{1}{x - \sqrt{x^2-1}} = x + \sqrt{x^2-1}.$$
Toon vervolgens aan dat dit inderdaad klopt. Hint: creatief nietsdoen.

10. Bepaal de afgeleides van arcosh en arsinh door de gevonden uitdrukkingen van opg. 6 en 7 te differentiëren. Dit is een beetje tricky, maar een uitstekende oefening voor je algebraische vaardigheden! Je eindresultaat moet erg veel lijken op de afgeleides van arcsin en arccos.

11. Je kunt de afgeleides ook vinden door het differentiëren van $f^{-1}(f(x)) = x$. Doe dat ook, en gebruik opg. 4 erbij.

12. Als je nog tijd en zin hebt: er is natuurlijk ook een $\tanh t = \frac{\sinh t}{\cosh t}$. Probeer, in de geest van de voorgaande opgaven, zo veel mogelijk over tanh en zijn inverse artanh te weten te komen. Concreet: schets de grafiek, bepaal de afgeleide (twee vormen, net als bij tan), en laat zien dat de inverse gelijk is aan
$$\operatorname{artanh} x = \tfrac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}.$$