Keplers wetten en Newtons gravitatie

Steven Wepster*

WisTech 1/ Infi A, 2017

1 Inleiding

Aan het eind van de 16e eeuw maakte Tycho Brahe een grote collectie astronomische waarnemingen van voor die tijd ongekend hoge nauwkeurigheid. In 1600–1601 werkte Johannes Kepler met hem samen om met die data nieuwe astronomische tabellen te maken, beter dan de bestaande. Hierbij merkte Kepler dat het niet mogelijk was om volledig recht te doen aan de hoge kwaliteit van de waarnemingen: wat hij ook probeerde, er bleven restfouten over die te groot waren vergeleken met de waarneemnauwkeurigheid.

In die tijd waren alle bestaande opvattingen over de loop van de hemellichamen gebaseerd op perfecte cirkels. Er zat maar één ding op: cirkels loslaten. In 1604 was Kepler eruit, maar door omstandigheden duurde het nog tot 1609 voordat hij zijn inzichten kon publiceren in zijn boek *Astronomia Nova*. Zijn eerste "wet" over de ellipsvorm van de baan heeft hier een prominente plaats in. De tweede "wet" over de perken staat er wel in maar nogal verstopt; Kepler onderkende het fundamentele belang ervan nog niet.

De derde wet over de relatie van de baanafmeting en de omlooptijd heeft Kepler pas in 1618 gevonden en gepubliceerd in *Harmonice Mundi* – een boek over de harmonie van het universum dat door een 20e eeuwse commentator is omschreven als "een weefsel van wetenschap, poezie, filosofie, theologie, en mystiek". Tegenwoordig maken we streng onderscheid tussen "wetenschap" en "pseudo-wetenschap" maar toen waren die nog veel meer verweven.

Keplers drie "wetten" zijn dus empirisch gevonden en pas later als wetten bijelkaar gezet en afgezonderd van zijn overige – soms metafysische – werk. Hij interesseerde zich wel voor fysische oorzaken maar kon die nog niet goed aanwijzen.

Wie die fysische oorzaken wel kon aanwijzen, was Isaac Newton. In 1684 vroeg Edmund Halley aan Newton wat de baan van een lichaam zou zijn als er op het lichaam een

*Met dank aan Marlou Slot, René van Westen, Dries van Oosten en Jan Hogendijk.

centraal gerichte kracht zou werken die omgekeerd evenredig is met het kwadraat van de afstand. Een ellips, antwoordde Newton zonder aarzeling, maar hij kon zijn berekening niet terugvinden. Aangespoord door Halley schreef Newton eind dat jaar een manuscript *De Motu Corporum in Gyrum* waarin hij laat zien dat zo'n kracht precies Keplers wetten impliceert. Echter, Keplers wetten zijn empirisch, dus misschien niet exact, dus waarom zou Newtons krachtwet dat wel zijn.

In de jaren die volgden werkte Newton zijn ideeën verder uit. Stapsgewijs ging hij inzien dat zijn gravitatiewet niet alleen Keplers wetten verklaarde, maar ook allerlei andere eerder onbegrepen verschijnselen, zowel op aarde als in de astronomie. In 1687 verscheen dan zijn *Principia mathematica philosophiae naturalis*, een revolutionair boek dat de natuurkunde zijn wiskundige basis gaf.

Overigens was de wiskunde in Newtons tijd nog sterk verwant aan klassieke (Griekse) meetkunde. Differentiaal- en integraalrekening kom je in de *Principia* niet tegen, ook al is Newton één van de grondleggers ervan.

In deze workshop leid je zelf de wetten van Kepler af uit de gravitatiewet van Newton, niet op de manier zoals hij dat zelf deed maar zoals men dat in de 20e en 21e eeuw doet met differentiaal- en integraalrekening.

2 Keplerwetten

De drie wetten van Kepler zijn:[1]

- K1 Planeten bewegen in ellipsbanen met de zon in één van de brandpunten;
- K2 de verbindingslijn zon-planeet beweegt in gelijke tijdsintervallen over gelijke oppervlaktedelen van de ellips (de zogenaamde *perkenwet*);
- K3 het kwadraat van de baanperiode heeft een vaste verhouding tot de derde macht van de grootste baandiameter (deze verhouding is voor alle planeten in hetzelfde zonnestelsel gelijk).

Deze drie wetten gaan we afleiden uit Newtons principe van universele gravitatie: de gravitatieversnelling is (i) gericht naar het centrale lichaam, de zon en (ii) evenredig met r^{-2}, of preciezer: de versnelling heeft grootte

$$a = -\frac{GM}{r^2}, \tag{1}$$

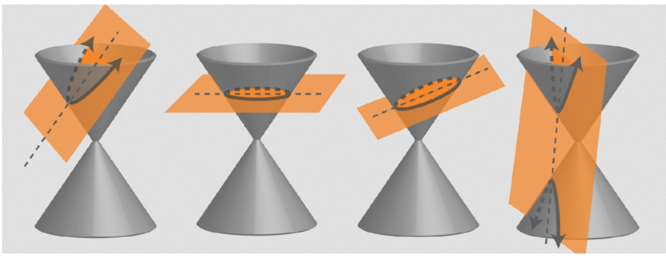
[1] De eerste wet is nog iets algemener te maken: namelijk dat oplossingen van het tweelichamenprobleem kegelsneden zijn, en de derde wet blijkt iets aan precisie in te leveren doordat de planeet zelf ook de zon aantrekt. Met beide verfijningen houden we in dit verhaal geen rekening.

waarin M de massa van de zon en G de gravitatieconstante.

Verder hebben we natuurlijk wat kennis over ellipsen nodig, welke als eerste aan bod zal komen. Daarna introduceren we een bijzonder nuttige manier om met coördinaten om te gaan. In de paragrafen daarna leiden we achtereenvolgens K2, K1 en K3 af.

3 Ellipsen

Een kegelsnede krijg je als je een kegel snijdt met een vlak. Denk bij "kegel" aan twee feestmutsen met de punten tegen elkaar aan. We nemen aan dat het snijvlak niet precies door de top van de kegel gaat. Er zijn drie mogelijkheden: de intersectie van het vlak met de kegel geeft een ellips, parabool of hyperbool. We definiëren deze krommen als volgt: je krijgt een ellips als het snijvlak één van de feestmutsen helemaal doorsnijdt, een hyperbool als het er twee doorsnijdt, en een parabool in het grensgeval tussen ellips en hyperbool in.



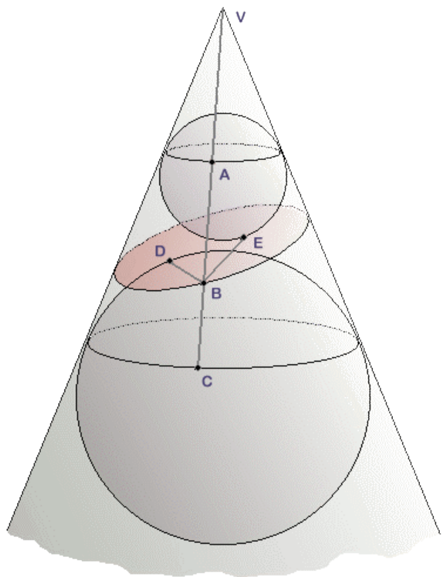
Figuur 1: Kegelsneden

Opg. 1. Zie figuur 1. Geef in elk van de vier situaties aan welke kromme het snijvlak uit de kegel snijdt. NB een cirkel is een bijzonder geval van ellips.

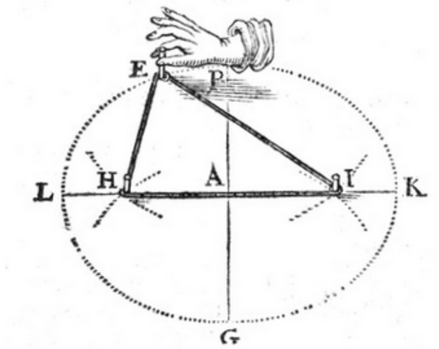
In figuur 2 zie je een halve kegel met top V en met twee bollen erin. De kegelmantel raakt elk van de bollen in een cirkel. De lijn $VABC$ ligt op de kegelmantel en snijdt de cirkels in resp. A en C. Punt B ligt op de ellips die wordt uitgesneden door een vlak dat raakt aan de twee bollen in D resp. E. Vanuit B kun je vier verschillende raaklijnen zien aan de twee bollen.

Opg. 2. Gebruik die raaklijnen om te beredeneren dat $BE + BD = AC$. Hint: wat voor moois kun je opmerken over de lengte van verschillende raaklijnen uit B aan één en dezelfde bol?

Opg. 3. Een bekende manier om een ellips te tekenen is met een touwtje en twee spijkers, de zgn. *tuinmansconstructie* in figuur 3. Gebruik het resultaat van de vorige opgave om te laten zien dat deze constructie klopt. (Let op, de letters in de figuren komen niet met elkaar overeen).



Figuur 2: Bollen van Dandelin



Figuur 3: De tuinmansconstructie

We bekijken nu de ellips met middelpunt C in figuur 4. De twee spijkers van de tuinmansconstructie zijn hier de *brandpunten* F en F'. De ellips heeft twee onderling loodrechte assen: we noemen de *halve lange as* $a = CA$ en de *halve korte as* $b = CB$. We definiëren nog de *excentriciteit* als $\varepsilon = CF : CA$.

Opg. 4. Laat zien dat voor elk punt P op de ellips geldt dat $FP + F'P = 2a$.

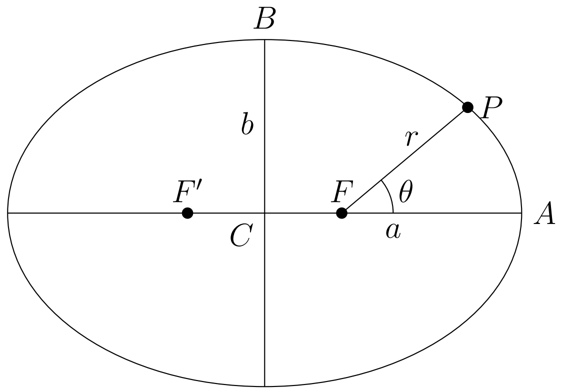
Opg. 5. Laat zien: $b^2 = a^2(1 - \varepsilon^2)$. Hint: driehoek $F'BF$.

We voeren poolcoördinaten in met F als oorsprong. Dat wil zeggen: een punt P heeft coördinaten $r = FP$ en $\theta = \angle PFA$. Dit geldt voor elk punt in het vlak, maar we zijn vooral geïnteresseerd in punten op de ellips.

Opg. 6. Bekijk driehoek $F'FP$. Je kent hierin twee zijden en een hoek. Gebruik de cosinusregel[2] om de derde zijde $F'P$ te vinden. Gebruik opgave 4 om $F'P$ te elimineren, zodat je alleen a, ε, r en θ overhoudt. Los op voor r en leid af dat:

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \theta}.$$

[2]Cosinusregel: in een driehoek met zijden a, b en C en met γ de hoek tussen de zijden a en b geldt $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$.



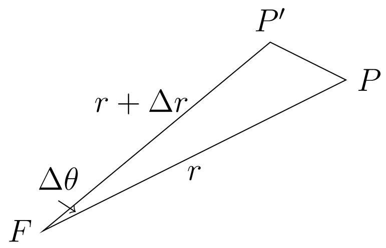
Figuur 4: Ellips met poolcoördinaten

Je hebt nu een vergelijking voor de ellips die r geeft als functie van θ.

Opg. 7. Vind *zonder differentiëren* de extreme waarden van r, en controleer dat hun som $2a$ is.

Verder hebben we nog een weetje over ellipsen nodig, namelijk: de oppervlakte van de ellips met halve assen a en b is πab. Dit is eenvoudig in te zien als je de ellips bekijkt als een in één richting samengeperste cirkel met straal a, maar je leert het ook berekenen in WisTech2/Infi B.

4 K2 vertaald naar poolcoördinaten



Figuur 5: Een perkje van de ellips

De bewering van K2 is dat de voerstraal FP in gelijke tijdsintervallen over gelijke oppervlaktedelen van de ellips beweegt. Als A de oppervlakte is die door de voerstraal bestreken is, dan kunnen we K2 opvatten als de bewering dat $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$ constant is.

In figuur 5 is FP de voerstraal op tijdstip t, FP' op tijdstip $t+\Delta t$. Noem $\angle PFP' = \Delta\theta$, $FP = r$, $FP' = r + \Delta r$, en laat tenslotte ΔA de oppervlakte van driehoek PFP' zijn. We verwaarlozen dus de kromming in de baan en veronderstellen dat de planeet in een rechte lijn van P naar P' beweegt.

Opg. 8. Laat zien: $\Delta A = \frac{1}{2}r(r+\Delta r)\sin\Delta\theta$.

Deze vergelijking delen we aan beide kanten door Δt, zodat we krijgen:

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2}\frac{r(r+\Delta r)\sin\Delta\theta}{\Delta t}. \tag{2}$$

Voor zeer kleine waarden van Δt zijn ook de andere Δ-variabelen zeer klein.

Opg. 9. Leg zo precies mogelijk uit wat je verwaarloost als je de benadering

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2}r^2\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{3}$$

maakt. In het bijzonder: laat zien dat elke term die je verwaarloost (behalve de baankromming) minstens één Δ meer in de teller dan in de noemer heeft. Verklaar hiermee dat in de limiet geldt

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}. \tag{4}$$

Samenvattend: K2 is equivalent met de bewering dat $r^2\dot{\theta}$ constant is.

5 Het baanvlak

Als oorsprong F van ons coördinatenstelsel kiezen we het middelpunt van de zon. We denken ons de planeet P met positie $\boldsymbol{r}$, de vector van F naar P. Alle vectoren die we gaan gebruiken zullen we opvatten als tijdafhankelijk; in het bijzonder is de snelheid van P gelijk aan

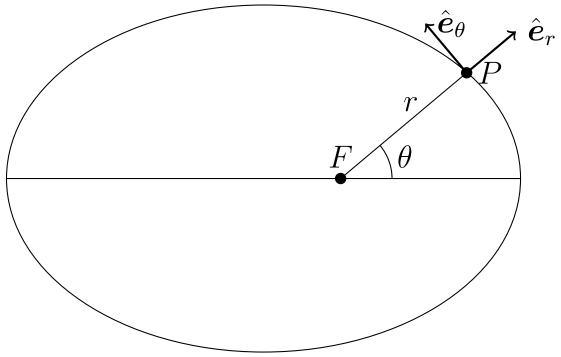
$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$$

en zijn versnelling is

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{\boldsymbol{r}}.$$

Opg. 10. Ga na dat uit Newtons gravitatiewet volgt dat $\boldsymbol{a}$ evenwijdig is aan $\boldsymbol{r}$. Gebruik dit om uit te leggen dat P in een onveranderlijk vlak, het *baanvlak*, beweegt. Betrek hierbij ook de snelheidsvector.

Aanvankelijk leek het probleem van de planeetbeweging misschien wel driedimensionaal, maar we hebben het probleem dus zojuist gereduceerd tot twee dimensies. We hoeven alleen maar te kijken hoe de beweging in het baanvlak eruit ziet.



Figuur 6: meebewegende basis

6 Meebewegende basis

In het baanvlak kunnen we de positie van P t.o.v. F aangeven met de vector $\boldsymbol{r}$. In poolcoördinaten kunnen we deze uitdrukken als $\boldsymbol{r} = (r, \theta)$, waarin $r = FP$ de afstand tussen F en P en θ de hoek met een of andere vast gekozen x-as (het maakt niet uit welke).

We definiëren nu twee onderling loodrechte eenheidsvectoren:

$\hat{\boldsymbol{e}}_r$, met dezelfde richting als $\boldsymbol{r}$, en

$\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$, loodrecht op $\hat{\boldsymbol{e}}_r$ in de richting waarin de planeet rondloopt.

NB: P is een bewegend punt, en de vectoren $\hat{\boldsymbol{e}}_r$ en $\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$ zijn dus zelf ook tijdafhankelijk: ze "reizen mee" met de planeet P. We gaan nu in een aantal stappen de snelheid $\boldsymbol{v}$ en versnelling $\boldsymbol{a}$ van P in deze meebewegende vectoren uitdrukken.

Opg. 11. Laat zien dat $\hat{\boldsymbol{e}}_r = \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ en $\hat{\boldsymbol{e}}_\theta = -\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$. Ga ook na dat $\boldsymbol{r} = r\hat{\boldsymbol{e}}_r$.

Opg. 12. Laat zien: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_r = \hat{\boldsymbol{e}}_\theta$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_\theta = -\hat{\boldsymbol{e}}_r$.

Opg. 13. Vervolgens: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{e}}_r = \dot{\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$ en $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{e}}_\theta = -\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_r$.

Opg. 14. Ten slotte: $\boldsymbol{v} = \dot{r}\hat{\boldsymbol{e}}_r + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$ en $\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\boldsymbol{e}}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$.

7 K2: de perkenwet

Het mooie van de meebewegende basisvectoren $\hat{\boldsymbol{e}}_r$ en $\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$ is dat ze vectoren ontbinden in een *radiaal* deel evenwijdig aan $\hat{\boldsymbol{e}}_r$ en een *tangentiaal* deel dat daar loodrecht op staat. Dat is bijzonder nuttig omdat Newtons wet dicteert dat de versnelling radiaal gericht is.

De ontbinding van $\boldsymbol{a}$ in opg. 14 geeft ons dus twee d.v.'s:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{r^2}, \tag{5}$$

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0. \tag{6}$$

Opg. 15. Leg dat uit.

Opg. 16. Vermenigvuldig vergelijking (6) met de integrerende factor r en integreer eenmaal; laat zien dat je krijgt

$$r^2\dot{\theta} = \frac{L}{m}, \tag{7}$$

waarin L/m een integratieconstante is; of beter gezegd: L is een integratieconstante waar we de planeetmassa m uit weggedeeld hebben. Waar denk je dat L van afhankelijk is?

Opg. 17. Leg uit dat hiermee K2 bewezen is. Leg zo zorgvuldig mogelijk uit welke ene eigenschap van Newtons gravitatiewet precies verantwoordelijk is voor Keplers perkenwet, en welke eigenschap(pen) (dus) niet!

8 K1: de ellipsbaan

We gaan nu ook vergelijking (5) aanpakken, maar daar gaan we eerst wat voorwerk voor doen.

Opg. 18. Substitueer eerst $r = 1/u$ in vgl. (7). Gebruik vervolgens de kettingregel om $\dot{r}$ en $\ddot{r}$ uit te drukken in u en zijn afgeleiden *naar* θ (!!).

Opg. 19. Herschrijf met het resultaat van de vorige opgave de vgl. (5) tot

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = \frac{GMm^2}{L^2}. \tag{8}$$

Opg. 20. Wat voor type d.v. heb je in de vorige opgave gevonden? Controleer dat deze d.v. een homogene oplossing $u_H = u_0\cos(\theta - \theta_0)$ en een particuliere oplossing $u_P = \frac{GMm^2}{L^2}$ heeft. Wat zijn de integratieconstanten, en kun je ze fysisch interpreteren?

Opg. 21. Doe r terugsubstitueren in de algemene oplossing $u_H + u_P$. Laat zien dat

$$r = \frac{L^2}{GMm^2(1 + \varepsilon\cos(\theta - \theta_0))}, \tag{9}$$

voor een of andere ε. Druk ε uit in reeds eerder gebruikte constanten.

Opg. 22. Laat (r_0, θ_0) de begincoördinaten van P op tijdstip $t = 0$ zijn. Vind een uitdrukking voor r_0 en laat zien dat de beweging van P wordt beschreven door

$$r = \frac{r_0(1 + \varepsilon)}{1 + \varepsilon\cos(\theta - \theta_0)}. \tag{10}$$

Verklaar dat er *dus*, althans voor bepaalde waarden van ε, sprake is van een ellipsbaan. Druk de lengte van de halve lange as van de ellips uit in de gebruikte (fysische) constanten.

9 K3: de baanperiode

In de derde wet van Kepler komt de omlooptijd voor: dit is de tijd T die nodig is voor de voerstraal om de hele oppervlakte van de ellips te beschrijven.

Opg. 23. Gebruik dat, en enkele resultaten uit de vorige paragrafen om te laten zien dat

$$\pi a^2\sqrt{1 - \varepsilon^2} = \int_0^T \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}\, \mathrm{d}t = \frac{LT}{2m}. \tag{11}$$

Opg. 24. Kwadrateer, gebruik $a(1 - \varepsilon^2) = r_0(1 + \varepsilon)$, en laat zien dat je hiermee uitkomt op ${}^{a^3}\!/_{T^2} = \text{const}$. Bepaal de constante, en laat zien dat deze *alleen* afhangt van constanten die niets met de specifieke planeet P te maken hebben. Trek je conclusie.

10 Reflectie

Opg. 25. Maak een schematisch overzicht van maximaal één A4-tje waarin je de samenhang van de verschillende delen van deze workshop zichtbaar maakt.