Tentamen WISN101 Wiskundige Technieken

Ma 3 nov 2014 17:00 – 20:00

Aanwijzingen

- Motiveer alle antwoorden.
- Werk rustig, netjes en duidelijk.
- De volgorde waarin je de opgaven maakt is vrij.
- Zorg dat je uitwerking maar één interpretatie toelaat.
- Alle informatie op dit opgavenblad mag bij alle (deel)opgaven gebruikt worden.
- Gebruik van electronica of naslagwerken is niet toegestaan.
- Notatie: met **log** wordt hier steeds de **natuurlijke logaritme** bedoeld.
- **Let op je tijd!** Totaal 58 punten.

1. (4pt)
   Gegeven zijn de vectoren $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ en $\mathbf{v} = 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Bereken de hoek tussen $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$.

2. (4pt, 4pt)
   In deze opgave definiëren we cosinus en sinus als

   $$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} \quad \text{en} \quad \sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}.$$

   (a) Laat zien dat deze definities overeenkomen met de gebruikelijke definitie van $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$.

   (b) Neem $x = 2a$ en leid uit bovenstaande definities de verdubbelingsformule van de sinus af.

3. (4pt)
   Bepaal het vierde orde Taylorpolynoom van $\sin^2(x)$ met steunpunt 0 en geef hiermee een rationale benadering (d.w.z. als breuk) van $\sin^2(1)$.

4. (4pt)
   Bereken indien mogelijk $\lim_{x\to 1} \frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1}$, of leg uit waarom de limiet niet bestaat.

Z.O.Z.

5. (4pt)
   Bepaal de oppervlakte tussen de grafieken van $y = \cos^2 x$ en $y = \sin^2 x$, tussen twee opeenvolgende snijpunten.

6. (4pt, 4pt)
   Bereken de volgende integralen:

   (a) $\displaystyle\int \cos^7 x \,\mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int x \arcsin \frac{x}{2} \,\mathrm{d}x$

7. (2pt, 4pt)

   (a) Laat door differentiëren zien dat $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| = \frac{1}{\cos x}$.

   (b) Bereken $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} \,\mathrm{d}x$.

8. (4pt, 4pt, 4pt)
   We bekijken de d.v. van Bernoulli $y' + ty + \mathrm{e}^{t^2} y^3 = 0$.

   (a) Met de substitutie $u = 1/y^2$ gaat de Bernoullivergelijking over in de 1^{e} orde lineaire d.v. $u' - 2tu = 2\mathrm{e}^{t^2}$. Laat dit zien.

   (b) Los de homogene lineaire vergelijking $u' - 2tu = 0$ op.

   (c) Gegeven: $u = (2t + k)\mathrm{e}^{t^2}$ met k een constante is de algemene oplossing van de inhomogene lineaire vergelijking. Bepaal hiermee de algemene oplossing van de Bernoullivergelijking, en controleer of die voldoet.

9. (8pt)
   Onderzoek de functie $f(x) = (\frac{1}{4} - \frac{3}{4}x)\mathrm{e}^{-2x}$ en schets de grafiek.