Wiskundige Technieken 2
Uitwerkingen Tentamen 26 januari 2015

Normering voor 4 pt vragen (andere vragen naar rato):

4pt	goed begrepen én goed uitgevoerd, eventueel met enkele onbelangrijke rekenfoutjes
3pt	grote lijn begrepen, maar technische vaardigheid schiet tekort; signaleert ”onmogelijke” tussenresultaten maar is niet in staat deze weg te werken; maakt meerdere fouten (al dan niet door slordigheid); gebruikt verwerpelijke notaties
2pt	weet ongeveer wat te doen maar lijdt aan gebrek aan vaardigheid en/of inzicht; mist belangrijke gevalsonderscheidingen of uitzonderingen etc.; herkent evident foute tussenresultaten niet; toont onvoldoende vaardigheid/controle/zelfreflectie
1pt	aardig beginnetje, maar het levert niet echt wat op
0pt	geen idee wat te doen, dit wordt niks

1. a. We kijken eerst op meetkundige wijze naar wat de transformatie met de vectoren doet. Omdat zowel roteren als spiegelen geen invloed heeft op de grootte van de vector, maar wel op de hoek die de vector maakt met de positieve x-as, is het nuttig om de vectoren weer te geven in termen van poolcoördinaten; alleen de hoek θ verandert door de transformatie. Als $\mathbf{p}$ hoek θ heeft, dan wordt deze hoek $\theta + \frac{\pi}{4}$ na het roteren en vervolgens $-\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ na het spiegelen in de x-as. Hiermee kunnen we direct nagaan wat de transformatie met de basisvectoren doet. Voor de eerste basisvector geldt $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} \cos(0) \\ \sin(0) \end{pmatrix}$, welke door de transformatie wordt afgebeeld op:

$$\begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Dit komt overeen met de matrix A, omdat:

$$A\mathbf{i} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Voor de tweede basisvector geldt $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}$, welke wordt afgebeeld op:

$$\begin{pmatrix} \cos\left(-\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) \\ \sin\left(-\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) \\ \sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

wat ook weer overeenkomt met de matrix A:

$$A\mathbf{j} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

We concluderen dat A de transformatie goed weergeeft.

b. Uit de opgave maken we op dat $A = S_x R_{\pi/4}$, waarbij $R_{\pi/4}$ de rotatie over een hoek $\frac{\pi}{4}$ tegen de klok in en S_x de spiegeling in de x-as is. De inverse van $R_{\pi/4}$ is $R_{-\pi/4}$ (een rotatie over een hoek van $\frac{\pi}{4}$ met de klok mee) en de inverse van S_x is opnieuw S_x. Voor de inverse van A volgt dan:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \left(S_x R_{\pi/4}\right)^{-1} \\ &= R_{\pi/4}^{-1} S_x^{-1} \\ &= R_{-\pi/4} S_x \\ &= \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

We concluderen dat $A^{-1} = A$, ofwel A is zelf-invers.

Alternatieve oplossing:
De inverse van A is ook te vinden door te vegen. We beginnen met de volgende matrix:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right).$$

Vervolgens voeren we eerst de stap $R_1^* = R_1$, $R_2^* = R_1 + R_2$ uit:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 & -\sqrt{2} \end{array}\right).$$

De volgende stap is $R_1^{**} = R_1^* - \frac{1}{2}R_2^*$, $R_2^{**} = R_2^*$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -\sqrt{2} \end{array}\right).$$

De laatste stap is $R_1^{***} = \sqrt{2}R_1^{**}$, $R_2^{***} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}R_2^{**}$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & 1 \end{array}\right),$$

waaruit we concluderen dat $A^{-1} = A$, zoals we al gezien hadden.

2. a. Allereerst merken we op dat het domein van $f(x, y)$ precies $\mathbb{R}^2$ is (de functie is overal gedefinieerd). Omdat $f(x, y)$ niet constant is, kan $f(x, y)$ absolute extremen hebben. Extremen kunnen worden aangenomen in kritieke punten, singuliere punten of op de rand. We laten zien dat de laatste twee mogelijkheden geen opties zijn. De functie heeft geen singuliere punten, omdat de gradiënt

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{1 - x^2 + y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}, \frac{-2xy}{(1 + x^2 + y^2)^2}\right)$$

overal bestaat. De rand is eveneens geen optie, omdat het domein geen rand heeft ($\mathbb{R}^2$ is onbegrensd). Eventuele absolute extremen moeten dus in kritieke punten worden aangenomen.

b. Allereerst bepalen we de kritieke punten. De gradiënt van f is:

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{1 - x^2 + y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}, \frac{-2xy}{(1 + x^2 + y^2)^2}\right).$$

We moeten $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$ oplossen. Uit $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ volgt $x = 0$ of $y = 0$. Substitueren we $x = 0$ in $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, dan volgt dat $1 + y^2 = 0$, wat geen oplossingen heeft. Substitueren we $y = 0$ in $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, dan volgt $1 - x^2 = 0$, wat $x = \pm 1$ als oplossingen heeft. We zien dat $f(x, y)$ dus precies twee kritieke punten heeft: $(-1, 0)$ en $(1, 0)$. De functiewaarden in deze punten zijn $f(-1, 0) = -\frac{1}{2}$ en $f(1, 0) = \frac{1}{2}$, wat in ieder geval lokale extremen van $f(x, y)$ zijn.
Om te laten zien dat dit ook absolute extremen zijn, moeten we laten zien dat $f(x, y)$ nooit groter dan $\frac{1}{2}$ kan worden (en ook nooit kleiner dan $-\frac{1}{2}$). De enige manier waarop dit zou kunnen is in de limiet waarbij x en/of y naar $\pm\infty$ gaan (omdat $f(x, y)$ een continue functie is en $f(x, y)$ geen andere kritieke punten en singuliere punten heeft). In het geval dat x en/of y naar $\pm\infty$ gaan, volgt dat $x^2 + y^2 \to \infty$ en dus dat de noemer van $f(x, y)$ oneindig groot wordt. We kunnen nu twee gevallen onderscheiden:

- Stel dat x zelf niet naar $\pm\infty$ gaat. Dan wordt de teller van $f(x, y)$ niet oneindig groot, maar de noemer wel. Dus betekent dit dat, in dit geval, $f(x, y) \to 0$ geldt.
- Stel dat x naar $\pm\infty$ gaat. We gebruiken de insluitstelling en het feit dat voor alle punten (x, y) geldt dat $1 + x^2 + y^2 \geq x^2$. Als $x \to \pm\infty$, dan geldt:

$$0 \leq \left|\frac{x}{1 + x^2 + y^2}\right| \leq \left|\frac{x}{x^2}\right| = \frac{1}{|x|}.$$

Omdat $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{|x|} = 0$, volgt nu met de insluitstelling dat in dit geval $f(x, y) \to 0$ geldt.

We zien dat $f(x,y) \to 0$ als x en/of y naar $\pm\infty$ gaat, ongeacht de manier waarop dit gebeurt. Omdat 0 niet groter dan $\frac{1}{2}$ is, is $\frac{1}{2}$ het absoluut maximum van $f(x,y)$. Op dezelfde manier geldt dat, omdat 0 niet kleiner dan $-\frac{1}{2}$ is, dat $-\frac{1}{2}$ het absoluut minimum van $f(x,y)$ is. We concluderen dat $f(x,y)$ inderdaad absolute extremen heeft, namelijk $-\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{2}$.

3. a. We bepalen de partiële afgeleiden met behulp van impliciet differentiëren. De partiële afgeleiden $\frac{\partial r}{\partial x}$ en $\frac{\partial r}{\partial y}$ berekenen we door in de gelijkheid $r^2 = x^2 + y^2$ te differentiëren naar x en y:

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 \\ 2r\frac{\partial r}{\partial x} &= 2x \\ \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{2x}{2r} = \frac{x}{r} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 \\ 2r\frac{\partial r}{\partial y} &= 2y \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{2y}{2r} = \frac{y}{r}. \end{aligned}$$

De partiële afgeleide $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ vinden we door beide leden van de gelijkheid $x = r\cos\theta$ naar x te differentiëren en de partiële afgeleide $\frac{\partial \theta}{\partial y}$ vinden we door beide leden van de gelijkheid $y = r\sin\theta$ naar y te differentiëren:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} &= \frac{\partial r}{\partial x}\cdot\cos\theta + r\cdot -\sin\theta\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x} \\ 1 &= \frac{x}{r}\cdot\frac{x}{r} - r\sin\theta\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y &= r\sin\theta \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y} &= \frac{\partial r}{\partial y}\cdot\sin\theta + r\cdot\cos\theta\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y} \\ 1 &= \frac{y}{r}\cdot\frac{y}{r} + r\cos\theta\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y}. \end{aligned}$$

Deze vergelijkingen lossen we op voor $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ en $\frac{\partial \theta}{\partial y}$:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{x}{r}\cdot\frac{x}{r} - r\sin\theta\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x} \\ r\sin\theta\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{x^2}{r^2} - 1 \\ y\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{x^2 - r^2}{r^2} \\ y\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{y^2}{r^2} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{y}{r^2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 1 &= \frac{y}{r}\cdot\frac{y}{r} + r\cos\theta\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y} \\ r\cos\theta\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y} &= 1 - \frac{y^2}{r^2} \\ x\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{r^2 - y^2}{r^2} \\ x\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{x^2}{r^2} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{x}{r^2}. \end{aligned}$$

Opmerking:
Wie niet van impliciet differentiëren houdt, kan ook gebruik maken van de identiteiten $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ en $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$. De partiële afgeleiden volgen dan met behulp van de kettingregel.

b. Eerst drukken we de partiële afgeleiden $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ uit in termen van r, θ, $\frac{\partial f}{\partial r}$ en $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ met behulp van de kettingregel:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{x}{r}\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{y}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{y}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{x}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

De gradiënt is dus:

$$\begin{aligned} \nabla f &= \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} \\ &= \left(\frac{x}{r}\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{y}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{y}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{x}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\mathbf{j} \\ &= \frac{\partial f}{\partial r}\left(\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\left(\frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{r}\right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}. \end{aligned}$$

4. We noemen voor het gemak het gebied waarvan het volume moeten berekenen D. Het gebied D laat zich het makkelijkst beschrijven in termen van cilindercoördinaten. In dat geval geldt $0 \leq z \leq 1-r$ (gegeven) en $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (omdat we ons alleen beperken tot het eerste kwadrant). Grenzen voor r vinden we door de vergelijking van de cilinderwand in cilindercoördinaten uit te drukken:

$$\begin{aligned}
\left(x^2+y^2\right)^3 &= (2xy)^2 \\
\left(r^2\right)^3 &= \left(2r^2 \sin\theta\cos\theta\right)^2 \\
r^6 &= r^4 \sin^2 2\theta \\
r^4 = 0 \quad \text{of} \quad r^2 &= \sin^2 2\theta \\
r = 0 \quad \text{of} \quad r &= \sin 2\theta,
\end{aligned}$$

wat betekent dat $0 \leq r \leq \sin 2\theta$ geldt. Het volume is dus:

$$\begin{aligned}
\iiint_D \mathrm{d}V &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\sin 2\theta}\int_0^{1-r} r\,\mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\sin 2\theta} r - r^2\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\sin^2 2\theta - \frac{1}{3}\sin^3 2\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta - \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\sin^3 2\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 4\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta - \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\sin 2\theta\left(1-\cos^2 2\theta\right)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta + \frac{1}{6}\left[\cos 2\theta - \frac{1}{3}\cos^3 2\theta\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{6}\left(-1+\frac{1}{3}-1+\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{8}-\frac{2}{9}.
\end{aligned}$$

5. We gebruiken de stelling van Stokes. De rand $\partial\mathcal{S}$ is de cirkel $x^2+y^2=9$, $z=0$. Deze parametriseren we als $\mathbf{r}(t) = (3\cos t, 3\sin t, 0)$ met $0 \leq t \leq 2\pi$. De gevraagde integraal is dus:

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl}\mathbf{F}\bullet\mathrm{d}\mathbf{S} &= \int_0^{2\pi}\left(0, 27\cos^3 t + 3\sin t, -9\cos t\sin t\right)\bullet(-3\sin t, 3\cos t, 0)\,\mathrm{d}t \\
&= 9\int_0^{2\pi} 9\cos^4 t + \sin t\cos t\,\mathrm{d}t \\
&= 81\int_0^{2\pi}\cos^4 t\,\mathrm{d}t = 81\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2\mathrm{d}t \\
&= \frac{81}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2 2t + 2\cos 2t + 1\,\mathrm{d}t = \frac{81}{4}\int_0^{2\pi} 1+\cos^2 2t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{81}{4}\int_0^{2\pi}\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 4t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{243}{8}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t = \frac{243}{4}\pi.
\end{aligned}$$

Opmerking:
Omdat er geen richting is meegegeven in de opgave, mag ook de flux in de tegengestelde richting berekend worden. In dat geval is het antwoord $-\frac{243}{4}\pi$.

Alternatieve oplossing:
We gebruiken tweemaal de stelling van Stokes. Noem D het gebied $x^2+y^2 < 9$, $z=0$, dan heeft D ook $\partial\mathcal{S}$ als rand en dus volgt:

$$\iint_{\mathcal{S}}\operatorname{curl}\mathbf{F}\bullet\mathrm{d}\mathbf{S} = \oint_{\partial\mathcal{S}}\mathbf{F}\bullet\mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_D \operatorname{curl}\mathbf{F}\bullet\mathrm{d}\mathbf{S}.$$

De curl van $\mathbf{F}$ is:

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = \left(-x-0, x^2y-(-y), 3x^2-x^2z\right) = \left(-x, x^2y+y, 3x^2-x^2z\right).$$

Een eenheidsnormaal op D is gemakkelijk te vinden, namelijk $(0,0,1)$. Het gebied D laat zich gemakkelijk beschrijven met poolcoördinaten ($0 \leq r \leq 3$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$), dus volgt voor de gevraagde integraal:

$$\begin{aligned}
\iint_D \operatorname{curl} \mathbf{F} \bullet \mathrm{d}\mathbf{S} &= \iint_D \left(-x, x^2y + y, 3x^2 - x^2z\right) \bullet (0,0,1)\,\mathrm{d}A \\
&= \iint_D 3x^2 - x^2z\,\mathrm{d}A \;=\; \iint_D 3x^2\,\mathrm{d}A \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^3 3r^3\cos^2\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^3 3r^3\,\mathrm{d}r \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{243}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{243}{4}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta \;=\; \frac{243}{4}\pi.
\end{aligned}$$

6. a. Dit volgt met behulp van de productregel:

$$\begin{aligned}
\nabla \bullet (\varphi\mathbf{F}) &= \frac{\partial(\varphi\mathbf{F}_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\varphi\mathbf{F}_2)}{\partial y} + \frac{\partial(\varphi\mathbf{F}_3)}{\partial z} \\
&= \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{F}_1 + \varphi\frac{\partial\mathbf{F}_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{F}_2 + \varphi\frac{\partial\mathbf{F}_2}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{F}_3 + \varphi\frac{\partial\mathbf{F}_3}{\partial z} \\
&= \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{F}_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{F}_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{F}_3 + \varphi\left(\frac{\partial\mathbf{F}_1}{\partial x} + \frac{\partial\mathbf{F}_2}{\partial y} + \frac{\partial\mathbf{F}_3}{\partial z}\right) \\
&= \nabla\varphi \bullet \mathbf{F} + \varphi\,(\nabla \bullet \mathbf{F}).
\end{aligned}$$

b. We gebruiken de divergentiestelling en de gelijkheid van onderdeel a:

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial D} \varphi\mathbf{F} \bullet \mathrm{d}\mathbf{S} &= \iiint_D \nabla \bullet (\varphi\mathbf{F})\,\mathrm{d}V \\
&= \iiint_D (\nabla\varphi) \bullet \mathbf{F} + \varphi(\nabla \bullet \mathbf{F})\,\mathrm{d}V \\
&= \iiint_D (\nabla\varphi) \bullet \mathbf{F}\,\mathrm{d}V + \iiint_D \varphi(\nabla \bullet \mathbf{F})\,\mathrm{d}V \\
&= \iiint_D \operatorname{grad}\varphi \bullet \mathbf{F}\,\mathrm{d}V + \iiint_D \varphi \operatorname{div}\mathbf{F}\,\mathrm{d}V.
\end{aligned}$$

c. We gebruiken onderdeel b en vullen $\mathbf{F} = \nabla\varphi$ in. Dan krijgen we:

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial D} \varphi\nabla\varphi \bullet \mathrm{d}\mathbf{S} &= \iiint_D \operatorname{grad}\varphi \bullet \nabla\varphi\,\mathrm{d}V + \iiint_D \varphi \operatorname{div}\nabla\varphi\,\mathrm{d}V \\
&= \iiint_D |\nabla\varphi|^2\,\mathrm{d}V + \iiint_D \varphi\,\Delta\varphi\,\mathrm{d}V.
\end{aligned}$$

Omdat gegeven is dat $\varphi = 0$ op ∂D, geldt ook dat $\varphi\nabla\varphi = \mathbf{0}$ op ∂D en dus is de integraal in het linkerlid nul. Daarnaast is gegeven dat φ harmonisch is op D, wat betekent dat $\varphi\Delta\varphi = 0$ op D geldt en dus is de tweede integraal in het rechterlid ook nul. We houden nu over:

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial D} \varphi\nabla\varphi \bullet \mathrm{d}\mathbf{S} &= \iiint_D |\nabla\varphi|^2\,\mathrm{d}V + \iiint_D \varphi\,\Delta\varphi\,\mathrm{d}V, \\
0 &= \iiint_D |\nabla\varphi|^2\,\mathrm{d}V + 0,
\end{aligned}$$

dus:

$$\iiint_D |\nabla\varphi|^2\,\mathrm{d}V = 0.$$

Omdat de integrand $|\nabla\varphi|^2$ nooit negatief kan zijn, kan de laatste gelijkheid alleen maar gelden als $|\nabla\varphi|^2 = 0$ geldt op D. Dit betekent dat $\nabla\varphi = \mathbf{0}$ op D moet gelden, wat betekent dat φ constant is op D. Omdat de waarde van φ al gegeven is op een deel van D (namelijk op de rand, daar geldt $\varphi(x,y,z) = 0$), geldt deze waarde op heel D, dat wil zeggen, $\varphi(x,y,z) = 0$ op heel D.