Tentamen WISN102 Wiskundige Technieken 2

Ma 26 jan 2014 13:30–16:30

Aanwijzingen

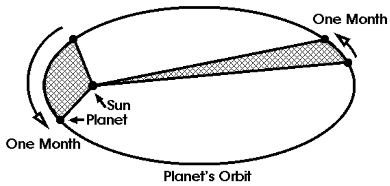
- Werk rustig, netjes en duidelijk.
- Zorg voor voldoende **tekst en uitleg** bij je uitwerkingen.
- Zorg dat je uitwerking maar één interpretatie toelaat.
- Alle informatie op dit opgavenblad mag bij alle (deel)opgaven gebruikt worden.
- Gebruik van elektronica of naslagwerken is niet toegestaan.
- Totaal 46 punten.

1. Beschouw in $\mathbb{R}^3$ de lijn $\mathcal{L}$ gegeven door $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{b}$, en het vlak $\mathcal{V}$ gegeven door $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = c$, met constante $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$ en c.

   a. Veronderstel dat $\mathcal{L}$ en $\mathcal{V}$ precies één snijpunt hebben. Druk het snijpunt uit in $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ en/of c. 4 pt.

   b. Geef precieze voorwaarden voor $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ en/of c opdat lijn en vlak *geen* gemeenschappelijke punten hebben. 4 pt.

2. *Deze opgave staat helemaal los van de boekparagraaf over Kepler.*
   Volgens Keplers tweede wet (perkenwet) beweegt een planeet P in haar baan om de zon F zodanig dat de voerstraal FP in gelijke tijdsintervallen gelijke oppervlakten bestrijkt.



   a. Laat zien dat het ellipsdeel $\mathrm{d}A$ dat de voerstraal $FP = \boldsymbol{r}$ in infinitesimaal tijdsinterval $\mathrm{d}t$ bestrijkt gelijk is aan $\mathrm{d}A = \frac{1}{2}|\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}|\mathrm{d}t$. 4 pt.
   Hint: gebruik meetkunde.

   b. Bewijs hiermee Keplers tweede wet. 4 pt.
   Hint: Keplers wet beweert iets over $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$, *en* $\ddot{\boldsymbol{r}}$ *is centraal gericht.*

3. Van alle rechthoekige dozen met hetzelfde volume heeft de kubusvormige doos het kleinste oppervlak. Toon dit aan. 6 pt.

4. De kegel $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ doorsnijdt de sfeer met straal 1. Bereken het oppervlak van de sfeer binnen de kegel. 6 pt.

5. Integreer $\dfrac{y^3}{x^2+y^2}$ over de driehoek met hoekpunten $(0,0)$, $(0,1)$ en $(1,1)$ in $\mathbb{R}^2$. *Hint: integratievolgorde.* 4 pt.

6. Beschouw een (begrensde) vlakke figuur $\mathcal{A}$ in het vlak $z = c$ voor een of andere $c > 0$. Verbind alle punten van $\mathcal{A}$ met de oorsprong O zodat je een kegelachtig lichaam $\mathcal{V}$ krijgt. Voor het volume V van $\mathcal{V}$ geldt $V = \frac{1}{3}cA$, waarin A het oppervlak van $\mathcal{A}$. Toon dit aan met het vectorveld $\boldsymbol{F} = (x, y, z)$ en een integraalstelling. 4 pt.

7. *NB: resultaten van deze opgave kunnen evt. in strijd lijken met de bestudeerde theorie, maar zijn dat niet.*

   We beschouwen het vectorveld $\boldsymbol{F}(x,y) = \dfrac{-y\hat{\mathbf{\imath}} + x\hat{\mathbf{\jmath}}}{x^2+y^2}$ in $\mathbb{R}^2$ en de cirkel $\mathcal{C}$ met middelpunt $(0,0)$ en straal R.

   a. Bereken rechtstreeks $\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ waarbij $\mathcal{C}$ tegen klok wordt doorlopen. *LET OP: er komt geen nul uit.* 4 pt.

   b. Laat zien dat $\operatorname{grad} \arctan \dfrac{y}{x} = \boldsymbol{F}(x,y)$. 4 pt.

   c. Benoem (1 zin) en verklaar (max 2 zinnen) de paradox in deze opgave. 2 pt.