Tentamen Wiskundige Technieken 1
Ma 6 nov 2017 Uitwerkingen

Normering voor 4 pt vragen (andere vragen naar rato):

4pt Goed begrepen en goed uitgevoerd met voldoende toelichting, eventueel enkele onbelangrijke rekenfoutjes.

3pt Grote lijn begrepen, maar technische vaardigheid schiet tekort;
signaleert "onmogelijke" tussenresultaten maar is niet in staat deze weg te werken;
maakt meerdere fouten (al dan niet door slordigheid);
geeft wel enige tekstuitleg maar zeker niet voldoende;
gebruikt verwerpelijke notaties.

2pt Weet ongeveer wat te doen maar lijdt aan gebrek aan vaardigheid en/of inzicht;
mist belangrijke gevalsonderscheidingen of uitzonderingen etc.;
herkent evident foute tussenresultaten niet;
toont onvoldoende vaardigheid/controle/zelfreflectie.
Een combinatie van meerdere bij 3pt genoemde tekortkomingen kan ook leiden tot deze normering.

1pt Aardig beginnetje, maar het levert niet echt wat op.

0pt Geen idee wat te doen, dit wordt niks; of: toelichting bij formules ontbreekt volledig (en de opgave vereiste meer dan alleen simpel rekenwerk).

NB: indien *ernstige* fouten gemaakt worden op het gebied van vwo-voorkennis (kettingregel vergeten, slechte beheersing gonio, ...) kan de normering een punt lager uitvallen dan anders het geval zou zijn geweest.

1. We nemen de vectoren $\boldsymbol{p} = -2\hat{\mathbf{\imath}} + a\hat{\mathbf{\jmath}} + 5\hat{\mathbf{k}}$ en $\boldsymbol{q} = \hat{\mathbf{\imath}} + -3\hat{\mathbf{\jmath}} + 4\hat{\mathbf{k}}$

   a. Voor welke a zijn de vectoren $\boldsymbol{p}$ en $\boldsymbol{q}$ orthogonaal? 3 pt.

   Oplossing: Orthogonaal indien $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q} = 0$, d.w.z. $-2 \cdot 1 - 3 \cdot a + 5 \cdot 4 = 0$ dus $a = \frac{2-20}{-3} = 6$.

   b. Neem nu $a = 0$ en ga na of de vector $2\hat{\mathbf{\imath}} + 6\hat{\mathbf{\jmath}} + 2\hat{\mathbf{k}}$ in het opspansel van $\boldsymbol{p}$ en $\boldsymbol{q}$ ligt. 3 pt.

   Oplossing: $a = 0$ dus $\boldsymbol{p} = -2\hat{\mathbf{\imath}} + 5\hat{\mathbf{k}}$. We zoeken λ en μ zo dat $\lambda\boldsymbol{p} + \mu\boldsymbol{q} = 2\hat{\mathbf{\imath}} + 6\hat{\mathbf{\jmath}} + 2\hat{\mathbf{k}}$. Dit geeft drie vergelijkingen:

$$\begin{aligned} -2\lambda + \mu &= 2, \\ -3\mu &= 6, \\ 5\lambda + 4\mu &= 2. \end{aligned}$$

De middelste vgl vereist $\mu = -2$, daarna geeft de bovenste vgl $\lambda = -2$, maar vervolgens is de derde vgl strijdig, dus λ en μ bestaan niet, dus de genoemde vector ligt niet in het opspansel.

Sommigen hadden de betekenis van "opspansel" niet paraat en raakten daardoor punten kwijt.

2. Geef de complex geconjugeerde van $\dfrac{1}{-2\mathrm{i}^{50} + \mathrm{i}^{11}}$ in de vorm $a + b\mathrm{i}$. 4 pt.

Oplossing: Merk op $\mathrm{i}^4 = 1$, daarom $-2\mathrm{i}^{50} + \mathrm{i}^{11} = -2\mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^3 = 2 - \mathrm{i}$. Dan is

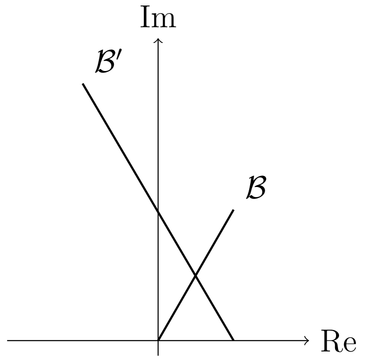
$$\frac{1}{-2\mathrm{i}^{50} + \mathrm{i}^{11}} = \frac{1}{2 - \mathrm{i}} = \frac{2 + \mathrm{i}}{5},$$

daarvan is de geconjugeerde $\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\mathrm{i}$.

Vaak gemaakte fout: de geconjugeerde van $\frac{1}{a+b\mathrm{i}}$ is weliswaar gelijk aan $\frac{1}{a-b\mathrm{i}}$, maar dat is helemaal niet vanzelfsprekend. Kijk uit voor dat soort valse vrienden!

3. In het complexe vlak noemen we $\mathcal{B}$ het lijnstuk dat wordt beschreven door de getallen $z = t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ met $0 \leq t \leq 2$. Bepaal het beeld van $\mathcal{B}$ onder de afbeelding (functie) $w = z^2 + 1$. Geef formule en ook een schets met zowel $\mathcal{B}$ als het beeld van $\mathcal{B}$. 4 pt.

Oplossing: De getallen $z = t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ met $0 \leq t \leq 2$ zijn de getallen met variabele modulus t en constant argument $\frac{1}{3}\pi$, die liggen dus op een rechte lijn; preciezer: het lijnstuk van 0 tot $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\mathrm{i}$. Het beeld van deze getallen is $w = t^2\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3} + 1$. De eerste term hierin, met de e-macht, stelt de getallen voor met modulus t^2 en argument $\frac{2}{3}\pi$, in rechthoekscoordinaten zijn dit de getallen op het lijnstuk tussen 0 en $-2 + 2\sqrt{3}\mathrm{i}$. Hier moet uiteindelijk nog 1 bij opgeteld worden. Je kunt dus het beeld $\mathcal{B}'$ van de verzameling $\mathcal{B}$ tekenen als het rechte lijnstuk tussen 1 en $-1 + 2\sqrt{3}\mathrm{i}$.



4. We herinneren aan de definities $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ en $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$. Bepaal twee verschillende uitdrukkingen voor $\tanh' x$; eentje met tanh als enige functie van x, en eentje met cosh als enige functie van x. 4 pt.

Oplossing: Invullen en differentiëren geeft

$$\begin{aligned}\tanh' x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\sinh x}{\cosh x} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ &= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2}\end{aligned}$$

Nu kun je op twee manieren vereenvoudigen: ofwel door splitsen in twee breuken, dan krijg je

$$1 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^2 = 1 - \tanh^2 x;$$

ofwel door de teller te herkennen als een bijzonder product $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$, dan krijg je

$$\frac{(2e^{-x})(2e^x)}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

We vinden dus $\tanh' x = 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$. Er bestaan ook andere goede manieren om hier op uit te komen.

Met de in de opgave gegeven informatie is dit heel goed te doen, je hebt hier geen uit het hoofd geleerde feitjes over hyperbolische functies voor nodig.

5. Toon aan of geef een tegenvoorbeeld: $u^3 - u + 1 > 0$ voor alle $u \geq 0$. 4 pt.

Oplossing: De functie $f(u) = u^3 - u + 1$ is continu en diffbaar op $[0, \infty)$ en heeft een horizontale raaklijn als $f'(u) = 3u^2 - 1 = 0$, d.w.z. uitsluitend als $u = \frac{1}{3}\sqrt{3}$. Aangezien $f'(u) < 0$ als $0 \leq u < \frac{1}{3}\sqrt{3}$ en $f'(u) > 0$ als $u > \frac{1}{3}\sqrt{3}$ heeft f bij $u = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ een minimum van $f(\frac{1}{3}\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}-3\sqrt{3}+9}{9} > 0$, dus de bewering is waar.

Dit is een veilige en bekende techniek. Eigen redeneringen kunnen ook wel eens goed zijn maar ontaarden helaas te vaak in vaagheid.

6. Voor $x \neq 0$ definiëren we $f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$. Ga na of, en zo ja hoe, $f(0)$ gedefinieerd kan worden opdat f continu is in 0. Gebruik in je argumentatie een Taylorveelterm van sin. 4 pt.

Oplossing: We moeten onderzoeken of $\lim_{x\to 0} f(x)$ bestaat; zo ja dan definiëren we $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$ om een continue functie te maken. Wel, $f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x}$. Als we bedenken dat $\sin x = x - \frac{1}{3}x^3 +$ hogere machten van x dan zien we dat

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 + \text{hogere machten}}{x^2 + \text{hogere machten}} = 0,$$

dus als we $f(0) = 0$ definiëren dan is f continu in 0.

Belangrijk bij deze opgave:

1. *associëer continuiteit met limiet;*
2. *verlos jezelf van het oncontroleerbare VERSCHIL van twee ontploffende breuken, door ze samen te voegen;*
3. *taylor de teller en de noemer zo ver als je nodig hebt.*

7. Evalueer de volgende integralen:

a. $\displaystyle\int \cos^4 x \, \mathrm{d}x$ 4 pt.

Oplossing: Er geldt

$$\cos^4 x = (1-\sin^2 x)^2 = (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cos 2x)^2 = \tfrac{1}{4}(1+2\cos 2x+\cos^2 2x),$$

en langs dezelfde route

$$\cos^2 2x = 1-\sin^2 2x = \tfrac{1}{2}(1+\cos 4x),$$

dus

$$\int \cos^4 x \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}\int \tfrac{3}{2}+2\cos 2x+\tfrac{1}{2}\cos 4x \,\mathrm{d}x = \tfrac{3}{8}x+\tfrac{1}{4}\sin 2x+\tfrac{1}{32}\sin 4x+c.$$

b. $\displaystyle\int_{-1}^{0} 2x \log\left(1+x^4\right) \mathrm{d}x$ 4 pt.

Oplossing: Laat de grenzen voorlopig weg, en subs $u = x^2$, $\mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned}\int 2x\log(1+x^4)\,\mathrm{d}x &= \int \log(1+u^2)\,\mathrm{d}u \\ &= u\log(1+u^2) - 2\int \frac{u^2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \quad \text{partiëel} \\ &= u\log(1+u^2) - 2u + 2\arctan u \quad \text{want } \tfrac{u^2}{1+u^2} = 1-\tfrac{1}{1+u^2} \\ &= x^2\log(1+x^4) + 2\arctan x^2 - 2x^2 \quad \text{na terugsubs.}\end{aligned}$$

Dus

$$\int_{-1}^{0} 2x\log(1+x^4)\,\mathrm{d}x = -(\log 2 + 2\arctan 1 - 2) = 2 - \log 2 - \tfrac{\pi}{2}.$$

In plaats van terugsubs kun je ook de integraal in u laten staan en integreren met de grenzen van $u = 1$ tot $u = 0$ (let op volgorde).

Quick sanity check: op het integratie-interval is je integrand negatief, dus je slaat groot alarm als je antwoord niet negatief is.

8. Los het volgende beginwaardeprobleem op: 4 pt.

$$\begin{aligned}\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= 3y^2 - 6y, \\ y(0) &= 1.\end{aligned}$$

Oplossing: Het rechterlid factoriseert als $3y(y-2)$ en na scheiden krijgen we dus

$$\frac{\mathrm{d}y}{y(y-2)} = 3\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Nu eerst breuksplitsen:

$$\frac{1}{y(y-2)} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y}\right),$$

dus

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y(y-2)} = \tfrac{1}{2}\left(\log(y-2) - \log y\right) = \tfrac{1}{2}\log\tfrac{y-2}{y} = \tfrac{1}{2}\log(1-\tfrac{2}{y});$$

aan de andere kant van (1) hebben we $\int 3\mathrm{d}t = 3t + C$. Beide kanten nu met 2 vermenigvuldigen en e-macht nemen levert op:

$$1 - \frac{2}{y} = C\mathrm{e}^{6t},$$

oftewel

$$y = \frac{2}{1 - C\mathrm{e}^{6t}}.$$

Hierin bepalen we C door invullen $t = 0$ en $y = 1$, dit geeft $\frac{2}{1-C} = 1$, dus $C = -1$. Conclusie: de oplossing van het beginwaardeprobleem is

$$y = \frac{2}{1 + \mathrm{e}^{6t}}.$$

Veel werk, maar het begint natuurlijk met het herkennen van het type d.v. en bijbehorende oplossingsstrategie. Als dat niet lukt dan ben je bij deze opgave kansloos.

9. Debye-functies komen voor in de thermodynamica en worden gedefinieerd als 4 pt.

$$y_n(x) = \frac{n}{x^n}\int_0^x \frac{t^n}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t,$$

waarin n een natuurlijk getal. Laat zien dat y_n voldoet aan de d.v.:

$$xy' + ny = \frac{nx}{\mathrm{e}^x - 1}.$$

Oplossing: Eenmaal differentiëren met de productregel en de hoofdstelling van de integraalrekening geeft

$$\begin{aligned} y_n'(x) &= -\frac{n^2}{x^{n+1}} \int_0^x \frac{t^n}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t + \frac{n}{x^n}\frac{x^n}{\mathrm{e}^x - 1} \\ &= -\frac{n}{x} y_n(x) + \frac{n}{\mathrm{e}^x - 1}. \end{aligned}$$

Na vermenigvuldigen met x volgt hieruit onmiddellijk het gestelde.

Als je kijkt naar de verhouding inspanning : punten dan is deze opgave veel aantrekkelijker dan 8. Toch is 9 vaak overgeslagen... In Johan Kruijff termen: je gaat het pas zien als je het door hebt.

10. Onderzoek de functie $f(x) = \dfrac{1 - \log x}{x}$ en maak een nette schets van de grafiek. 8 pt.

Oplossing:

1. Domein: $x > 0$ vanwege de logaritme, verder geen beperkingen; verder is f continu op dit domein.

2. Snijden met de y-as: nvt want $x = 0$ ligt niet in domein.
   Snijden met de x-as: $f(x) = 0$ als $\log x = 1$, dus $x = \mathrm{e}$.

3. Randen: $\lim_{x\to 0+} f(x) = [(1 - -\infty)/0+] = +\infty$ en $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(\frac{1}{x} - \frac{\log x}{x}) = 0 - 0 = 0$; aangezien $\frac{1}{x} < \frac{\log x}{x}$ nadert f tot 0 vanaf de negatieve kant.

4. Afgeleide: schrijf $f(x) = x^{-1}(1 - \log x)$, zodat $f'(x) = -x^{-2}(1 - \log x) - x^{-2} = \frac{\log(x) - 2}{x^2}$. Deze is continu op ons domein en heeft een nulpunt bij $x = \mathrm{e}^2$. Zie tekenschema voor stijgen en dalen.

5. Tweede afgeleide: schrijf $f'(x) = x^{-2}(\log x - 2)$, zodat $f''(x) = -2x^{-3}(\log x - 2) + x^{-3} = \frac{5 - 2\log x}{x^3}$, dus $f''(x) = 0$ als $x = \mathrm{e}^{5/2} \approx 10$ (dat is een hele grove schatting; je rekenmachine zegt

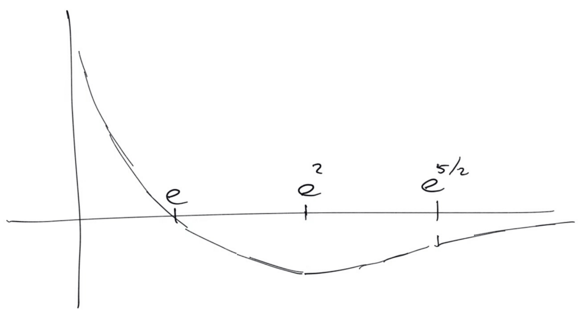
ongeveer 12, maar who cares, we letten niet zo op de schaal). Zie verder tekenschema.

6. Tekenschema:

x	0		e		e^2		$\mathrm{e}^{5/2}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-\mathrm{e}^{-2}$	$-$	$-$	$-$	$0-$
$f'(x)$	$-\infty$	$-$	-1	$-$	0	$+$	$+$	$0+$	
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	

Uit het tekenverloop blijkt: f heeft minimum $f(\mathrm{e}^2) = -\mathrm{e}^{-2}$ en buigpunt bij $x = \mathrm{e}^{5/2}$.

7. Grafiek:



Noot: de vertikale schaal van deze plot is zwaar overdreven; in werkelijkheid is de grafiek tussen 0 en e zo stijl en voorbij $x = \mathrm{e}$ zo plat dat de kenmerken (minimum, buigpunt) niet goed zichtbaar zijn.

Veel voorkomend fenomeen: extra nulpunten, maxima, buigpunten etc die uit de hemel neerdalen om verkeerd berekende limieten te "redden"; typisch voorbeeld van doorblunderen op z'n Buurman en Buurmans!