Tentamen WISN102 Wiskundige Technieken 2

Do 1 feb 2017 9:00 – 12:00

Aanwijzingen

- Werk rustig, netjes en duidelijk.
- Zorg voor voldoende **tekst en uitleg** bij je uitwerkingen.
- Zorg dat je uitwerking maar één interpretatie toelaat.
- Alle informatie op dit opgavenblad mag bij alle (deel)opgaven gebruikt worden.
- Gebruik van elektronica of naslagwerken is niet toegestaan.
- Totaal 39 punten.

1. Zij $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$

   a. Vind van A alle eigenwaarden en geef bij elke eigenwaarde minstens één eigenvector. 4 pt.

   b. Is A inverteerbaar? 2 pt.

2. Zij $f(x, y) = x^2 + y^2$. Aan de grafiek van f raken de vlakken $\mathcal{V}_1$ in het punt $(0, 1, 1)$ en $\mathcal{V}_2$ in het punt $(-1, 0, 1)$. 4 pt.

   Vind alle punten (x, y, z) die in zowel $\mathcal{V}_1$ als $\mathcal{V}_2$ liggen.

3. Vereenvoudig de uitdrukking 4 pt.

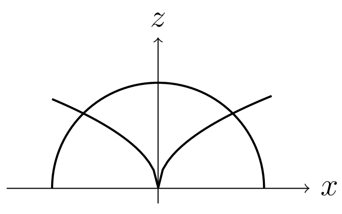
$$\nabla \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \nabla \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

   waarin f een gladde harmonische functie van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}$ is.

4. Stel φ is een gladde functie van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}$ en $\boldsymbol{F} = -\nabla\varphi$. Verder is $\boldsymbol{r}(t)$ een integraalkromme van $\boldsymbol{F}$, d.w.z. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))$ voor $t \geq 0$. 4 pt.

   Laat zien dat $\dfrac{\mathrm{d}\varphi(\boldsymbol{r}(t))}{\mathrm{d}t} < 0$.

5. Bereken het volume van dat deel van de bol $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$ dat boven het oppervlak $z = (x^2 + y^2)^{1/4}$ ligt. 4 pt.



6. Kortjakje moet door de regen naar huis lopen, en zij vraagt zich af of ze minder nat wordt als ze harder loopt.

   We beschouwen Kortjakje als een balk met afmetingen p, q en h in respectievelijk de x, y en z-richting. Kortjakje loopt in de positieve x-richting met constante snelheid $\boldsymbol{v} = v\hat{\mathbf{\imath}}$.

   De regen stellen we voor met het constante vectorveld $\boldsymbol{F} = -f\hat{\mathbf{k}}$. Let op: het vectorveld dat Kortjakje *ervaart* hangt natuurlijk nog af van haar snelheid!

   Kortjakjes afstand door de regen is L.

   a. Geef een korte verklaring waarom Kortjakje alleen nat regent op die oppervlakken waar het inproduct van het inkomende regenveld en de naar binnen gerichte normaal op Kortjakje positief is. Geen zwetsverhalen. 1 pt.

   b. Bereken met een fluxintegraal hoeveel regen per seconde op Kortjakjes oppervlak terecht komt. 4 pt.

   c. Kan Kortjakje beter sneller of langzamer lopen om zo droog mogelijk thuis te komen? 2 pt.

7. Zij $\mathcal{C}$ de rand van het oppervlak $\mathcal{S}$; $\boldsymbol{r}$ een parametrisering van $\mathcal{C}$, φ en ψ gladde scalarvelden op $\mathbb{R}^3$.

   We herinneren aan de volgende *vector identities* voor scalarvelden φ, ψ en een vectorveld $\boldsymbol{F}$:

$$\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi, \tag{1}$$

$$\nabla \times (\varphi\boldsymbol{F}) = (\nabla\varphi) \times \boldsymbol{F} + \varphi(\nabla \times \boldsymbol{F}). \tag{2}$$

   a. Laat zien dat vergelijking (1) geldt; schrijf alle stapjes uit in coördinaten. 2 pt.

   b. Laat zien dat $\oint_{\mathcal{C}} \varphi\nabla\psi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\oint_{\mathcal{C}} \psi\nabla\varphi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$. 4 pt.

   c. Laat met de stelling van Stokes zien dat 4 pt.

$$\oint_{\mathcal{C}} \varphi\nabla\psi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_{\mathcal{S}} (\nabla\varphi \times \nabla\psi) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$