Tentamen WISN102 Wiskundige Technieken 2

Do 1 feb 2017 9:00 – 12:00

Normering voor 4 pt vragen (andere vragen naar rato):

4pt Goed begrepen en goed uitgevoerd met voldoende toelichting, eventueel enkele onbelangrijke rekenfoutjes.

3pt Grote lijn begrepen, maar technische vaardigheid schiet tekort;
signaleert "onmogelijke" tussenresultaten maar is niet in staat deze weg te werken;
maakt meerdere fouten (al dan niet door slordigheid);
geeft wel enige tekstuitleg maar zeker niet voldoende;
gebruikt verwerpelijke notaties.

2pt Weet ongeveer wat te doen maar lijdt aan gebrek aan vaardigheid en/of inzicht;
mist belangrijke gevalsonderscheidingen of uitzonderingen etc.;
herkent evident foute tussenresultaten niet;
toont onvoldoende vaardigheid/controle/zelfreflectie.
Een combinatie van meerdere bij 3pt genoemde tekortkomingen kan ook leiden tot deze normering.

1pt Aardig beginnetje, maar het levert niet echt wat op.

0pt Geen idee wat te doen, dit wordt niks; of: toelichting bij formules ontbreekt volledig (en de opgave vereiste meer dan alleen simpel rekenwerk).

NB: indien *ernstige* fouten gemaakt worden op het gebied van vwo-voorkennis (kettingregel vergeten, slechte beheersing gonio, ...) kan de normering een punt lager uitvallen dan anders het geval zou zijn geweest.

1. Zij $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$

   a. Vind van A alle eigenwaarden en geef bij elke eigenwaarde minstens één eigenvector. 4 pt.

Oplossing: De karakteristieke vergelijking is

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 2\right) - 2(1-\lambda) = 0,$$

oftewel $(1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = 0$. Deze heeft oplossingen $\lambda = 1$, $\lambda = -1$ en $\lambda = 3$, dit zijn de eigenwaarden.

Bij $\lambda = 1$ zijn eigenvectoren de (niet-triviale) oplossingen van $A - I = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$, en je kunt direct aflezen dat de vectoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ en alle veelvouden ervan voldoen. Een eigenvector bij eigenwaarde 1 is dus $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Op dezelfde manier vinden we bij $\lambda = -1$ dat $A+I = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$ en dus dat $\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ een eigenvector is bij eigenwaarde -1.

Bij $\lambda = 3$ vinden we $A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & -2 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}$ met eigenvector $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

NOOT: als het bij één (of meer) van je eigenwaarden niet lukt om eigenvectoren uit te rekenen, dan horen je alarmbellen af te gaan en dan check je of je eigenwaarden wel kloppen! Je weet: doofheid voor alarmen kost extra punten!

b. Is A inverteerbaar? 2 pt.

Oplossing: Ja, en het volstaat om één van de volgende argumenten te geven:

- De matrix A heeft 0 niet als eigenwaarde;
- $\det A \neq 0$ (je vindt $\det A$ door 0 in te vullen in het karakteristieke polynoom);
- We hebben drie lineair onafhankelijke eigenvectoren gevonden bij opgave a;
- Je hebt de inverse expliciet uitgerekend, maar dat kost onnodig veel tijd die je wel beter kunt gebruiken.

2. Zij $f(x,y) = x^2 + y^2$. Aan de grafiek van f raken de vlakken $\mathcal{V}_1$ in het punt $(0,1,1)$ en $\mathcal{V}_2$ in het punt $(-1,0,1)$. 4 pt.

Vind alle punten (x, y, z) die in zowel $\mathcal{V}_1$ als $\mathcal{V}_2$ liggen.

Oplossing: Laten we de normaalvectoren op de vlakken resp. $\boldsymbol{n}_1$ en $\boldsymbol{n}_2$ noemen. Iha is de normaalvector aan de grafiek van $f(x, y)$ in het punt $(a, b, f(a, b))$ gelijk aan $(\partial_1 f(a, b), \partial_2 f(a, b), -1)$, hier met $\partial_1 f(a, b) = 2a$ en $\partial_2 f(a, b) = 2b$. De normaalvectoren zijn dus $\boldsymbol{n}_1 = (0, 2, -1)$ en $\boldsymbol{n}_2 = (-2, 0, -1)$. De vergelijkingen van de raakvlakken zijn in het algemeen

$$\partial_1 f(a, b)(x - a) + \partial_2 f(a, b)(y - b) = z - f(a, b),$$

hier dus:

$$\begin{aligned} 2(y - 1) &= z - 1 \text{ en} \\ -2(x + 1) &= z - 1, \end{aligned}$$

oftewel

$$\begin{aligned} 2y - z &= 1 \text{ en} \\ -2x - z &= 1. \end{aligned}$$

Dit zijn twee niet-parallelle vlakken die precies een lijn als doorsnee hebben. Deze lijn kunnen we parametriseren met bijv. $z = t$, dan vinden we $y = \frac{1}{2}(t + 1)$ en $x = -\frac{1}{2}(t + 1)$. Of anders (ook goed): de vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. Vereenvoudig de uitdrukking 4 pt.

$$\nabla \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \nabla \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

waarin f een gladde harmonische functie van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}$ is.

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
&\nabla\partial_1 f \cdot(\hat{\mathbf{\imath}}+\hat{\mathbf{\jmath}}) + \nabla\partial_2 f \cdot(-\hat{\mathbf{\imath}}+\hat{\mathbf{\jmath}}) \\
&= (\partial_1(\partial_1 f)\hat{\mathbf{\imath}} + \partial_2(\partial_1 f)\hat{\mathbf{\jmath}}) \cdot(\hat{\mathbf{\imath}}+\hat{\mathbf{\jmath}}) + (\partial_1(\partial_2 f)\hat{\mathbf{\imath}} + \partial_2(\partial_2 f)\hat{\mathbf{\jmath}}) \cdot(-\hat{\mathbf{\imath}}+\hat{\mathbf{\jmath}}) \\
&= \partial_{11} f + \partial_{21} f - \partial_{12} f + \partial_{22} f \\
&\overset{\star}{=} \partial_{11} f + \partial_{22} f \\
&\overset{\dagger}{=} 0.
\end{aligned}
$$

Bij $\star$ gebruiken we de gelijkheid van gemengde afgeleiden voor gladde functies, bij † het feit dat f harmonisch is.

NOOT: Blijkbaar zijn er mensen die $\nabla\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ *niet als inproduct herkennen. Leermomentje!*

4. Stel φ is een gladde functie van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}$ en $\boldsymbol{F} = -\nabla\varphi$. Verder is $\boldsymbol{r}(t)$ een integraalkromme van $\boldsymbol{F}$, d.w.z. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))$ voor $t \geq 0$. 4 pt.

Laat zien dat $\dfrac{\mathrm{d}\varphi(\boldsymbol{r}(t))}{\mathrm{d}t} < 0$.

Oplossing: Kettingregel toepassen:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi(\boldsymbol{r})) \\
&= \frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r})}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r})}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\
&= \operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{r}) \cdot \tfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \\
&\overset{\star}{=} \operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \\
&\overset{\dagger}{=} -|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})|^2.
\end{aligned}
$$

Hierin gebruiken we bij $\star$ dat $\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ en bij † dat $\boldsymbol{F} = -\operatorname{grad}\varphi$.

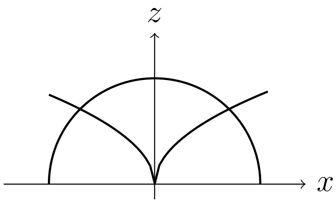
Aangezien de norm van de vector $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ niet-negatief is, is dus $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(\boldsymbol{r}(t))$ niet-positief.

Gelijk aan 0 kan alleen optreden als $\operatorname{grad}\varphi = \mathbf{0}$, maar dan zit je in een stationair punt en is de integraalkromme gedegenereerd tot een punt. (Als je dat niet hebt opgemerkt krijg je wel alle punten.)

NOOT 1: Een aantal studenten probeert zich hier doorheen te bluffen en schrijft zonder blikken of blozen $\frac{d\varphi}{d\boldsymbol{r}}$ (met rechte of kromme d). Vraag aan hen: wat betekent differentiëren naar een vector, en wanneer hebben we dat ingevoerd?

NOOT 2: Het woord "integraalkromme" is blijkbaar opgevat als een signaal dat er langs een kromme geïntegreerd moet worden. Maar dat was niet bedoeld; het is gewoon één van de alternatieve benamingen voor "stroomlijn".

5. Bereken het volume van dat deel van de bol $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$ dat boven het oppervlak $z = (x^2 + y^2)^{1/4}$ ligt. 4 pt.



Oplossing: Je kunt dit volume parametriseren in cylindercoordinaten waarbij we de bol schrijven als $z^2 \leq 2 - r^2$ en het gegeven oppervlak als $z^2 = \sqrt{r^2} = r$. Voor het gedeelte binnen de bol en boven het oppervlak geldt $0 \leq r \leq 2 - r^2$, d.w.z. r is hoogtsens 1. We nemen dus als grenzen $0 < \theta < 2\pi$, $0 < r < 1$, en $\sqrt{r} < z < \sqrt{2 - r^2}$.

Het volume is dus

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{\sqrt{r}}^{\sqrt{2-r^2}} r \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta$$

$$= 2\pi \int_0^1 (\sqrt{2 - r^2} - \sqrt{r}) r \,\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi(-\tfrac{1}{3}(2 - r^2)^{3/2} - \tfrac{2}{5} r^{5/2})\Big|_0^1$$

$$= 2\pi(-\tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{5} + \tfrac{2}{3}\sqrt{2}) = 2\pi(\tfrac{2}{3}\sqrt{2} - \tfrac{11}{15}).$$

6. Kortjakje moet door de regen naar huis lopen, en zij vraagt zich af of ze minder nat wordt als ze harder loopt.

We beschouwen Kortjakje als een balk met afmetingen p, q en h in respectievelijk de x, y en z-richting. Kortjakje loopt in de positieve x-richting met constante snelheid $\boldsymbol{v} = v\hat{\mathbf{i}}$.

De regen stellen we voor met het constante vectorveld $\boldsymbol{F} = -f\hat{\mathbf{k}}$. Let op: het vectorveld dat Kortjakje *ervaart* hangt natuurlijk nog af van haar snelheid!

Kortjakjes afstand door de regen is L.

a. Geef een korte verklaring waarom Kortjakje alleen nat regent op die oppervlakken waar het inproduct van het inkomende regenveld en de naar binnen gerichte normaal op Kortjakje positief is. Geen zwetsverhalen. 1 pt.

> **Oplossing:** Om het oppervlak nat te maken moet de regen een component hebben naar het oppervlak toe, dus in de richting van de naar binnen gerichte normaal $\boldsymbol{n}$, d.w.z. dat $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} > 0$.

b. Bereken met een fluxintegraal hoeveel regen per seconde op Kortjakjes oppervlak terecht komt. 4 pt.

> **Oplossing:** De enige oppervlakken met een positief inproduct (als bedoeld in de vorige opgave) zijn het bovenvlak en het voorvlak. Het effectieve regenvectorveld is $\boldsymbol{F}_e = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{v} = -v\hat{\mathbf{i}} - f\hat{\mathbf{k}}$. De flux door Kortjakjes bovenvlak $\mathcal{B}$ met afmetingen $p \times q$ is $\iint_{\mathcal{B}} \boldsymbol{F}_e \cdot -\hat{\mathbf{k}}\,\mathrm{d}S = pqf$, de flux door het voorvlak $\mathcal{V}$ met breedte q en hoogte h is $\iint_{\mathcal{V}} \boldsymbol{F}_e \cdot -\hat{\mathbf{i}}\,\mathrm{d}S = qhv$, de totale inkomende regen per tijdseenheid is dus $pqf + qhv$.

c. Kan Kortjakje beter sneller of langzamer lopen om zo droog mogelijk thuis te komen? 2 pt.

> **Oplossing:** De regen die Kortjakje opvangt tijdens haar hele wandeling krijgen we door het resultaat van de vorige opgave te integreren over de reisduur L/v. Dit geeft $\int_0^{L/v} pqf + qhv\,\mathrm{d}t = pqf\frac{L}{v} + qhL$; merk op dat de eerste term afhankelijk is van de snelheid terwijl de tweede term constant is, onafhankelijk van de snelheid. De eerste term is kleiner naarmate de snelheid groter is. Kortjakje moet dus zo hard mogelijk naar huis rennen.
>
> Opm.: de tweede term is in feite het volume dat Kortjakjes voorzijde "schoonveegt" op weg naar huis.

7. Zij $\mathcal{C}$ de rand van het oppervlak $\mathcal{S}$; $\boldsymbol{r}$ een parametrisering van $\mathcal{C}$, φ en ψ gladde scalarvelden op $\mathbb{R}^3$.

We herinneren aan de volgende *vector identities* voor scalarvelden φ, ψ en een vectorveld $\boldsymbol{F}$:

$$\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi, \tag{1}$$
$$\nabla \times (\varphi\boldsymbol{F}) = (\nabla\varphi) \times \boldsymbol{F} + \varphi(\nabla \times \boldsymbol{F}). \tag{2}$$

a. Laat zien dat vergelijking (1) geldt; schrijf alle stapjes uit in coördinaten. 2 pt.

Oplossing:

$$\begin{aligned}\nabla(\varphi\psi) &= (\partial_1(\varphi\psi), \partial_2(\varphi\psi), \partial_3(\varphi\psi)) \\ &= ((\partial_1\varphi)\psi + \varphi(\partial_1\psi), (\partial_2\varphi)\psi + \varphi(\partial_2\psi), (\partial_3\varphi)\psi + \varphi(\partial_3\psi)) \\ &= ((\partial_1\varphi)\psi, (\partial_2\varphi)\psi, (\partial_3\varphi)\psi) + (\varphi\partial_1\psi, \varphi\partial_2\psi, \varphi\partial_3\psi) \\ &= (\nabla\varphi)\psi + \varphi(\nabla\psi),\end{aligned}$$

zoals gevraagd.

b. Laat zien dat $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \varphi\nabla\psi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\oint_{\mathcal{C}} \psi\nabla\varphi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$. 4 pt.

Oplossing: Het vectorveld $\nabla(\varphi\psi)$ is afkomstig van de potentiaal $\varphi\psi$ en is dus conservatief, zodat langs de gesloten kromme $\mathcal{C}$ geldt $\oint_{\mathcal{C}} \nabla(\varphi\psi) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$. Volgens opgave a is dan:

$$\oint_{\mathcal{C}} \varphi\nabla\psi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \oint_{\mathcal{C}} \psi\nabla\varphi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0,$$

waaruit het gestelde direct volgt.

c. Laat met de stelling van Stokes zien dat 4 pt.

$$\oint_{\mathcal{C}} \varphi\nabla\psi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_{\mathcal{S}} (\nabla\varphi \times \nabla\psi) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

Oplossing: Volgens Stokes geldt voor een glad vectorveld $\boldsymbol{G}$ dat

$$\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{G} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_{\mathcal{S}} \nabla \times \boldsymbol{G} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

Als we dat toepassen met $\boldsymbol{G} = \varphi\nabla\psi$ dan is de linkerkant al in orde. Aan de rechterkant gebruiken we regel (2) met $\boldsymbol{F} = \nabla\psi$:

$$\nabla \times \varphi\nabla\psi = \nabla\varphi \times \nabla\psi + \varphi(\nabla \times \nabla\psi).$$

Maar $\nabla \times \nabla\psi = \operatorname{curl}\operatorname{grad}\psi = 0$, dus de rechterkant is ook in orde.