Vraagstuk DV1 Een andere methode dan Euler forward, Euler backward, en trapezium om de oplossing van een beginwaarde-probleem

$$(DV): \qquad \begin{aligned} &\frac{du}{dt} = f(t, u), \quad t \in [0, 1], \\ &u(0) = u_0^* \end{aligned}$$

te benaderen kan men verkrijgen door bijv. een integraal te benaderen met de midpunt-regel. (We veronderstellen de ware oplossing, u^*, van (DV) voldoende vaak differentieerbaar.)

a) Laat zien, dat de dan verkregen methode luidt, bij gegeven $n \in \mathbf{N}$,

$$(R): \qquad u_{n+1} = u_{n-1} + 2hf(t_n, u_n), \quad 1 \leq n \leq N-1, \text{ en } h = 1/N;\ t_n = nh.$$

(Dit is dus een twee-staps methode en benodigt 2 startwaarden u_0 en u_1.)

b) Bewijs, dat voor de afbreekfout van deze methode geldt:

$$\tau_n = \frac{h^3}{3} u^{*'''}(\xi_n), \quad \text{met } \xi_n \in [t_{n-1}, t_{n+1}].$$

c) Stel een recursie op voor de globale discretarisatie-fouten e_n voor het geval, dat $f(t, u) = p(t)u + g(t)$, met $p, g \in C^\infty[0, \infty)$. Als we ervan uitgaan, dat $e_0 = 0$ (zie in, dat dit tamelijk vanzelfsprekend is), dan kan men bewijzen, dat

$$e_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i(h)\tau_{n-i} + c_n(h)e_1,$$

waarin de $c_i(h)$ *uniform* begrensd zijn in i en h, in die zin, dat er een $C \in \mathbf{R}$ is, waarvoor

$$|c_i(h)| \leq C, \quad \forall h \text{ met } Nh = 1 \text{ en } \forall i \leq N.\ (\tau_1 = e_1).$$

d) Laat zien, dat indien we als startwaarden voor (R) gebruiken $u_0 = u_0^*$ en $u_1 = u_0^* + hf(0, u_0^*)$, er geldt:

$$e_1 = \mathcal{O}(h^2) \quad (\text{voor } h \to 0),$$

en daarmee ook

$$e_n = \mathcal{O}(h^2) \ \textit{uniform} \text{ in } n \text{ en } h, \text{ zolang } nh \leq 1.$$

Vraagstuk DV2 Gegeven de differentiaalvergelijking

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

(oplossing geven we aan met $x^*(t)$). We beschouwen de volgende methode om deze vergelijking numeriek op te lossen:

$$x_n = \alpha x_{n-1} + h[\beta_0 f(t_n, x_n) + \beta_1 f(t_{n-1}, x_{n-1})].$$

a) Laat nu: 1) $n \to \infty$ en $h \to 0$, maar
2) zodanig dat $t_n = nh \to t$.

Voor convergentie wensen we dan dat $x_n \to x^*(t)$. Laat zien dat er voor de differentiaalvergelijking: $\frac{dx}{dt} = 0$, $x_0 = 1$ geen convergentie optreedt als $\alpha \neq 1$.

b) Zij dus $\alpha = 1$. Laat zien dat er voor de differentiaalvergelijking $\frac{dx}{dt} = 1$, $x_0 = 0$ geen convergentie optreedt als $\beta_0 + \beta_1 \neq 1$.

c) Uitgaande van de resultaten uit a. en b. luidt de methode in feite dus:

$$x_n = x_{n-1} + h[\beta f_n + (1 - \beta) f_{n-1}].$$

Bepaal de orde van deze methode als functie van de parameter β.

d) Zij nu specifiek $f(t, x) = px(t) + q(t)$, en de methode als in c.. Geef een uitdrukking voor de grootheden σ en $\tilde{\tau}_n$ in de recursie:

$$e_n = \sigma e_{n-1} + \tilde{\tau}_n.$$

e) Laat zien dat voor alle waarden van β geldt:

$$\sigma^{t/h} = e^{pt} + \mathcal{O}(h) \quad \text{mits } 0 \leq t \leq T.$$

f) Laat zien dat als $\beta = \frac{1}{2}$ dan $e_n = \mathcal{O}(h^2)$ uniform in n en h met $nh \leq T$.