

## 4 Numerieke integratie

### 4.0 Inleiding

Bij de berekening van integralen  $\int_a^b f(t) dt$  zullen we vaak op functies stuiten waarvan moeilijk of in het geheel niet expliciet een primitieve aan te geven is. Om dan toch een benadering voor de integraal te vinden kunnen we bijv. de integrand door een interpolatiepolynoom vervangen en dit polynoom vervolgens integreren. Hoe goed zo'n benadering is, zullen we uitgebreid onderzoeken. Tevens zal blijken dat we hiervoor het interpolatiepolynoom niet expliciet behoeven op te stellen.

In hoofdstuk 1 gebruikten we lineaire interpolatie om een aantal wezenlijke aspecten van interpolatie te demonstreren. Analoot zullen we in dit hoofdstuk de trapeziumregel als voorbeeld te gebruiken voor de i.h.a. efficiëntere methoden die men in de praktijk gebruikt.

Formules om integralen benaderd te berekenen worden vaak *kwadratuurformules* genoemd.

### 4.1 De trapeziumregel

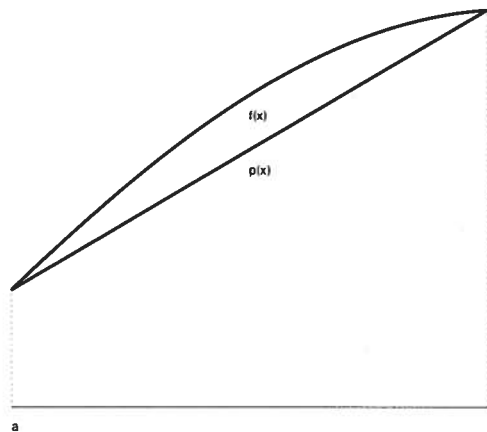
**4.1A** Laat  $a$  en  $b$  twee punten in  $\mathbb{R}$  zijn,  $a < b$ , en  $f$  een continue functie op  $[a, b]$ . Laat  $p$  het lineaire interpolatiepolynoom van  $f$  op  $a$  en  $b$  zijn (zie 2):

$$p(x) = \frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)$$

We gebruiken nu  $\int_a^b p(x) dx$  als benadering voor  $\int_a^b f(x) dx$ :

$$\int_a^b p(x) dx = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) \quad (54)$$

(ga na). De benadering  $\frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$  voor  $\int_a^b f(x) dx$  heet de *trapeziumregel*: Het oppervlak onder de grafiek van  $f$  tussen  $a$  en  $b$  wordt benaderd met het oppervlak van het trapezium met als hoekpunten  $(a, 0)$ ,  $(b, 0)$ ,  $(b, f(b))$  en  $(a, f(a))$  (zie figuur 7).



FIGUUR 7: De trapeziumregel: het oppervlak onder de grafiek van de functie  $f$  wordt benaderd door het oppervlak van het trapezium dat gevormd wordt door de grafiek van het lineaire interpolatie polynoom  $p$  van  $f$ .

**4.1B De restterm.** In 1.1B vonden we als restterm bij lineaire interpolatie op  $a$  en  $b$

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{2}(x-a)(x-b)f''(\xi(x)) \quad (55)$$

waarbij we  $\xi(x)$  schrijven in plaats van  $\xi$  om de afhankelijkheid van  $\xi$  ten aanzien van  $x$  nog eens te benadrukken. Hoewel we geen resultaten hebben over de continuïteit van  $x \mapsto \xi(x)$ , noch hoeven aan te nemen dat  $f''$  continu is, is het duidelijk dat  $x \mapsto \frac{1}{2}(x-a)(x-b)f''(\xi(x))$  een continue functie is: immers, het is het verschil van twee continue functies. Het rechterlid van (55) is dus zeker integreerbaar.

Sterker nog,  $x \mapsto f''(\xi(x))$  is continu op  $[a, b]$ . Immers,  $\phi \equiv f - p$  is continue differentieerbaar, en  $\phi(a) = \phi(b) = 0$ . Omdat  $f''(\xi(x)) = 2\phi(x)/((x-a)(x-b))$  hebben we continuïteit van  $x \mapsto f''(\xi(x))$  op  $(a, b)$  en omdat

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{2\phi(x)}{(x-a)(x-b)} = \frac{2}{a-b} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\phi(x) - \phi(a)}{x-a} = \frac{2}{a-b} \phi'(a)$$

volgt continuïteit in  $a$ . Evenzo volgt continuïteit in  $b$ .

Integreren van (55) levert

$$\int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) = \frac{1}{2} \int_a^b (x-a)(x-b)f''(\xi(x)) dx. \quad (56)$$

Deze restterm kan men schatten met behulp van de volgende stelling:

**Stelling 4.1.1** *Zij  $f \in C^2[a, b]$ . Dan is er een  $\eta \in [a, b]$  zo dat*

$$\int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta).$$

Het bewijs van deze stelling maakt gebruik van de volgende stelling.

**4.1C** Stelling 4.1.2 wordt de *tussenwaardenstelling van de integraalrekening* genoemd. De stelling maakt gebruik van tekenvaste functies: een functie  $g$  is *tekenvast* op  $[a, b]$  als òf  $g(t) \geq 0$  voor alle  $t \in [a, b]$  òf  $g(t) \leq 0$  voor alle  $t \in [a, b]$

**Stelling 4.1.2** *Zij  $f$  en  $g$  reëel-waardige integreerbare functies op  $[a, b]$ ,  $f$  is continu op  $[a, b]$ ,  $g$  is begrensd en tekenvast. Dan is er een  $\eta \in (a, b)$  zodat*

$$\int_a^b g(x)f(x) dx = f(\eta) \int_a^b g(x) dx$$

**Bewijs.** We mogen aannemen dat  $g \geq 0$  is op  $[a, b]$ . Anders vervangen we  $g$  door  $-g$ . Zij  $m = \min f(x)$ ,  $M = \max f(x)$ . Dan geldt,

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b g(x)f(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx.$$

Dus ligt  $d \equiv \int_a^b g(x)f(x) dx / \int_a^b g(x) dx$  tussen  $m$  en  $M$  en is er volgens de tussenwaardenstelling een  $\eta \in [a, b]$  zodat  $f(\eta) = d$ .

Merk op dat  $d = m$  of  $d = M$  alleen kan als  $f$  constant is op  $J \equiv \{t \in [a, b] \mid g(t) > 0\}$ . Als  $f$  niet constant is op  $J$ , is  $m < d < M$  en is er een  $\eta \in (a, b)$  met de gewenste eigenschap. Als  $f$  constant is op  $J$ , voldoet iedere  $\eta \in J$ , dus ook een  $\eta \in (a, b)$ .  $\square$

**Bewijs van Stelling 4.1.1.** Er geldt  $(x-a)(b-x) \geq 0$  op  $[a, b]$ . Verder hebben we al gezien dat  $x \mapsto f''(\xi(x))$  continu is op  $(a, b)$ . Dus volgt uit voorgaande stelling dat er een  $\eta \in [a, b]$  is waarvoor

$$\int_a^b (x-a)(b-x)f''(\xi(x)) dx = f''(\eta) \int_a^b (x-a)(b-x) dx = f''(\eta) \frac{(b-a)^3}{6}. \quad \square$$

**4.1D De gerepeteerde trapeziumregel.** Met stelling 4.1.1 vinden we eenvoudig een bovengrens voor de fout van de trapeziumregel:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \max_{[a,b]} |f''(x)|. \quad (57)$$

Dikwijls zal deze bovengrens de maximaal toelaatbare fout (de zogenaamde tolerantie) overtreffen. Men verdeelt dan het interval in een aantal delen en past de trapeziumregel toe op elk deelinterval. Een op deze wijze gevormde kwadratuurformule noemt men een *gerepeteerde kwadratuurformule*.

**Voorbeeld 4.1.1** Verdeel het interval  $[a, b]$  in  $n$  stukken ter grootte  $h$ . Definiër  $x_i = a + ih$ . Voor de trapeziumregel op een deelinterval geldt

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \frac{h}{2}[f(x_i) + f(x_{i-1})] - \frac{1}{12}h^3 f''(\xi_i)$$

met  $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ . Dus:

$$\int_a^b f(x) dx = h \left[ \frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n) \right] - \frac{1}{12}h^3 \sum_{i=1}^n f''(\xi_i). \quad (58)$$

Wegens  $\min_i f''(\xi_i) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f''(\xi_i) \leq \max f''(\xi_i)$  is er (voor een continue functie  $f''$ ) een  $\xi \in [a, b]$  zodat

$$\sum_{i=1}^n f''(\xi_i) = n f''(\xi).$$

Met  $nh = b - a$  vinden we zo:

$$\int_a^b f(x) dx = T(h) - \frac{b-a}{12}h^2 f''(\xi) \quad (59)$$

waarin

$$T(h) = h \left[ \frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n) \right]. \quad (60)$$

De aldus verkregen kwadratuurformule  $T(h)$  zullen we aanduiden als de  $n \times$  *gerepeteerde trapeziumregel*, waarbij dus, enigszins ongelukkig, de  $1 \times$  gerepeteerde trapeziumregel gelijk is aan de ongerepeteerde trapeziumregel.

Uit (59) volgt onmiddellijk dat het resultaat van de gerepeteerde trapeziumregel convergeert naar de integraal als  $f \in C^2[a, b]$ ; uit (59) krijgen we namelijk als bovengrens voor de fout

$$\left| \int_a^b f(x) dx - T(h) \right| \leq \frac{b-a}{12}h^2 \max_{[a,b]} |f''(x)|. \quad (61)$$

Maar ook voor wat minder nette functies treedt nog convergentie op. Zij  $f \in C^1[a, b]$ ; dan

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b \left(x - \frac{b+a}{2}\right)' f(x) dx = \left[ \left(x - \frac{b+a}{2}\right) f(x) \right]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \left(x - \frac{b+a}{2}\right) f'(x) dx \\ &= \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) - \int_a^b \left(x - \frac{b+a}{2}\right) f'(x) dx, \end{aligned}$$

zo dat

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) \right| \leq \max |f'(x)| \int_a^b \left| x - \frac{b+a}{2} \right| dx.$$

Dit geeft een andere bovengrens voor de restterm bij de ongerepeteerde trapeziumregel dan (57):

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{4} \max_{[a,b]} |f'(x)|. \quad (62)$$

Met deze grens vinden we in plaats van (61):

$$\left| \int_a^b f(x) dx - T(h) \right| \leq \frac{b-a}{4} h \max_{[a,b]} |f'(x)|. \quad (63)$$

We zien nu dus nog convergentie, maar mogelijkwijze wel langzamer; immers, het rechterlid in (61) daalt evenredig met  $h^2$ , terwijl het rechterlid van (63) slechts evenredig met  $h$  is.

Tenslotte, veronderstel dat  $f$  slechts continu is op  $[a, b]$ . Dan voeren we de getallen  $t_i$ ,  $i = 0, \dots, n+1$  in als volgt:  $t_0 = x_0 = a$ ,

$$t_i = x_0 + (i - \frac{1}{2})h, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$t_{n+1} = x_n = b.$$

Dan geldt:

$$h \left( \frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(x_n) \right) = \sum_{i=0}^n (t_{i+1} - t_i) f(x_i).$$

Voor dit soort sommen geldt de volgende stelling:

**Stelling 4.1.3** *Zij  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  een Riemann-integreerbare functie. Beschouw uitdrukkingen van de vorm*

$$\sum_{i=0}^n (t_{i+1} - t_i) f(\tau_i)$$

*waarin  $a = t_0 \leq \tau_0 \leq t_1 \leq \tau_1 \leq \dots \leq t_n \leq \tau_n \leq t_{n+1} = b$ . Dan geldt: voor elke  $\epsilon > 0$  is er een  $\delta > 0$  zo dat als  $t_{i+1} - t_i \leq \delta$ , voor alle  $i \leq n$ , dan*

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=0}^n (t_{i+1} - t_i) f(\tau_i) \right| \leq \epsilon.$$

Als de  $\{t_i\}$  en de  $\{\tau_i\}$  voldoen aan de voorwaarden van stelling 4.1.3, dan noemt men  $\sum_{i=0}^n (t_{i+1} - t_i) f(\tau_i)$  een *Riemann-som*.  $T(h)$  is dus zo'n Riemann-som.)

We vatten het bovenstaande samen:

**Stelling 4.1.4** *Zij  $f \in C[a, b]$ ; dan geldt*

$$(i) \int_a^b f(x) dx - T(h) \rightarrow 0 \text{ als } h \rightarrow 0,$$

Als  $f \in C^1[a, b]$ , dan

$$(ii) \left| \int_a^b f(x) dx - T(h) \right| \leq \frac{b-a}{4} h \max_{[a,b]} |f'(x)|,$$

Als  $f \in C^2[a, b]$ , dan

$$(iii) \left| \int_a^b f(x) dx - T(h) \right| \leq \frac{b-a}{12} h^2 \max_{[a,b]} |f''(x)|,$$

en bovendien is er een  $\xi \in [a, b]$  zo dat

$$(iv) \int_a^b f(x) dx - T(h) = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi).$$

□

## 4.2 Automatische integratie en Romberg schema's

**4.2A** Wanneer men de gerepeteerde trapeziumregel in praktische situaties wil gebruiken om een integraal met een zekere nauwkeurigheid te benaderen, dan moet men (bij voorkeur) over een majorant van  $f''$  beschikken, en dat kan men in de praktijk meestal niet.

Men zou daarom graag een proces willen hebben dat de gerepeteerde trapeziumregel voor een dalende rij waarden van  $h$  toepast en daarbij gaandeweg een indruk van de fout oplevert, om te stoppen als de gewenste nauwkeurigheid is bereikt. Om aan een dergelijk proces te komen grijpen we terug naar de restterm zoals die in (58) gegeven is en noteren deze als  $R(h)$ :

$$R(h) = -\frac{1}{12} h^3 \sum_1^n f''(\xi_i). \quad (64)$$

Wanneer we hierin  $h \sum_1^n f''(\xi_i)$  als Riemann som voor  $\int_a^b f''(t) dt = f'(b) - f'(a)$  beschouwen geldt dus

$$R(h) = -\frac{1}{12} h^2 [f'(b) - f'(a)] + o(h^2). \quad (65)$$

Blijkbaar is voor  $f'(a) \neq f'(b)$  en  $h$  klein de fout ongeveer evenredig met  $h^2$ . Bijgevolg kunnen we dezelfde foutschattingstechniek als in sectie 3.4 hanteren. Als we met  $I$  en  $T(h)$  de ware waarde van de integraal aanduiden, respectievelijk de benadering ervoor verkregen met de gerepeteerde trapeziumregel met stapgrootte  $h$ , dan geldt  $I - T(h) \approx 4[I - T(\frac{1}{2}h)]$ , en dus

$$I - T(\frac{1}{2}h) \approx \frac{1}{3} [T(\frac{1}{2}h) - T(h)] \quad (66)$$

en het rechterlid kan worden berekend. Dus als men een fout  $< \epsilon$  wenst gaat men door totdat  $|T(\frac{1}{2}h) - T(h)| < 3\epsilon$  en neemt dan  $T(\frac{1}{2}h)$  als de gewenste benaderingswaarde. Zodoende krijgt men dus een *automatisch integratieproces*. De vraag bij dit proces is natuurlijk of  $h$  al zo klein is dat  $R(h)$  al behoorlijk evenredig is met  $h^2$ , en dat vereist weer kennis van het verloop van  $f''$  die men doorgaans niet heeft. Als bijv.  $f''$  teknavast is zullen Riemann sommen al voor betrekkelijk grote waarden van  $h$  een (in relatieve zin) goede benadering voor  $\int f''$  geven (een fout van 10% hierin zal ons niet deren; zie de foutschattingfilosofie, 3.1B); als echter  $|\int f''| \ll \int |f''|$  dan zal dit pas voor heel

kleine waarden van  $h$  het geval zijn; en voor  $\int f'' = 0$  (d.w.z.  $f'(a) = f'(b)$ ), hetgeen in het bijzonder gebeurt bij periodieke functies  $f$ ) is het voor geen enkele waarde van  $h$  het geval. Overeenkomstig sectie 3.4 kan men enig *vertrouwen* in de evenredigheid van  $R(h)$  met  $h^2$  verwerven door er op te letten of

$$[T(2h) - T(h)]/[T(h) - T(\frac{1}{2}h)] \quad (67)$$

ongeveer de waarde 4 heeft. Als dit tijdens het halveringsproces enkele keren achtereen het geval is zal men hopen dat  $R(h)$  behoorlijk evenredig is met  $h^2$ , en daarmee dat (66) een goede foutschatting geeft.

#### Opmerking 4.2.1

- Het kan aanbevelenswaardig zijn het interval in 2 of meer delen op te delen als de integrand steile pieken heeft op een deel van het interval en zeer gladjes verloopt op een ander deel, omdat men bij glad verloop met veel grotere  $h$  (en dus minder werk) kan volstaan dan bij pieken.
- Een automatische manier van opdelen van het integratie interval  $[a, b]$  krijgt men als volgt: Zij  $T_0(a, h) = \frac{h}{2}[f(a) + f(a + h)]$  het trapezium resultaat voor het interval  $[a, a + h]$  en  $T_1(a, h) = \frac{h}{4}[f(a) + 2f(a + \frac{1}{2}h) + f(a + h)]$  het resultaat van de tweemaal gerepeteerde trapeziumregel. Verlaag dan  $h$  zo ver dat  $\frac{1}{3}|T_0(a, h) - T_1(a, h)| \leq \epsilon h/(b - a)$ , en accepteer  $T_1(a, h)$  als voldoende goede benadering voor  $\int_a^{a+h} f(x) dx$  (vergelijk (66)); beschouw nu  $a + h$  als nieuw beginpunt. Verschillende methoden voor automatische integratie berusten op deze gedachte, zij het dat ze vaak andere methoden dan de trapeziumregel als basis hebben (zie sectie 4.3); ze verschillen onderling ook in de strategie om de waarde van  $h$  voor het aan de beurt zijnde deelinterval te bepalen. Dergelijke methoden noemt men *variabele stap methoden*, ook wel *adaptive methoden*.
- Uit (65) ziet men nog dat als  $f'(a) = f'(b)$  men kan verwachten dat  $R(h)$  sneller naar 0 gaat dan  $\sim h^2$ , hetgeen betekent dat  $\frac{1}{3}(T(h) - T(2h))$  geen zinnige schatting van  $R(h)$  geeft.

#### Voorbeeld 4.2.1

$$f(x) = 100((e^{x-1} - 1) \sin x)^2, \quad a = 0, \quad b = 1.$$

| $n$ | $T(h)$     | $R(h)$     | $\frac{T(h) - T(2h)}{3}$ | $\frac{T(4h) - T(2h)}{T(2h) - T(h)}$ | $\frac{T(h) - T(2h)}{15}$ |
|-----|------------|------------|--------------------------|--------------------------------------|---------------------------|
| 1   | 0          | 1.89080656 |                          |                                      |                           |
| 2   | 1.77923834 | 0.11156822 | .59307945                |                                      | .11861589                 |
| 4   | 1.88397718 | 0.00682938 | .03491295                | 16.987                               | .00698259                 |
| 8   | 1.89038207 | 0.00042449 | .00213496                | 16.353                               | .00042699                 |
| 16  | 1.89078005 | 0.00002651 | .00013266                | 16.093                               | .00002653                 |
| 32  | 1.89080489 | 0.00000167 | .00000828                | 16.022                               | .00000166                 |
| 64  | 1.89080644 | 0.00000012 | .00000052                | 16.026                               | .00000010                 |

De vierde kolom suggereert dat de fout evenredig is met  $h^4$ . In 4.2B zullen we zien dat dit inderdaad het geval is. We hebben dit gebruikt om de foutschatting weergegeven in de laatste kolom op te stellen.

**4.2B De Euler-Maclaurin reeks.** Nu we met succes de techniek uit sectie 3.4 hebben toegepast op numerieke integratie met de gerepeteerde trapeziumregel, rijst de vraag of we misschien ook een extrapolatieproces als in sectie 3.5 kunnen maken. Essentieel hierbij is de vraag of we de fout  $R(h)$  van de gerepeteerde trapeziumregel kunnen ontwikkelen in machten van  $h$ :

$$R(h) = c_2 h^2 + c_3 h^3 + c_4 h^4 + \cdots + c_m h^m + \mathcal{O}(h^{m+1}).$$

Dat dit inderdaad kan blijkt uit stelling 4.2.1:

**Stelling 4.2.1**

Er bestaan getallen  $B_2, B_4, B_6, \dots$ , zodanig dat voor  $f \in C^{2m}[a, b]$ ,  $h = \frac{1}{n}(b-a)$ ,

$$\int_a^b f(x) dx - T(h) = - \sum_{i=1}^m h^{2i} B_{2i} [f^{(2i-1)}(b) - f^{(2i-1)}(a)] / (2i)! + o(h^{2m}). \quad (68)$$

**Bewijs.** Zie Bijlage C. □

**Opmerking 4.2.2** bij stelling 4.2.1.

(i) Voor  $f \in C^\infty[a, b]$  kan men  $m$  willekeurig groot maken; men krijgt dan de formule

$$\int_a^b f(x) dx - T(h) \sim - \sum_{i=1}^{\infty} h^{2i} B_{2i} [f^{(2i-1)}(b) - f^{(2i-1)}(a)] / (2i)!. \quad (69)$$

Net als in (46) gebruiken we hier het symbool  $\sim$  om aan te geven dat we niet weten of de reeks  $\sum_{i=1}^{\infty} h^{2i} B_{2i} [f^{(2i-1)}(b) - f^{(2i-1)}(a)] / (2i)!$  wel convergeert, en dat ons dat ook eigenlijk niet interesseert; (69) betekent dan ook niet anders dan dat (68) geldt voor elke  $m$ . We spreken in een dergelijk geval liever van een asymptotische ontwikkeling dan van een reeks. Desalniettemin wordt het rechterlid van (69) in de literatuur vaak de *Euler-Maclaurin reeks* genoemd.

(ii) De coëfficiënten  $B_{2i}$  zijn de zogenaamde *Bernoulli getallen*. Vele relaties zijn hiervoor bekend (zie bijvoorbeeld Abramowitz-Stegun, "*Handbook of mathematical functions*", p. 803-810). Enige waarden:

$$\begin{aligned} B_2 &= \frac{1}{6}, & B_4 &= -\frac{1}{30}, & B_6 &= \frac{1}{42}, & B_8 &= -\frac{1}{30}, \\ B_{10} &= \frac{5}{66}, & B_{12} &= -\frac{691}{2730}, & B_{14} &= \frac{7}{6}, & B_{16} &= -\frac{3617}{510}. \end{aligned}$$

Asymptotisch geldt:  $B_{2i} \simeq (-1)^{i+1} 2(2i)! / (2\pi)^{2i}$ .

(iii) Er bestaat ook een variant van (68) zonder  $o(h^{2m})$ -term:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx - T(h) &= - \sum_{i=1}^{m-1} h^{2i} B_{2i} [f^{(2i-1)}(b) - f^{(2i-1)}(a)] / (2i)! - \\ &\quad - (b-a) h^{2m} B_{2m} f^{(2m)}(\xi) / (2m)! \end{aligned} \quad (70)$$

**4.2C Romberg integratie.** De theorie uit sectie 3.5 kan nu rechtstreeks worden toegepast op het benaderen van  $\int_a^b f(x) dx$  door middel van de gerepeteerde trapeziumregel. Ook stelling 3.5.1 blijft onverkort van toepassing.

Bij numerieke integratie wordt vaak aanbevolen om de Bulirsch rij  $h_0, \frac{1}{2}h_0, \frac{1}{3}h_0, \frac{1}{4}h_0, \frac{1}{6}h_0, \frac{1}{8}h_0, \frac{1}{12}h_0, \dots$  te gebruiken met  $h_0 = b - a$  ( $\frac{1}{2}h_0, \frac{1}{3}h_0, \frac{1}{4}h_0, \dots$  is de Bulirsch rij in 3.5E met  $h = \frac{1}{2}h_0$ ). Het oogmerk hierbij is het beperken van het benodigde aantal evaluaties van  $f$ . In feite is de Bulirsch rij hiervoor ontworpen.

**Opgave 4.2.1** Ga na dat het opstellen van de eerste 7 rijen in het Romberg schema corresponderend met de Romberg danwel Bulirsch rij respectievelijk 65 en 17 functie evaluaties vergt.

**Opmerking 4.2.3** (i) Men ziet nu het gebeuren van de tabel in 4.2A verklaard: de eerste term uit de Euler-Maclaurin reeks is hier nul, zodat de restterm voor  $h \rightarrow 0$  evenredig is met  $ch^4$ . Vandaar de factoren dichtbij 16 in de vierde kolom, en de goede benadering van  $R(h)$  door de waarden uit de laatste kolom.

(ii) Als we een periodieke functie integreren over een periodiciteitsinterval zijn alle termen van de Euler-Maclaurin reeks nul. De restterm van de gerepeteerde trapeziumregel gaat dan sneller naar nul dan elke macht van  $h$ .

**Voorbeeld 4.2.2**

$$\int_0^\pi \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx = \pi/\sqrt{2} = 2.221441470$$

| $n = \frac{\pi}{h}$ | benadering  | fout         | factor  |
|---------------------|-------------|--------------|---------|
| 1                   | 1.570796327 | 0.650645143  | 4.82    |
| 2                   | 2.356194491 | -0.134753021 | 34.97   |
| 4                   | 2.225294797 | -0.003853327 | 1155.07 |
| 8                   | 2.221444806 | -0.000003336 | ?       |
| 16                  | 2.221441470 | 0            |         |

Het zal duidelijk zijn dat onder deze omstandigheden het opstellen van een Romberg schema volstrekt zinloos is.

### 4.3 Andere kwadratuurformules

**4.3A** Zoals lineaire interpolatie aanleiding geeft tot de trapeziumregel, zo geven ook andere interpolatieformules aanleiding tot kwadratuurformules.

Laat  $x_0, \dots, x_n$  verschillende punten in  $[a, b]$  zijn. Zij  $p$  het Lagrange interpolatiepolynoom van  $f$  op de punten  $x_0, \dots, x_n$ . Dan zullen we dus  $\int_a^b p(x) dx$  als benadering voor  $\int_a^b f(x) dx$  nemen. Nu weten we dat  $p(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k)L_{kn}(x)$  (zie (6)), zodat

$$\int_a^b p(x) dx = \sum_{k=0}^n w_k f(x_k) \quad (71)$$

met als coëfficiënten

$$w_k = \int_a^b L_{kn}(x) dx \quad (72)$$

die blijkbaar onafhankelijk van  $f$  zijn.

We noemen  $\sum_{k=0}^n w_k f(x_k)$  de bij  $x_0, \dots, x_n$  behorende *interpolatoire kwadratuurformule* voor  $\int_a^b f(x) dx$ . De  $x_k$  heten de *steunpunten* (net als bij Lagrange interpolatie, zie sectie 1.2), de  $w_k$  de *gewichten* van de kwadratuurformule.

**Stelling 4.3.1** Als  $f$  een polynoom van graad hoogstens  $n$  is, dan is elke  $n + 1$ -punts interpolatoire kwadratuurformule exact:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^n w_k f(x_k).$$

**Bewijs.** Zoals blijkt uit opmerking 1.2.1 valt  $f$  samen met zijn Lagrange interpolatiepolynoom op  $x_0, \dots, x_n$ , en dus geldt  $\int f(x) dx = \int p(x) dx$   $\square$

Omgekeerd geldt:

**Stelling 4.3.2** Wanneer  $x_0, \dots, x_n$  en  $w_0, \dots, w_n$  gegeven getallen-rijtjes zijn en er geldt

$$\int_a^b p(x) dx = \sum_{k=0}^n w_k p(x_k)$$

voor alle polynomen  $p$  van graad  $\leq n$ , dan is  $\sum_{k=0}^n w_k f(x_k)$  de unieke bij  $x_0, \dots, x_n$  behorende interpolatoire kwadratuurformule voor  $\int_a^b f(x) dx$ .

**Bewijs.** Op grond van stelling 4.3.1 kunnen we volstaan met het bewijzen dat de gewichten  $w_k$  uniek zijn. Zij  $0 \leq k \leq n$  gegeven. Definiëer de unieke  $q \in P_n$  door  $q(x_k) = 1$ ,  $q(x_\ell) = 0$  voor  $\ell \neq k$ . Dan geldt  $\int_a^b q(x) dx = w_k$ .  $\square$

**4.3B** We kunnen stelling 4.3.2 ook gebruiken om de gewichten  $w_k$  uit te rekenen als de punten  $x_0, \dots, x_n$  gegeven zijn. Neem namelijk maar voor  $p(x)$  achtereenvolgens  $1, x, \dots, x^n$  of een willekeurige andere basis van  $P_n$ . Dit levert een stelsel van  $n + 1$  vergelijkingen in de  $n + 1$  onbekenden  $w_k$  op, welk stelsel dus uniek oplosbaar is. (In verband met optredende afrondfouten is het voor grote waarden van  $n$  niet aanbevelenswaardig de basis  $1, x, \dots, x^n$  te gebruiken).

**Voorbeeld 4.3.1** Neem  $a = x_0 = 0$ ,  $b = x_1 = 1$ . Dan is de kwadratuurformule  $w_0 f(0) + w_1 f(1)$ . We weten dat moet gelden:

$$1 = \int_0^1 1 dx = w_0 + w_1$$

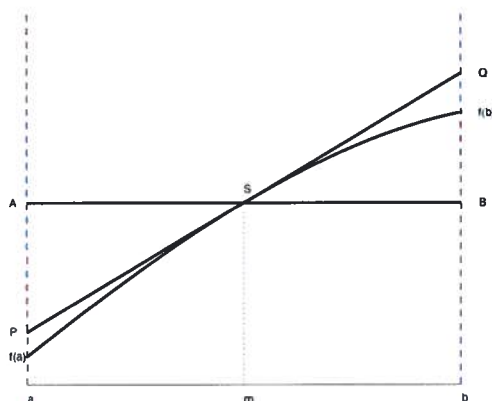
$$\frac{1}{2} = \int_0^1 x dx = w_0 \cdot 0 + w_1 \cdot 1 = w_1$$

zodat  $w_0 = w_1 = \frac{1}{2}$ ; we vinden zo de trapeziumregel terug.

**Voorbeeld 4.3.2** Neem  $a = x_0 = -1$ ,  $x_1 = 0$ ,  $b = x_2 = 1$ ,  $n = 2$ . Op dezelfde wijze als boven vinden we

$$\begin{aligned} w_0 + w_1 + w_2 &= 2 \\ -w_0 + w_2 &= 0 \\ w_0 + w_2 &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Hieruit volgt  $w_0 = w_2 = \frac{1}{3}$ ,  $w_1 = \frac{4}{3}$ .



FIGUUR 8: De midpuntregel. Het figuur maakt duidelijk waarom benaderend integreren middels de midpuntregel zoveel beter is dan men op grond van een 0-de orde benadering zou verwachten: het oppervlak onder de grafiek van de 0-de orde benadering (de rechte  $AB$ ) is gelijk aan het oppervlak onder de grafiek van de eerste orde benadering (de rechte  $PQ$ ).

**4.3C Speciaal geval: de midpuntregel.** Door nulde orde interpolatie van  $f$  in het punt  $m = \frac{1}{2}(a + b)$  op het segment  $[a, b]$  vinden we de volgende kwadratuurformule voor  $\int_a^b f(x) dx$ :

$$(b - a)f(m). \quad (73)$$

Dit noemen we de *midpuntregel* (zie figuur 8). We benaderen dus blijkbaar de grafiek van  $f$  door de rechte  $AB$  en dat lijkt nogal grof. Evenwel is  $\text{opp}(a, b, B, A) = \text{opp}(a, b, Q, P)$  waarbij  $PQ$  een willekeurige lijn door  $S$  is, en als we  $PQ$  de raaklijn in  $S$  nemen zien we dat de midpuntregel een veel beter resultaat geeft dan aanvankelijk werd verwacht.

Op grond van stelling 4.3.1 weten we dat de midpuntregel exact is voor constante functies. Aangezien met  $\phi(x) = x - m$ ,  $\int_a^b \phi(x) dx = 0 = \phi(m)$  is de midpuntregel ook exact voor  $\phi$ . Daar iedere  $p \in P_1$  te schrijven is als  $p = c_1\phi + c_2$  voor zekere constanten  $c_1$  en  $c_2$ , is de midpuntregel blijkbaar zelfs exact op  $P_1$ .

Integratie van de standaard restterm voor het 0-de orde interpolatiepolynoom in  $m$  levert

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a)f(m) + \int_a^b (x - m)f'(\xi(x)) dx$$

Hierin is  $x \mapsto (x - m)$  niet tekenvast op  $[a, b]$ , en is op grond van het voorafgaande  $f'$  een factor welke we liever niet tegenkomen.

Aannemende dat  $f \in C^2[a, b]$ , definiëren we daarom  $q \in P_1$  door  $q(m) = f(m)$  en  $q'(m) = f'(m)$ . Er geldt dan  $\int_a^b q(x) dx = (b - a)q(m) = (b - a)f(m)$ , en zo m.b.v. de representatie van  $f - q$  uit stelling 1.3.3,

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a)f(m) + \int_a^b (x - m)^2 \frac{f''(\xi(x))}{2} dx$$

Aangezien nu  $(x - m)^2$  wel tekenvast is, vinden we analoog aan stelling 4.1.1

$$\int_a^b f(x) dx - (b - a)f(m) = \frac{(b - a)^3}{24} f''(\xi) \quad (74)$$

voor zekere  $\xi \in [a, b]$ .

Voor de  $n$  keer gerepeteerde midpuntregel vindt men nu, met  $h = (b - a)/n$ ,  $m_i = a + (i + \frac{1}{2})h$ :

$$\int_a^b f(x) dx = h[f(m_0) + \dots + f(m_{n-1})] + R(h) \quad (75)$$

waarbij  $R(h) = \frac{b-a}{24}h^2 f''(\xi)$  voor een  $\xi \in [a, b]$ , en ook  $R(h) = \frac{h^2}{24}(f'(b) - f'(a)) + o(h^2)$ .

**4.3D Speciaal geval: de Simpson regel.** We kiezen nu als steunpunten  $x_0 = a$ ,  $x_1 = \frac{1}{2}(a+b) = m$ ,  $x_2 = b$ , en benaderen  $f$  met het tweedegraads interpolatiepolynoom op  $x_0, x_1, x_2$ . Voor het geval  $a = -1, b = 1$  hebben we de gewichten al uitgerekend in voorbeeld 4.3.2. Analoog vinden we, bijv. door exactheid te eisen voor  $f(x) = 1$ ,  $f(x) = x - x_1$ ,  $f(x) = (x - x_1)^2$  waarbij  $x_1 = (a + b)/2$ , als kwadratuurformule voor  $\int_a^b f(x) dx$  met willekeurige  $a$  en  $b$ :

$$\frac{b-a}{6}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]. \quad (76)$$

Dit is de zogenaamde *regel van Simpson*.

Stelling 4.3.1 laat zien dat Simpson exact is  $P_2$ . Nu geldt echter met  $\phi(x) = (x - x_1)^3$ :

$$\int_a^b \phi(x) dx = 0 \quad \text{en} \quad \frac{b-a}{6}[\phi(a) + 4\phi(x_1) + \phi(b)] = 0$$

zodat Simpson ook nog exact is voor deze speciale derdegraads functie, en dus voor iedere derdegraads functie.

Zij nu  $f \in C^4[a, b]$ . Analoog aan 4.3C, definiëren we  $q \in P_3$  door  $q(x_i) = f(x_i)$ ,  $i = 0, 1, 2$  en  $q'(x_1) = f'(x_1)$ . Omdat  $q$  een derdegraads polynoom is, geldt

$$\int_a^b q(x) dx = \sum_{i=0}^2 w_i q(x_i) = \sum_{i=0}^2 w_i f(x_i).$$

Stelling 1.3.3 levert dat

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b q(x) dx + \int_a^b (x - x_0)(x - x_1)^2(x - x_2) \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!} dx.$$

Aangezien  $(x - x_0)(x - x_1)^2(x - x_2)$  tekenvast is concluderen we dat

$$\int_a^b f(x) dx - \sum_{i=0}^2 w_i f(x_i) = -\frac{1}{90} \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi)$$

voor zekere  $\xi \in [a, b]$ .

Voor de  $n$  keer gerepeteerde Simpson regel vindt men nu met  $h = (b - a)/2n$ ,  $x_i = a + ih$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})] + R(h) \quad (77)$$

waarbij  $R(h) = -\frac{b-a}{180}h^4 f^{(4)}(\xi)$  voor een  $\xi \in [a, b]$ , en ook  $R(h) = -\frac{h^4}{180}(f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)) + o(h^4)$ .

**Opgave 4.3.1** Zij  $(T_{ij})_{i=0,1,2,\dots,j=0,1,2,\dots,i}$  het Romberg schema (zie (49)) ter benadering van  $\int_a^b f(x)dx$ , waarbij  $T_{i0}$  het resultaat is van de  $2^i \times$  gerepeteerde trapeziumregel bij een equidistante opdeling van  $[a, b]$  (Romberg rij).

- Ga na dat  $T_{i1}$  het resultaat is van de  $2^{i-1} \times$  gerepeteerde Simpson regel.
- Zie in dat  $T_{jj}$  van de vorm  $\sum_{k=0}^n w_k f(x_k)$  is met  $x_k$  verschillend in  $[a, b]$ . Wat is  $n$  als functie van  $j$ ?
- Tot op welke graad is  $T_{jj}$  exact? (gebruik (70) en realiseer dat voor  $f \in P_{2i-1}$  geldt  $f^{(2i-1)}(b) - f^{(2i-1)}(a) = 0$ ).
- Aannemende dat de  $w_k$ 's in b) ongelijk nul zijn, laat m.b.v. b), c) en stelling 4.3.2 zien dat voor  $j \geq 3$ ,  $T_{jj}$  geen interpolatoire kwadratuurformule voorstelt.

**4.3E Newton-Cotes formules.** Laat  $x_0, \dots, x_n$  equidistant in  $[a, b]$  liggen met  $x_0 = a$ ,  $x_n = b$ . De kwadratuurformules die ontstaan door integratie van het  $n$ -de orde interpolatiepolynoom  $p_n$  van  $f$  noemt men  $(n+1)$ -punts *Newton-Cotes formules*. Speciale gevallen: trapeziumregel ( $n=1$ ) en Simpson regel ( $n=2$ ). Voor de resttermen van deze formules geldt de volgende stelling (voor een bewijs zie bijvoorbeeld: E. Isaacson en H.B. Keller, Analysis of numerical methods, Wiley 1966):

**Stelling 4.3.3** Voor de restterm  $R_n$  van de  $(n+1)$ -punts *Newton-Cotes kwadratuurformule* voor het benaderen van  $\int_a^b f(x)dx$  geldt met  $h = \frac{b-a}{n}$ : als  $n$  even is en  $f \in C^{n+2}[a, b]$ , dan

$$R_n = C_n h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi), \quad (78)$$

$$C_n = \frac{1}{(n+2)!} \int_0^n t^2(t-1)(t-2) \cdots (t-n) dt; \quad (79)$$

als  $n$  oneven is en  $f \in C^{n+1}[a, b]$  dan

$$R_n = D_n h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi) \quad (80)$$

$$D_n = \frac{1}{(n+1)!} \int_0^n t(t-1) \cdots (t-n) dt. \quad (81)$$

□

**4.3F Transformatie van het integratie interval, repeteren en Romberg.** Wanneer men een kwadratuurformule heeft voor een zekere integratie interval dan kan men er daaruit een afleiden voor een ander integratie interval:

**Stelling 4.3.4** Zij  $\sum_0^n w_i f(x_i)$  een kwadratuurformule voor  $\int_a^b f(x)dx$ , en laat gelden

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_0^n w_i f(x_i) + \alpha(b-a)^{k+1} f^{(k)}(\xi), \quad \xi \in [a, b] \quad (82)$$

voor alle  $k \times$  continu differentiëerbare functies  $f$ . Dan geldt

$$\int_c^d g(y) dy = \frac{d-c}{b-a} \sum_0^n w_i g(y_i) + \alpha(d-c)^{k+1} g^{(k)}(\xi), \quad \xi \in [c, d] \quad (83)$$

met  $y_i = \frac{d-c}{b-a} x_i + \frac{bc-ad}{b-a}$ , voor alle  $k \times$  continu differentiëerbare functies  $g$ .

**Bewijs.** Substitueer  $y = \frac{d-c}{b-a}x + \frac{bc-ad}{b-a}$ . Dan geldt

$$\begin{aligned} \int_c^d g(y) dy &= \frac{d-c}{b-a} \int_a^b g\left[\frac{d-c}{b-a}x + \frac{bc-ad}{b-a}\right] dx = \\ &= \frac{d-c}{b-a} \sum_0^n w_i g(y_i) + \frac{d-c}{b-a} \alpha (b-a)^{k+1} \frac{d^k}{dx^k} g\left[\frac{d-c}{b-a}x + \frac{bc-ad}{b-a}\right] \Big|_{x=\xi} \end{aligned}$$

Hieruit volgt het gestelde. □

**Opmerking 4.3.1** (i) De stelling ziet er op het eerste gezicht wat afschrikwekkend uit. Er staat echter niets anders dan dat de punten  $y_i$  in  $[c, d]$  “gelijkvormig” liggen met de punten  $x_i$  in  $[a, b]$ , en dat de gewichten evenredig zijn met de lengte van het interval.

(ii) Neemt men in de stelling  $f = g$  dan ziet men dat bij verkorting van het integratie interval de fout bijzonder snel afneemt bij grote waarden van  $k$ .

Een belangrijke toepassing van stelling 4.3.4 is het ontwerpen van gerepeteerde kwadratuurformules. We zien hieruit dat als we met een kwadratuurformule als in (82) een  $n \times$  gerepeteerde formule maken, we daarvoor met  $h = (b-a)/n$  de volgende restterm krijgen

$$\alpha h^{k+1} \sum_{i=1}^n g^{(k)}(\xi_i) = \begin{cases} \alpha (b-a) h^k g^{(k)}(\xi), \\ \alpha h^k (g^{(k-1)}(b) - g^{(k-1)}(a)) + o(h^k). \end{cases}$$

Met dergelijke gerepeteerde formules geldt een theorie analoog aan die van de gerepeteerde trapeziumregel: men kan automatisch integreren, er bestaat een asymptotische ontwikkeling analoog aan de Euler-Maclaurin reeks, en men kan een Romberg schema vormen.

**4.3G Gauss formules.** We zagen dat de midpunt- en Simpson regel, en algemeen de  $(n+1)$ -punts Newton-Cotes formules met  $n$  even exact zijn op een graad welke één hoger is dan men op voorhand zou verwachten. In deze paragraaf onderzoeken wij dit verschijnsel in zijn algemeenheid.

**Stelling 4.3.5** Zij  $x_0, \dots, x_n$  verschillende punten in  $[a, b]$ . Definieer

$$q(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i) \in P_{n+1}.$$

Zij  $m > n$ . Dan is de interpolatoire kwadratuurformule behorend bij  $x_0, \dots, x_n$  exact op  $P_m$  dan en slechts dan als  $\int_a^b q(x)p(x) dx = 0$  voor alle  $p \in P_{m-n-1}$  (d.w.z. als  $q$  loodrecht staat op  $P_{m-n-1}$  t.o.v. het inproduct  $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx$  op  $C[a, b]$ ).

**Bewijs.** Zij  $p \in P_{m-n-1}$ . Dan is  $qp$  in  $P_m$ . Indien de kwadratuurformule exact is op  $P_m$ , dan volgt uit  $\sum_{i=0}^n w_i q(x_i)p(x_i) = 0$  dat  $\int_a^b q(x)p(x) dx = 0$ .

Omgekeerd zij  $f \in P_m$ . Schrijf  $f = pq + r$  voor zekere  $p \in P_{m-n-1}$  en  $r \in P_n$ . De existentie van dergelijke  $p$  en  $r$  wordt gegarandeerd door de zgn. Chinese reststelling, hetgeen niets anders is dan staartdeling met rest. Uit  $\int f = \int pq + \int r$ ,  $\int r = \sum w_i r(x_i)$

(immers  $r \in P_n$ ),  $r(x_i) = f(x_i)$  ( $\forall i$ ) en de veronderstelling  $\int pq = 0$  volgt nu  $\int f = \sum w_i f(x_i)$ .  $\square$

De polynomen corresponderend met de midpunt- en Simpson regel worden gegeven door respectievelijk  $q(x) = x - m$  en  $q(x) = (x - a)(x - m)(x - b)$ . Inderdaad geldt  $\int_a^b q(x) dx = 0$  terwijl  $\int_a^b q(x)x dx \neq 0$ , d.w.z. er wordt precies één extra orde van exactheid verkregen.

Een interessante vraag is hoe de steunpunten gekozen moeten worden opdat een zo hoog mogelijke graad van exactheid bereikt wordt. Uiteraard is er geen  $q \in P_{n+1}$  met  $\int q P_{n+1} = 0$  (immers  $\int q^2 > 0$ ), d.w.z. in stelling 4.3.5 is  $m - n - 1 < n + 1$  oftewel  $m < 2n + 2$ .

Definieer nu de rij  $(q_n)_{n \geq 0}$  van zgn. *Gauss-Legendre polynomen* recursief door

$$q_n = x^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x^n, q_k)}{(q_k, q_k)} q_k. \quad (84)$$

(De rij  $1, x, x^2, \dots$  mag vervangen worden door een willekeurige rij  $p_0, p_1, p_2, \dots$  z.d.d. voor alle  $n$ ,  $\{p_0, \dots, p_n\}$  een basis is van  $P_n$ )

**Opgave 4.3.2** a) Met  $P_{-1} := 0$ , bewijs met inductie dat

$$q_n \in P_n, \quad q_n - x^n \in P_{n-1}, \quad q_n \perp P_{n-1}, \quad (85)$$

en  $\text{span}\{q_0, \dots, q_n\} = P_n$ .

- b) Laat zien dat er slechts één  $q_n$  is welke aan (85) voldoet.
- c) Bewijs dat  $q_n$  precies  $n$  verschillende nulpunten heeft, alle in  $(a, b)$ . (Hint: Stel  $q_n$  heeft slechts  $k < n$  verschillende nulpunten  $x_1, \dots, x_k$ . Definieer  $p(x) = \prod_{i=1}^k (x - x_i)$  en leidt een tegenspraak af met (85)).
- d) Het zgn. *Gram-Schmidt orthogonalisatie proces* (84) is voor grote  $n$  gevoelig voor afrondfouten. Bewijs daarom met  $q_{-1} := 0$ , dat

$$q_{n+1} = \left( x - \frac{(xq_n, q_n)}{(q_n, q_n)} \right) q_n - \frac{(xq_n, q_{n-1})}{(q_{n-1}, q_{n-1})} q_{n-1},$$

hetgeen een efficiënte en stabiele berekeningswijze van deze orthogonale polynomen geeft. (Hint: Laat zien dat het rechterlid element is van  $P_{n+1}$ , leidende coëfficiënt gelijk aan 1 heeft, en loodrecht staat op  $P_{n-2}$ ,  $q_{n-1}$  en  $q_n$ ).

De interpolatoire kwadratuurformule behorend bij de nulpunten  $x_0, \dots, x_n$  van  $q_n$ , de zgn.  $(n + 1)$ -punts *Gauss* of *Gauss-Legendre formule*, is dus de unieke  $(n + 1)$ -punts formule welke exact is op de maximale graad  $2n + 1$ . Voor de restterm kan bewezen worden dat

$$R = \frac{(b - a)^{2n+3} ((n + 1)!)^4}{(2n + 3) ((2n + 2)!)^3} f^{(2n+2)}(\xi). \quad (86)$$

**Voorbeeld 4.3.3** In onderstaande tabel geven we de waarde van de restterm weer als men ter berekening van  $\int_0^\pi \sin(x) dx$  een zeker aantal punten investeert in gerepeteerde trapezium, gerepeteerde Simpson, diagonaal van het Romberg schema gebaseerd op de trapeziumregel met Romberg rij ( $h_0 = \pi$ ,  $\frac{1}{2}h_0$ ,  $\frac{1}{4}h_0$ ,  $\frac{1}{8}h_0$ ,  $\frac{1}{16}h_0, \dots$ ), diagonaal van