

Differentiaalvergelijkingen (deel 2)

Tekst over stelsels DVen: blz 2-12

Opgaven S1 t/m S8: blz 13-14

→ blz 15: diagram ←

Tweedimensionale lineaire systemen

Eigenwaarden en -vectoren

Om een lineair systeem van differentiaalvergelijkingen op te lossen, gaan we gebruik maken van eigenwaarden en eigenvectoren van de vierkante matrix A . Als λ een eigenwaarde is van de matrix A , en v is een eigenvector, dan moet het volgende gelden:

$$A \cdot v = \lambda \cdot v,$$

Eigenwaarden zijn de oplossingen λ die voldoen aan:

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

Waarbij I de identiteitsmatrix is. Voor een $n \times n$ -matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

geldt dan dus:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Dit levert een n -degraads polynoom van λ die n wortels heeft.

Bij elke eigenwaarde λ_i hoort een eigenvector v_i . Deze eigenvectoren worden op de volgende manier berekend:

$$(A - \lambda_i I) \cdot v_i = 0.$$

Eéndimensionale lineaire differentiaalvergelijkingen

Om een lineair systeem van meerdere differentiaalvergelijkingen op te lossen, kijken we eerst naar het eenvoudigere geval $\dot{x} = ax$. Dit is om te schrijven naar

$$\frac{dx}{dt} = ax \Rightarrow \frac{1}{x} \cdot dx = a \cdot dt.$$

Kies $x_0 = x(0)$, en $x_t = x(t)$.

Nu kunnen we aan beide kanten integreren:

$$\int_{x_0}^{x_t} \frac{1}{x} dx = \int_0^t a \cdot dt \Rightarrow \ln x|_{x_0}^{x_t} = a \cdot t|_0^t$$

$$\Rightarrow \ln x_t - \ln x_0 = a \cdot t \Rightarrow \ln \frac{x_t}{x_0} = a \cdot t$$

$$\Rightarrow \frac{x_t}{x_0} = e^{a \cdot t} \Rightarrow x_t = x_0 \cdot e^{a \cdot t}$$

Een oplossing van dit systeem heeft dus de vorm $x(t) = x_0 \cdot e^{a \cdot t}$.

Twee-dimensionaal ($n=2$)

We zoeken nu naar oplossingen voor het tweedimensionale systeem die de vorm

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

hebben. Als er twee lineair onafhankelijke oplossingen

$$\begin{cases} x = x_1(t) \\ y = y_1(t) \end{cases} \text{ en } \begin{cases} x = x_2(t) \\ y = y_2(t) \end{cases}$$

zijn, dan geldt

$$\begin{cases} x = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \\ y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \end{cases}.$$

Hierbij zijn c_1 en c_2 gegeven door de initiële conditie. Er moet dus een oplossing zijn voor

$$\begin{cases} c_1 x_1(t_0) + c_2 x_2(t_0) = x_0 \\ c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) = y_0 \end{cases}$$

voor elke initiële conditie (x_0, y_0) . Dit systeem is alleen op te lossen als de determinant

$$\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Omdat de oplossingen

$$\begin{cases} x = x_1(t) \\ y = y_1(t) \end{cases} \text{ en } \begin{cases} x = x_2(t) \\ y = y_2(t) \end{cases}$$

lineair onafhankelijk zijn, zal de determinant ongelijk zijn aan nul, en bestaat er dus een oplossing.

Als de initiële conditie op één van de eigenvectoren ligt, zal x' ook op die eigenvector blijven.

Stel λ_1 en λ_2 zijn de eigenwaarden van matrix A , en v_1 en v_2 de eigenvectoren. Dan geldt

$$\begin{cases} x'_1 = A \cdot v_1 = \lambda_1 \cdot v_1 \\ x'_2 = A \cdot v_2 = \lambda_2 \cdot v_2 \end{cases}$$

dus

$$\begin{cases} x_1(t) = v_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \\ x_2(t) = v_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \end{cases} \\ \Rightarrow x(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot v_1 + c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot v_2.$$

Voorbeeld

Laten we kijken naar het systeem:

$$\begin{cases} x' = 3x + 2y \\ y' = -2x - 2y \end{cases},$$
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

We gaan op zoek naar λ 's die voldoen aan:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ -2 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (3 - \lambda)(-2 - \lambda) - 2 \cdot (-2) = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0.$$

Dit levert de eigenwaarden $\lambda_1 = 2$ en $\lambda_2 = -1$.

De eigenvector $v_1 = (x, y)$ die bij de eigenwaarde $\lambda_1 = 2$ hoort moet voldoen aan

$$(A - \lambda_1 I) \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ -2x - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De eigenvector $v_2 = (x, y)$ die bij de eigenwaarde $\lambda_2 = -1$ hoort moet voldoen aan

$$(A - \lambda_2 I) \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ -2x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Twee eigenvectoren die voldoen zijn dus $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, en $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

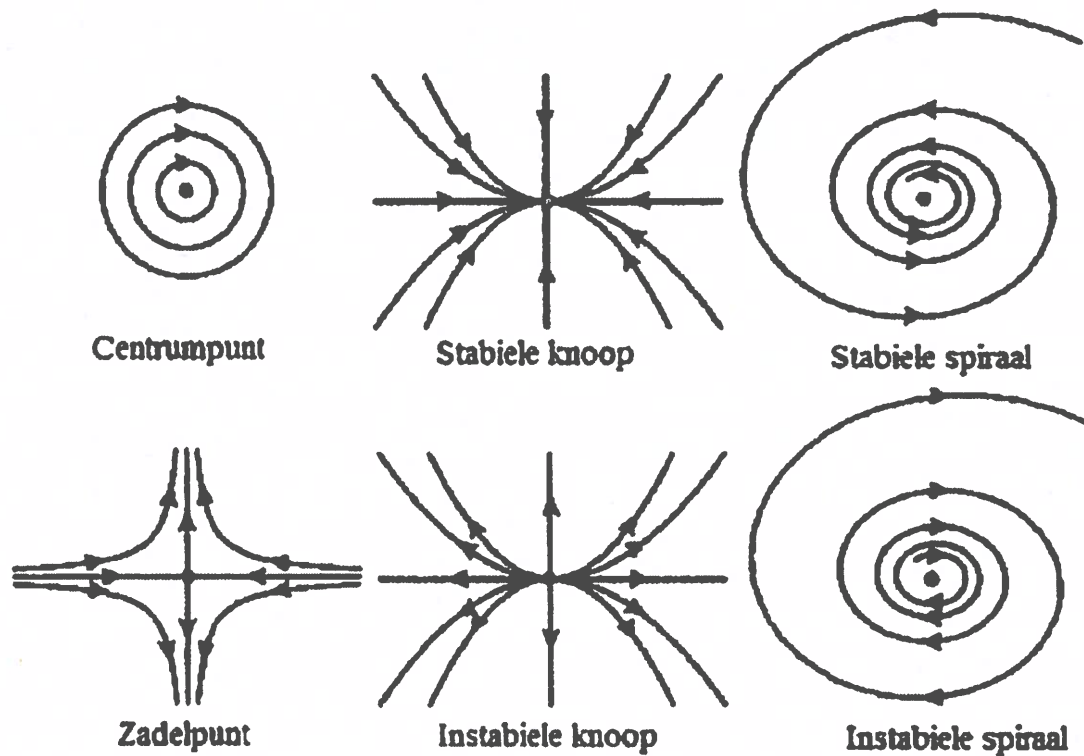
De oplossing van het systeem wordt nu gegeven door:

$$\begin{cases} x(t) = 2c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} \\ y(t) = -c_1 e^{2t} - 2c_2 e^{-t} \end{cases}.$$

In feite: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t) = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}.$

Kritieke punten

Het bovenstaande voorbeeld geeft een van de mogelijke oplossingen van een lineair systeem van differentiaalvergelijkingen. In zo'n stelsel zien we dat het enige kritieke punt $(0,0)$ is. Het stelsel is immers lineair. Er zijn vier verschillende kritieke punten die kunnen voorkomen. Hierbij kunnen de knoop en de spiraal stabiel of onstabiel zijn, de oplossing beweegt zich dan respectievelijk naar de oorsprong of van de oorsprong af.



De figuur die de oplossing geeft, verhoudt zich op een bepaalde manier ten opzichte van de eigenwaarden van de matrix A . Als de eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, kunnen we 5 verschillende gevallen onderscheiden:

$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	geval (1)
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$	geval (2)
$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	geval (3)
$\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$	geval (4)
$\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$	geval (5)

Merk op dat het omkeren van het teken van de eigenwaarden, alleen de richting van de pijlen omdraait, de gevallen (1) en (3) zullen dus min of meer aan elkaar gelijk zijn. Hierbinnen kunnen we nog onderscheid maken tussen de gevallen $\lambda_1 = \lambda_2$ en $\lambda_1 < \lambda_2$.

Voor het stelsel

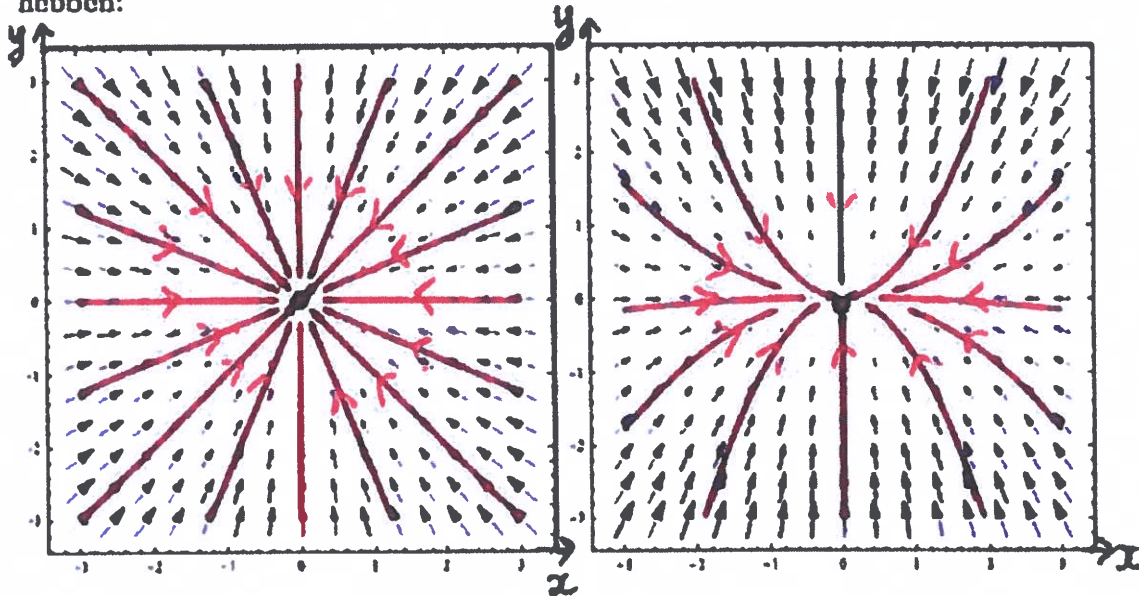
$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}, A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

vinden we de eigenwaarden $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Voor het stelsel

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -2y \end{cases}, A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

vinden we de eigenwaarden $\mu_1 = -2, \mu_2 = -1$.

Wanneer we de faseplaatjes tekenen, zien we dat deze de vorm van een knoop hebben:



Figuur 1: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1 < 0, (1)$

geval

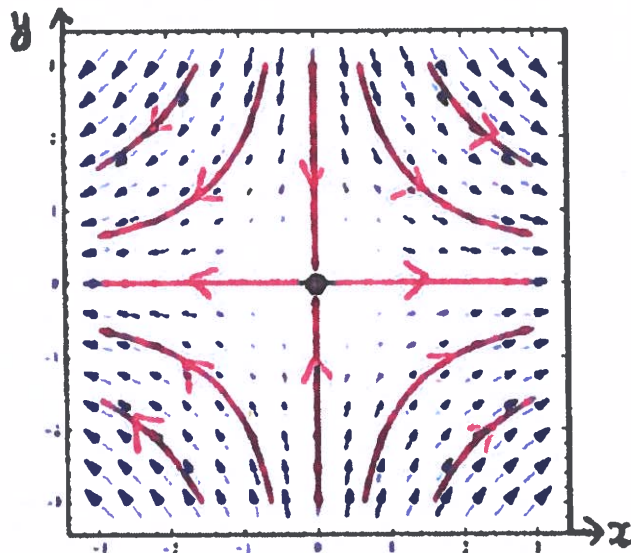
Figuur 2: $\mu_1 = -2 < \mu_2 = -1 < 0, (1)$

geval

Voor het stelsel

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

vinden we de eigenwaarden $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$. Het faseplaatje dat hierbij hoort, heeft de vorm van een zadelpunt:



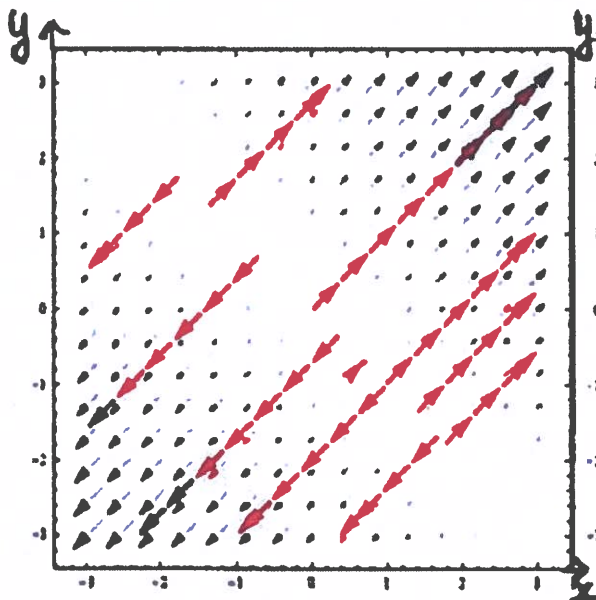
Figuur 3: $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0, (2)$

geval

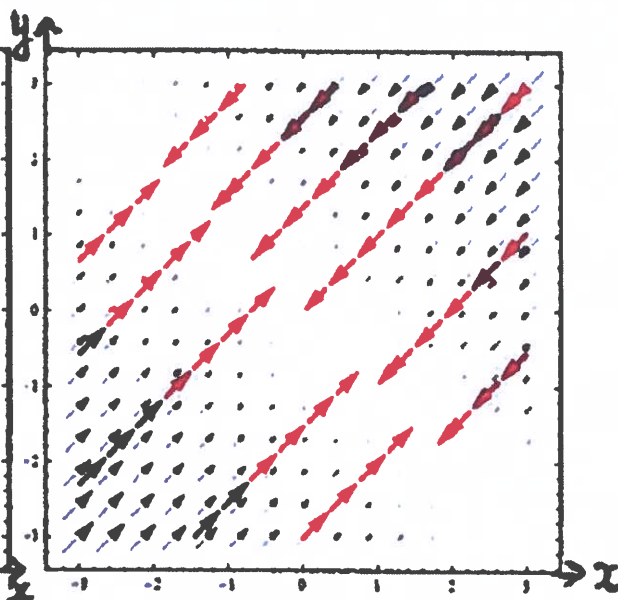
Een stelsel differentiaalvergelijkingen waarbij één van de eigenwaarden gelijk is aan nul, wordt gegeven door

$$\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = x + y \end{cases}, A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bij dit stelsel horen de eigenwaarden $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$. We zien dat het kritieke punt in dit geval geen punt, maar een lijn is:



Figuur 4: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0$ (4)



Figuur 5: $\mu_1 = -2, \mu_2 = 0$ (5)

Omdat de eigenwaarden van een 2×2 -matrix worden gevonden door het oplossen van een tweedegraads vergelijking, kunnen de eigenwaarden ook niet-reëel zijn. Dan hebben de eigenwaarden de vorm $\lambda_1 = a + bi, \lambda_2 = a - bi$. Bij de complexe eigenwaarden is er echter een verschil in de volgorde waarin we de eigenwaarden vinden. We zullen dit laten zien aan de hand van een voorbeeld.

Er zijn zes verschillende gevallen te onderscheiden, namelijk:

$a, b > 0$	geval (6)
$a > 0, b < 0$	geval (7)
$a < 0, b > 0$	geval (8)
$a, b < 0$	geval (9)
$a = 0, b > 0$	geval (10)
$a = 0, b < 0$	geval (11)

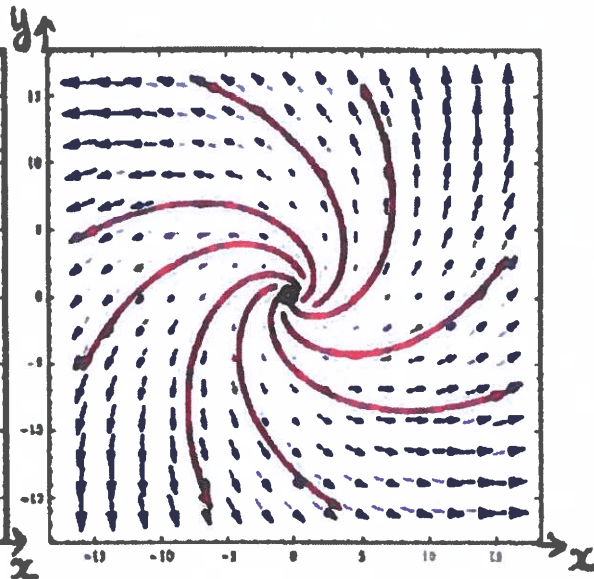
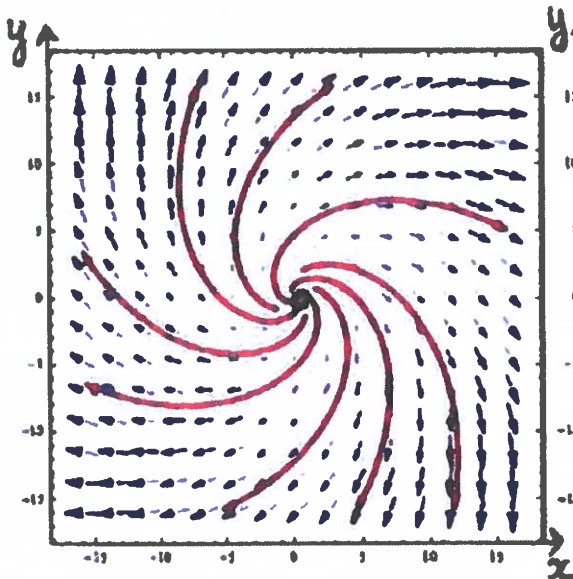
Hier geldt weer dat geval (6) vrijwel gelijk is aan geval (8), en geval (7) aan (9), met uitzondering van de richting van de pijlen. Voor het stelsel

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + y \end{cases}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

vinden we de complexe eigenwaarden $\lambda_1 = 1 + i, \lambda_2 = 1 - i$. Voor het stelsel

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases}, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

zijn de complexe eigenwaarden $\mu_1 = 1 - i$, $\mu_2 = 1 + i$. De faseplaatjes zien er dan zo uit:



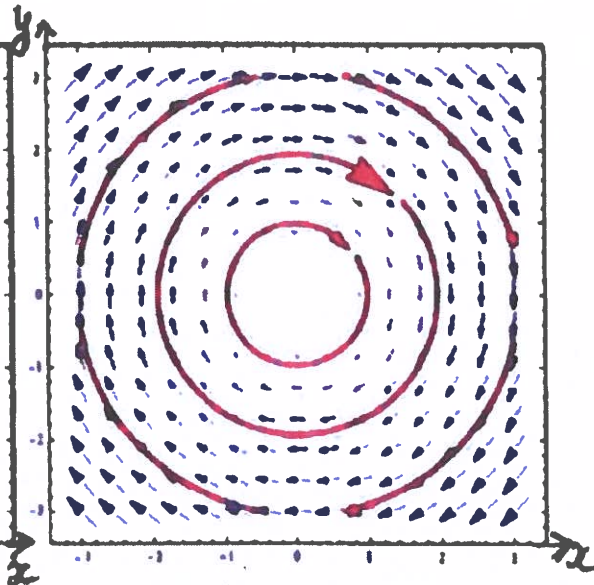
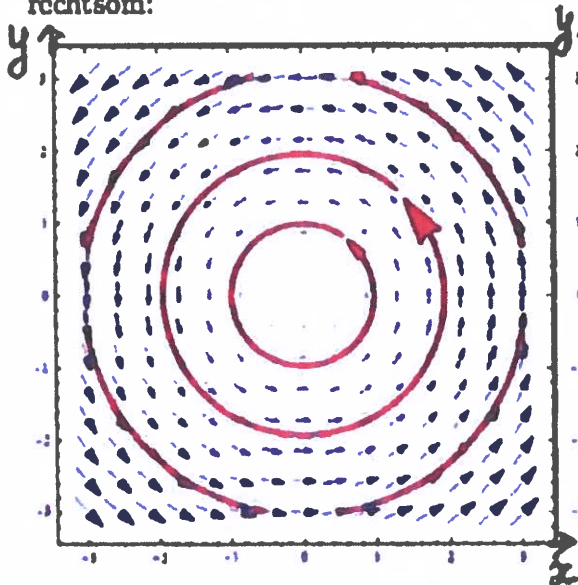
Figuur 6: $\lambda_1 = 1 + i$, $\lambda_2 = 1 - i$ (7)

Figuur 7: $\mu_1 = 1 - i$, $\mu_2 = 1 + i$ (8)

Als laatste de speciale stelsels

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}, A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bij het eerste stelsel horen de eigenwaarden $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$ en bij het tweede $\mu_1 = -i$, $\mu_2 = i$, α is hier dus gelijk aan 0. De faseplaatjes hebben de vorm van een centrum, waarbij het eerste stelsel linksom draait, en het tweede rechtsom:



Figuur 8: $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$ (10)

Figuur 9: $\mu_1 = -i$, $\mu_2 = i$ (11)

Lineaire benadering van niet-lineaire systemen

Een niet-lineair systeem van differentiaalvergelijkingen is vaak moeilijk op te lossen. Wanneer we echter kijken naar de kritieke punten, zien we dat deze goed te benaderen zijn door lineaire systemen die we wel op kunnen lossen. Op deze manier kunnen we de kritieke punten toch analyseren, en iets zeggen over het gedrag van het systeem. Als we in het algemeen kijken naar niet-lineaire systemen $x' = f(x)$, en $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ is differentieerbaar in een punt a , dan kunnen we f benaderen in a met een linearisatie $L(x)$. Dan geldt:

$$f(x) \approx L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = f(a) + f_{x_1}(a_1)(x_1 - a_1) + f_{x_2}(a_2)(x_2 - a_2) + \dots + f_{x_n}(a_n)(x_n - a_n),$$

Tweedimensionale niet-lineaire systemen

Laten we kijken naar het systeem

$$\begin{cases} x' = -x^3 + y \\ y' = x - y^3 \end{cases}$$

De kritieke punten vinden we door beide vergelijkingen gelijk te stellen aan 0, dus:

$$-x^3 + y = 0 \quad x - y^3 = 0$$

$$\Rightarrow x^3 = y, \quad y^3 = x$$

$$\Rightarrow y^9 = y, \text{ dus } y = 1, y = -1 \text{ of } y = 0.$$

Dan vinden we de punten $(1, 1)$, $(-1, -1)$ en $(0, 0)$. We kijken eerst naar het punt $(0, 0)$:

In de buurt van $(0, 0)$ zijn x^3 en y^3 verwaarloosbaar klein. Op die manier kunnen we dit systeem benaderen met het lineaire systeem:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

wat te schrijven is als $x' = Ax$ met

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

korte notatie: $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$
 $g_x = \frac{\partial g}{\partial x}, g_y = \frac{\partial g}{\partial y}$

Deze matrix heeft eigenwaarden $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = -1$. Omdat de eigenwaarden reëel zijn, en een tegengesteld teken hebben, weten we uit hoofdstuk 9 dat dit kritieke punt een zadelpunt zal zijn.

Een ander evenwichtspunt bevindt zich in $(1, 1)$. We willen $x' = f(x, y) = -x^3 + y$ en $y' = g(x, y) = x - y^3$ benaderen in $(1, 1)$. Merk op dat

$$f_x(x, y) = -3x^2, \quad f_y(x, y) = 1$$

dus

$$f_x(1, 1) = -3 \text{ en } f_y(1, 1) = 1.$$

$J = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} !$
Jacobian

Hetzelfde kunnen we doen voor $g(x, y)$:

$$g_x(x, y) = 1, \quad f_y(x, y) = -3y^2$$

dus $g_x(1, 1) = 1$ en $g_y(1, 1) = -3$.

Voor de linearisatie geldt nu:

$$f(x, y) \approx f(1, 1) + f_x(1, 1)(x - 1) + f_y(1, 1)(y - 1) = 0 - 3(x - 1) + (y - 1) = -3(x - 1) + 1(y - 1)$$

$$g(x, y) \approx g(1, 1) + g_x(1, 1)(x - 1) + g_y(1, 1)(y - 1) = 0 + (x - 1) - 3(y - 1) = 1(x - 1) - 3(y - 1).$$

Dit levert het stelsel:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

We hebben het systeem benaderd door het in de lineaire vorm $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ te schrijven. De eigenwaarden van de matrix $\mathbf{A}$ worden gegeven door $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -4$. Beide eigenwaarden zijn kleiner dan nul, dus we zien dat we te maken hebben met een stabiele knoop.

Het laatste evenwichtspunt bevindt zich in $(-1, -1)$.

$$f_x(-1, -1) = -3 \text{ en } f_y(-1, -1) = 1 \\ g_x(-1, -1) = 1 \text{ en } g_y(-1, -1) = -3.$$

De benadering in $(-1, -1)$ is dan

$$f(x, y) \approx f(-1, -1) + f_x(-1, -1)(x + 1) + f_y(-1, -1)(y + 1) = 0 - 3(x + 1) + (y + 1) = -3(x + 1) + 1(y + 1)$$

$$g(x, y) \approx g(-1, -1) + g_x(-1, -1)(x + 1) + g_y(-1, -1)(y + 1) = 0 + (x + 1) - 3(y + 1) = 1(x + 1) - 3(y + 1).$$

Dit levert het stelsel:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + 1 \\ y + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

De eigenwaarden van de matrix $\mathbf{A}$ zijn hier dus gelijk aan die in het punt $(1, 1)$, namelijk: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -4$. Het punt $(-1, -1)$ zal dus ook een stabiele knoop zijn.

Wanneer we het faseplaatje proberen te schetsen, kunnen we de richtingscoëfficiënt gebruiken door te achterhalen waar deze gelijk is aan 0, en waar gelijk aan ∞ .

$$\begin{cases} x' = f(x, y) = -x^3 + y \\ y' = g(x, y) = x - y^3 \end{cases}$$

De richtingscoëfficiënt wordt nu gegeven door $\frac{dy}{dx}$, dus:

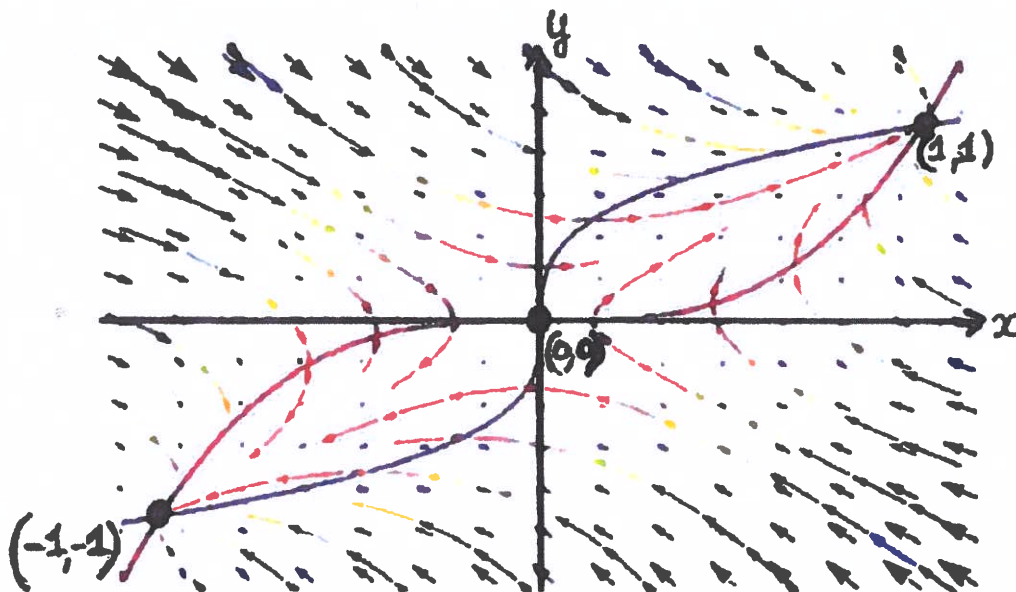
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y^3}{-x^3 + y}$$

Op de x -as $(y=0)$ zal de richtingscoëfficiënt gelijk zijn aan $\frac{x}{-x^3} = -\frac{1}{x^2}$, en op de y -as $(x=0)$ $\frac{y^3}{-y} = -y^2$.

De helling is gelijk aan ∞ als $\frac{-x^3 + y}{x - y^3} = 0$, dus als $-x^3 + y = 0$.

De richtingscoëfficiënt is dus ∞ als $y = x^3$.

De helling $\frac{dy}{dx} = 0$ als $x - y^3 = 0$, dus op de lijn $x = y^3$. Met deze informatie kunnen we het faseplaatje schetsen:



Figuur 11: Zadelpunt in $(0,0)$, twee stabiele knopen in $(1,1)$ en $(-1,-1)$

We zien dat op $x = y^3$ (blauw) de helling steeds gelijk is aan 0, terwijl op $y = x^3$ (rood) de helling steeds gelijk is aan ∞ .

Van der Pol vergelijking

Een toepassing van deze tweedimensionale niet-lineaire systemen zien we in de vergelijking van Van der Pol:

$$x'' - \epsilon(1 - x^2)x' + x = 0.$$

Deze vergelijking beschrijft de uiteindelijke beweging van een oscillator met niet-lineaire demping. We kunnen dit tweede-orde systeem omschrijven naar een eerste-orde systeem door de substitutie $y = x - \frac{x^3}{3} - \frac{x'}{\epsilon}$. Dan geldt:

$$\frac{x'}{\epsilon} = x - \frac{x^3}{3} - y$$

$$x' = \epsilon(x - \frac{x^3}{3} - y) \circ$$

Voor y' geldt:

$$y' = x' - x^2 x' - \frac{x''}{\epsilon} = x'(1 - x^2) - \frac{x''}{\epsilon} \circ$$

We weten x'' uit van der Pol vergelijking:

$$x'' = \epsilon(1 - x^2)x' - x$$

$$\Rightarrow y' = x'(1 - x^2) - ((1 - x^2)x' - x - \frac{x}{\epsilon}) = \frac{x}{\epsilon} \circ$$

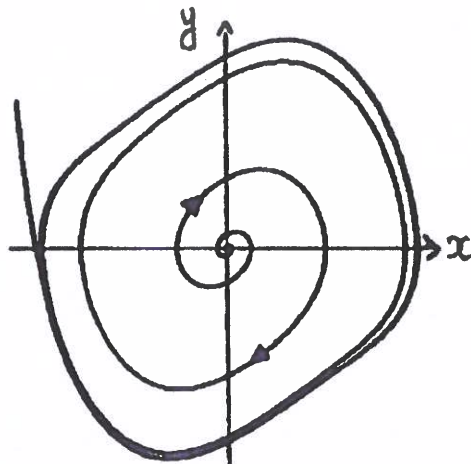
Het evenwichtspunt van dit systeem bevindt zich in $(0,0)$. We kunnen in dit punt een lineaire benadering geven doordat de term $-\frac{x^3}{3}$ verwaarloosbaar klein is in $(0,0)$:

$$\begin{cases} x' = \epsilon(x - y) \\ y' = \frac{x}{\epsilon} \end{cases} \circ$$

Wanneer we voor $\epsilon = 1/2$ nemen, krijgen we de matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \circ$$

met de eigenwaarden $\lambda_1 = \frac{1}{4}(1 + i\sqrt{15})$, $\lambda_2 = \frac{1}{4}(1 - i\sqrt{15})$. We zien dat het reële deel van de complexe eigenwaarden groter dan nul is. Daaruit kunnen we concluderen dat dit systeem rond het evenwichtspunt $(0,0)$ een instabiele spiraal zal worden.



Figuur 12: Een oplossing van Van der Pol vergelijking met $\epsilon = 1/2$.

Opgaven over stelsels DVen

Opgave S1

Vind een algemene oplossing van het stelsel DVen:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}.$$

Opgave S2

Als vraag S1, maar dan voor:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}.$$

Opgave S3

Los het stelsel lineaire DVen uit opgave S2 op met de beginvoorwaarden:

$$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Opgave S4

Bepaal het type en de stabiliteit van het kritieke punt, vind een algemene oplossing en schets enkele banen in het fasevlak van de stelsels:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{x},$$

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x},$$

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \vec{x},$$

en

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}.$$

Opgave S5

Los op:

$$x'' + \frac{1}{9}x = 0,$$

(hint: schrijf de DV als een stelsel 1e orde DVen)
en teken enkele banen (oplossingen) in het fasevlak.

Idem voor de DV: $x'' + a x = 0$ (a een constante). Maak hierbij onderscheid tussen $a < 0$, $a = 0$ en $a > 0$.

Opgave S6

Laat zien dat $(0,0)$ en $(1,0)$ kritieke punten zijn voor de DV:

$$x'' - x + x^2 = 0.$$

Bepaal het type van deze twee punten en hun (lineaire) stabiliteit (aantrekkend of afstotend).

Opgave S7

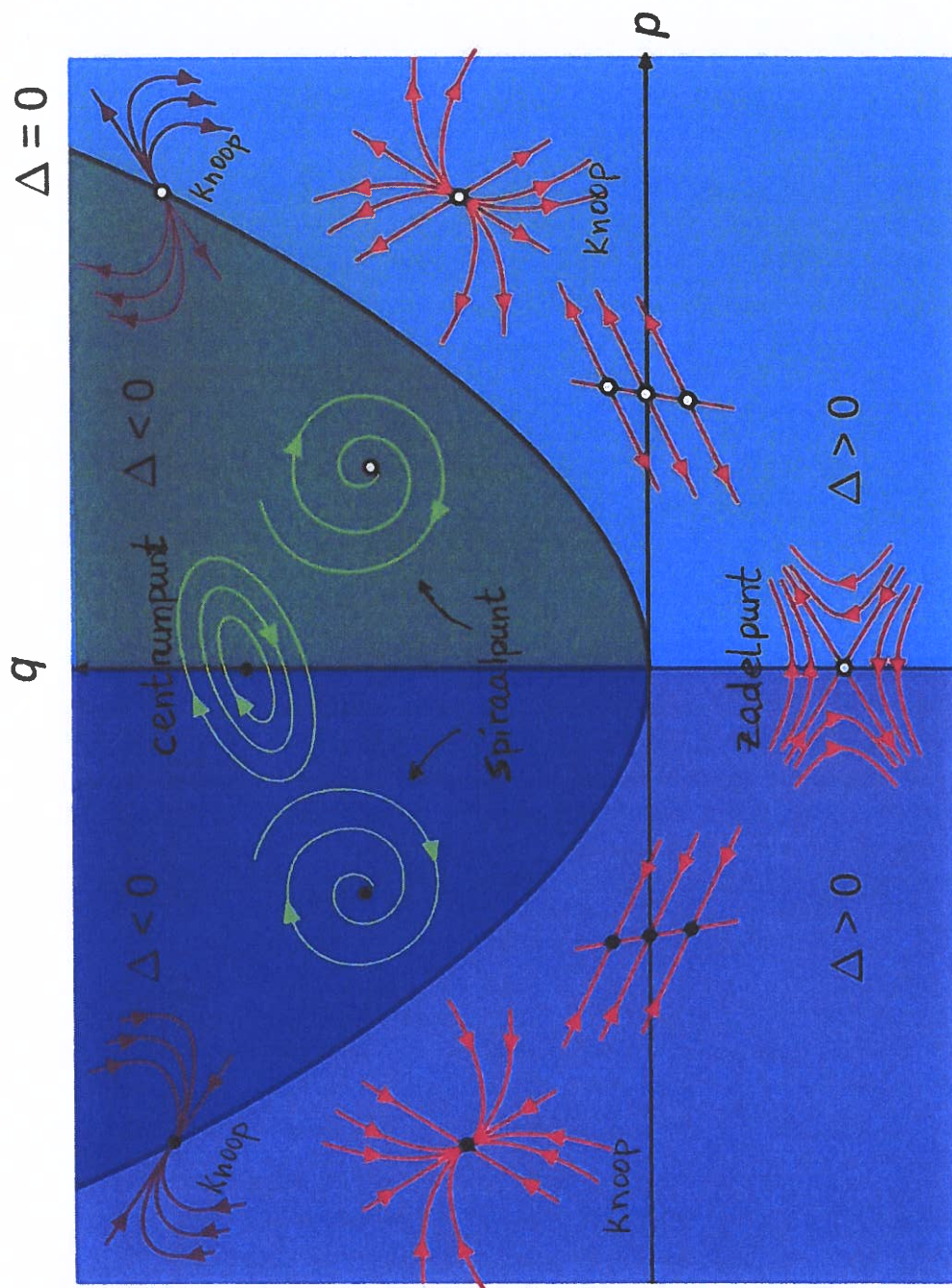
Bepaal voor de volgende DVen de kritieke punten en het type. Gebruik hiervoor een linearisatie van het bijbehorende systeem van 1e orde DVen:

- a) $x'' + x + x^2 = 0$
- b) $x'' + x - \frac{1}{2}x^2 = 0$
- c) $x'' + x - x^3 = 0$
- d) $x'' - 9x + x^3 = 0$
- e) $x'' + 4x - 5x^3 + x^5 = 0$
- f) $x'' + \cos(x) = 0.$

Opgave S8

Schets voor enkele DVen (zie opgaven **S6** en **S7**) het faseplaatje met daarin de kritieke punten en enkele karakteristieke oplossingskrommen. Vergeet niet de 'pijlen' op de krommen!

EXTRA



$$\begin{aligned}
 p &= A + D = \text{spoor} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \lambda_1 + \lambda_2 \\
 q &= AD - BC = \det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \\
 \Delta &= p^2 - 4q \quad (\text{"Discriminant"})
 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + By \\ \frac{dy}{dt} = Cx + Dy \end{cases}$$