Rijen, eindige reeksen en oneindige reeksen

Rij : een <u>geordende</u> verzameling van termen

<u>vb 1</u> de <u>getallenrij</u>: $\begin{matrix} 2, & 4, & 6, & 8, & \cdots \\ \| & \| & \| & \| & \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & \cdots \end{matrix}$

met <u>formule</u>: $\begin{cases} u_k = 2k \\ k = 1,2,3,\cdots \end{cases}$ (<u>index</u>)

is oplossing van de <u>recursie</u>: $\begin{cases} u_{k+1} = u_k + 2, \; k = 1,2,\cdots \\ u_1 = 2 \end{cases}$

voorbeeld van een <u>rekenkundige rij</u> ("arithmetic progression")

Algemene formules: $\left\{ \begin{array}{l} a, a+d, a+2d, a+3d, \cdots \\ \begin{cases} u_{k+1} = u_k + d, \; k = 1,2,\cdots \\ u_1 = a \end{cases} \\ u_k = a + (k-1)d, \; k = 1,2,\cdots \end{array} \right.$

a en d zijn parameters

<u>vb 2</u> een <u>meetkundige rij</u> ("geometric progression")

$$\left\{ \begin{array}{l} a, ax, ax^2, ax^3, \cdots \\ \begin{cases} u_{k+1} = x \cdot u_k, \; k = 1,2,\cdots \\ u_1 = a \end{cases} \\ u_k = a x^{k-1}, \; k = 1,2,\cdots \end{array} \right.$$

a en x zijn parameters

getallenvoorbeelden :

* $0, 6, 12, 18, 24, \ldots$ rekenkundige rij

$$\begin{cases} u_{k+1} = u_k + 6, & k = 1, 2, \ldots \\ u_1 = 0 \end{cases}$$ met $a = 0$ en $d = 6$

(twee terms recursie; 1 startwaarde)

* $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$ meetkundige rij

$u_{k+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^k, \; k = 0, 1, 2, \ldots$ met $a = 1$ en $x = \frac{1}{3}$

* $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ harmonische rij

$u_k = \frac{1}{k}, \; k = 1, 2, \ldots$

* $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ Fibonacci rij

$$\begin{cases} u_{k+2} = u_{k+1} + u_k, & k = 0, 1, 2, \ldots \\ u_0 = 1, \; u_1 = 1 \end{cases}$$ (drieterms recursie; 2 startwaarden)

limieten van rijen

vb 1 harmonische rij $\left\{\frac{1}{k}\right\}_{k \geq 1} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$

voor $k \to \infty$: rij $\to 0$

$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} = 0$

een eindig getal en uniek

vb 2 $\left\{\frac{k-1}{k}\right\}_{k \geq 2} = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$

voor $k \to \infty$: rij $\to 1$; n.l. $\lim_{k \to \infty} \frac{k-1}{k} = \lim_{k \to \infty} 1 - \frac{1}{k} = 1$

"De rij convergeert naar een limietwaarde" ook eindig èn uniek

Als een rij een limiet heeft die <u>niet eindig</u> is (dus $=\infty$), of niet uniek is, dan heet de rij <u>divergent</u>

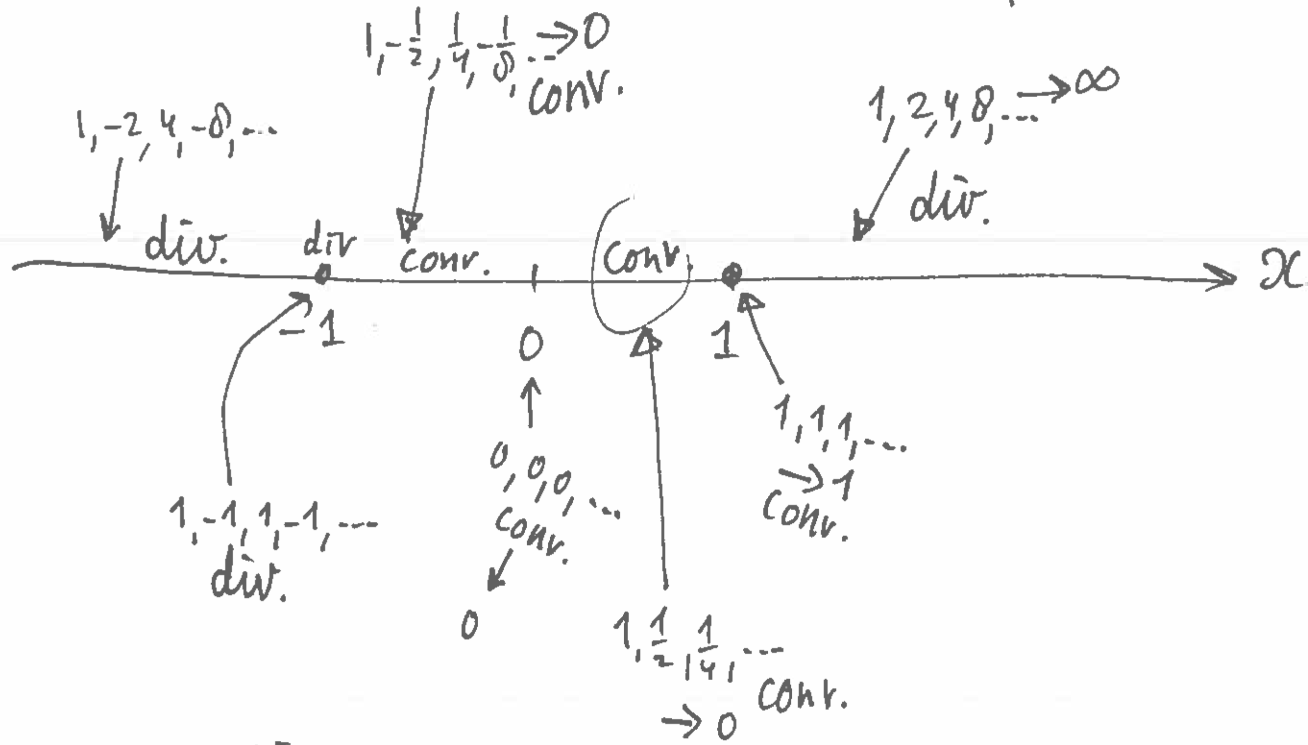
<u>vb 3</u> rekenkundige rij: $\lim_{k\to\infty} (a + d(k-1)) = \infty$

<u>divergent</u>

(onafhankelijk van a en d $\neq 0$)

<u>vb 4</u> meetkundige rij met $a = 1$: $u_k = x^{k-1}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

(x is een parameter)



<u>convergentie of divergentie kan afhangen van een parameter</u>

<u>vb5</u> $u_k = \dfrac{k-3}{3k}$, $k = 1, 2, \ldots$ $(k \neq 0\,!)$

$$= \frac{1}{3} - \frac{3}{k} \to \frac{1}{3} \text{ voor } k \to \infty$$

$$\lim_{k\to\infty} u_k = \frac{1}{3}$$ convergent

vb 6 $u_k = \dfrac{4k^2-10k+25}{k^2-3k+6}$, $k=1,2,\dots$

$$= \frac{4-\frac{10}{k}+\frac{25}{k^2}}{1-\frac{3}{k}+\frac{6}{k^2}} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{4-0+0}{1-0+0} = 4$$

convergent

---

vb 7 $u_k = 3.\sin\left(\frac{1}{k}\right)$, $k=1,2,\dots$

$k\to\infty \Rightarrow \frac{1}{k}\to 0$ en $\sin\left(\frac{1}{k}\right)\to\sin(0)=0$

$\lim\limits_{k\to\infty} u_k = 0$ convergent

---

vb 8 Fibonacci rij : $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = \infty$ divergent

echter: $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{u_{k+1}}{u_k} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ "de gulden snede"

convergent

$$\varphi \leftarrow \frac{u_{k+2}}{u_{k+1}} = \frac{u_{k+1}+u_k}{u_{k+1}} = 1+\frac{u_k}{u_{k+1}} \longrightarrow 1+\frac{1}{\varphi}$$

$\boxed{\text{NB}}$ $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = \lim\limits_{k\to\infty} u_{k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} u_{k-4} = \lim\limits_{k\to\infty} u_{k+6} = \dots$ etcetera

Noem $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{u_{k+2}}{u_{k+1}} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{u_{k+1}}{u_k} = \varphi$

$\Rightarrow \varphi = 1+\dfrac{1}{\varphi}$

$\varphi^2-\varphi-1=0 \Rightarrow \varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\boxed{\text{Eindige reeksen}}$

gegeven een rij getallen $u_1, u_2, u_3, \ldots = \{u_k\}_{k \geq 1}$

bekijk deelsommen: $S_1 = u_1$

$$S_2 = u_1 + u_2$$

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3$$

$$\vdots$$

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n \overset{\text{notatie}}{=} \sum_{k=1}^{n} u_k$$

$S_1, S_2, S_3, \ldots = \{S_k\}_{k \geq 1}$ een nieuwe rij getallen } een reeks

$$\begin{cases} S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} u_k \right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k \\ \text{Deze limiet bestaat ?} \end{cases}$$

eindige reeks : $u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ ← eindig

oneindige reeks : $u_1 + u_2 + \cdots = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = \; ?$ eindig ?

De rekenkundige reeks : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (a + (k-1)d)$

$$= a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + a + (n-1)d$$

volgorde omdraaien

$$= a + (n-1)d + \cdots + (a+d) + a \qquad +$$

$$2S_n = \underbrace{[2a + (n-1)d] + [2a + (n-1)d] + \cdots + [2a + (n-1)d]}_{n \text{ keer hetzelfde}}$$

$$\Rightarrow \quad 2S_n = n\left[2a+(n-1)d\right]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{S_n = \frac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right]}$$

<u>vb</u> $\quad a=d=1: \; S_n = \sum_{k=1}^{n}\left[1+(k-1)\right] = \sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\dots+n$

$$= \frac{n}{2}\left[2+(n-1)\right]$$

$$= \frac{1}{2}n(n+1)$$

$\rightsquigarrow \; 1+2+\dots+10^{99} = \frac{1}{2}10^{99}(10^{99}+1) = \dots$

De <u>meetkundige reeks</u>:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} ax^k = ax^0+ax^1+\dots+ax^{n-1}$$

$$= a+ax+\dots+ax^{n-1}$$

vermenigvuldig met x:

$$xS_n = ax+ax^2+\dots+ax^n$$

Trek de 2e formule van de 1e af:

$$S_n - xS_n = (1-x)S_n = a + (ax-ax) + (ax^2-ax^2)+\dots$$

$$\dots + (ax^{n-1}-ax^{n-1}) + (0-ax^n)$$

$$= a - ax^n = a(1-x^n)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{S_n = a.\frac{1-x^n}{1-x}} \; x \neq 1 \qquad x=1: \; S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a = \underbrace{a+a+\dots+a}_{n \text{ keer}} = n.a$$

Het binomium van Newton

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$$

$$(1+x)^3 = (1+x)(1+x)^2 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$

$$(1+x)^4 = \;---\; = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$$

etcetera

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + --- + x^n$$

De algemene term bij x^k: $\underbrace{\frac{n(n-1)(n-2)--(n-k+1)}{k!}}$ x^k

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

notatie "n over k"

binomiaal coëfficiënt

Dwz $\boxed{(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k}$

"faculteit":

$0! = 1$

$1! = 1$

$2! = 2.1 = 2$

$3! = 3.2.1 = 6$

$4! = 4.3.2.1 = 24$

etcetera

$k! = k(k-1)(k-2)\,---\,3.2.1$

Speciaal "truc"

vb $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$

Schrijf $\displaystyle\frac{1}{k(k+1)}$ als $\displaystyle\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ $\quad$ (check: $\displaystyle\frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$)

en $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

bijna alles valt weg!

, dus $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

---

soortgelijk: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 \overset{}{\underset{\text{blijkt}}{=}} \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

Oneindige reeksen

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \ ?$ $\quad$ Noem deze S

∞ ?, eindig ?, uniek ?

De meetkundige reeks

eindig: $S_n = 1 + x + \dots + x^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \dfrac{1-x^n}{1-x}$ $(x \neq 1)$

oneindig: als $x = 1$: $1 + 1 + \dots + 1 + \dots = \infty$ (divergent)

$$\frac{1-x^n}{1-x} \text{ voor } n \to \infty : \begin{cases} \text{als } |x| < 1, \text{ dan } x^n \to 0 \text{ voor } n \to \infty \text{ (convergentie)} \\ \text{als } |x| \geq 1, \text{ dan } x^n \to \infty \text{ voor } n \to \infty \text{ (divergentie)} \end{cases}$$

Welke limiet komt er uit?
(voor $|x| < 1$)

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \overset{\to 0}{x^n}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

oftewel: de functie $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$ (zie ook les 2)

De harmonische reeks

$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ convergentie? (de termen worden wel steeds kleiner ...)

Helaas: divergentie

Schrijf daarvoor: $S = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{> \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{> \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \dots$

$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \dots \longrightarrow \infty$

Hoe test je of een oneindige reeks convergeert?

① $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + \dots$ voor convergentie moet op z'n minst gelden:

$$\lim_{k\to\infty} u_k = 0$$

Dus, als niet $\lim_{k\to\infty} u_k = 0$, dan sowieso divergentie

② Vergelijken met andere reeks

Stel $S_1 = u_1 + u_2 + \dots$ en $S_2 = v_1 + v_2 + \dots$

met alle u's en v's positief (dwz $u_k > 0$ en $v_k > 0$ voor alle indices k)

dan geldt:

a) als $\underset{\text{voor alle } k}{u_k \le v_k}$ en S_2 convergeert dan convergeert S_1 ook

b) als $\underset{\text{voor alle } k}{u_k \ge v_k}$ en S_2 divergeert dan divergeert S_1 ook

<u>Vb</u> $S = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots$

$p=1$: harmonische reeks (divergent, zie eerder)

$p<1$: elke term $\frac{1}{2^p}$, $\frac{1}{3^p}$, etc is <u>groter</u> dan de corresponderende term uit de harmonische reeks:

$$\frac{1}{2^p} > \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3^p} > \frac{1}{3}, \quad \text{etc}$$

de harmonische reeks divergeert, dus voor $p<1$ <u>deze reeks ook</u>

$p>1$: <u>voorbeeld $p=2$</u>

$$S = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

$$= 1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right)}_{\leq 2 \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}\right)}_{\leq 4 \cdot \frac{1}{4^2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}} + \cdots$$

$$< 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$ (de meetkundige reeks met $x = \frac{1}{2} < 1$, dus convergent)

$\Rightarrow$ <u>convergentie</u> (net zo voor andere waarden van $p>1$)

(3) De ratiotest (d'Alembert)

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_k + u_{k+1} + \dots$$

convergentie als $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| < 1$

divergentie als $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| > 1$

wat als $= 1$? (onduidelijk, nader analyseren!)

<u>vb</u> meetkundige reeks: $S = 1 + x + x^2 + \dots$

$u_k = x^k$ en dus $u_{k+1} = x^{k+1}$

$\Rightarrow \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{x^{k+1}}{x^k} = x$ ← hangt dus niet af van de index k

$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = |x|$ is dus < 1 als $|x| < 1$ (convergentie)

en is dus > 1 als $|x| > 1$ (divergentie)

voor $|x| = 1$, dwz $x = 1$ of $x = -1$ geldt <u>deze test</u> niet

(4) Integraaltest (Cauchy)

$S = u_1 + u_2 + \dots$ met $u_{k+1} < u_k$ en $u_k > 0$
(voor alle indices k)
dwz een dalende rij positieve getallen

Schrijf $u(x)$ die daalt als een functie van x $(u'(x) < 0)$
en $u(k) = u_k$ gehele waarde

Als $\int_1^\infty u(x)\,dx$ "convergeert" (er komt een eindige waarde uit de integraal)
dan convergeert $u_1 + u_2 + \dots$ ook.

Als $\int_1^\infty u(x)\,dx$ "divergeert" (dwz $= \infty$) of onbepaald is
dan divergeert $u_1 + u_2 + \dots$ ook

---

vb$_1$ Harmonische reeks $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ $\left(u_{k+1} = \frac{1}{k+1} < \frac{1}{k} = u_k \right.$ en $\left. u_k = \frac{1}{k} > 0 \right)$

$u(k) = \frac{1}{k}$ en $u(x) = \frac{1}{x}$

$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \ln(x) \Big|_{x=1}^{x=\infty} = \infty$, dus divergeert de harmonische reeks

vb 2 $u_k = \frac{1}{k^2}$: $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{x=1}^{x=\infty} = 1 < \infty$, dus deze reeks convergeert

$u(x) = \frac{1}{x^2}$

(5) Alternerende reeks

$S = u_1 + u_2 + ----$

met $u_{k+1} < u_k$ èn de rij wisselt van teken

$\Longrightarrow$ de reeks convergeert

$+ -- - -- + -- - --$ etc

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$

vb $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + -$

convergeert

$\ln = \ln(2)$

zie les 7