

Scalar functie

(waarde)

: temperatuur

dichtheid

energie

lengte

Vector functie

(richting en grootte)

: positie

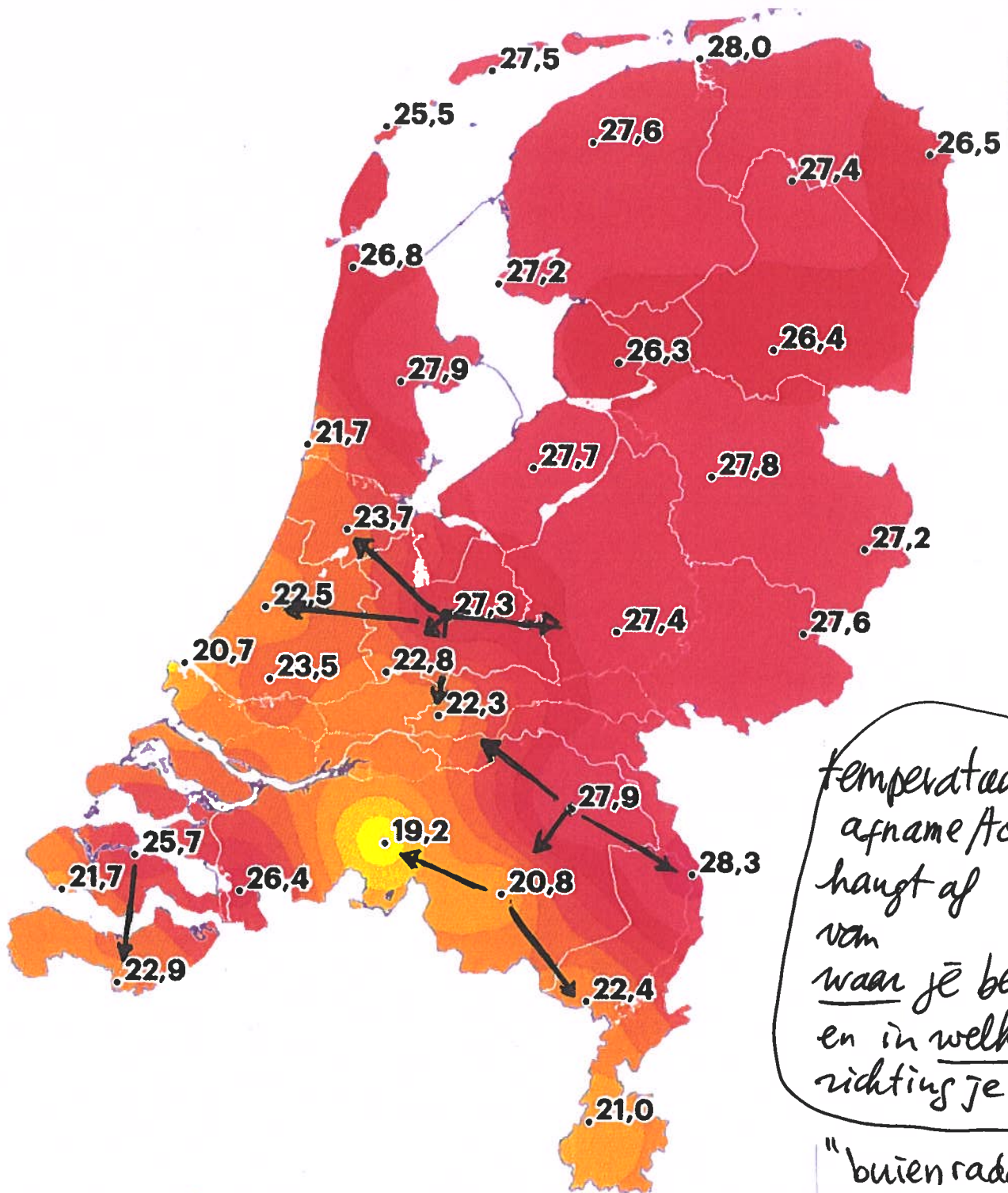
snelheid

versnelling

kracht

druk

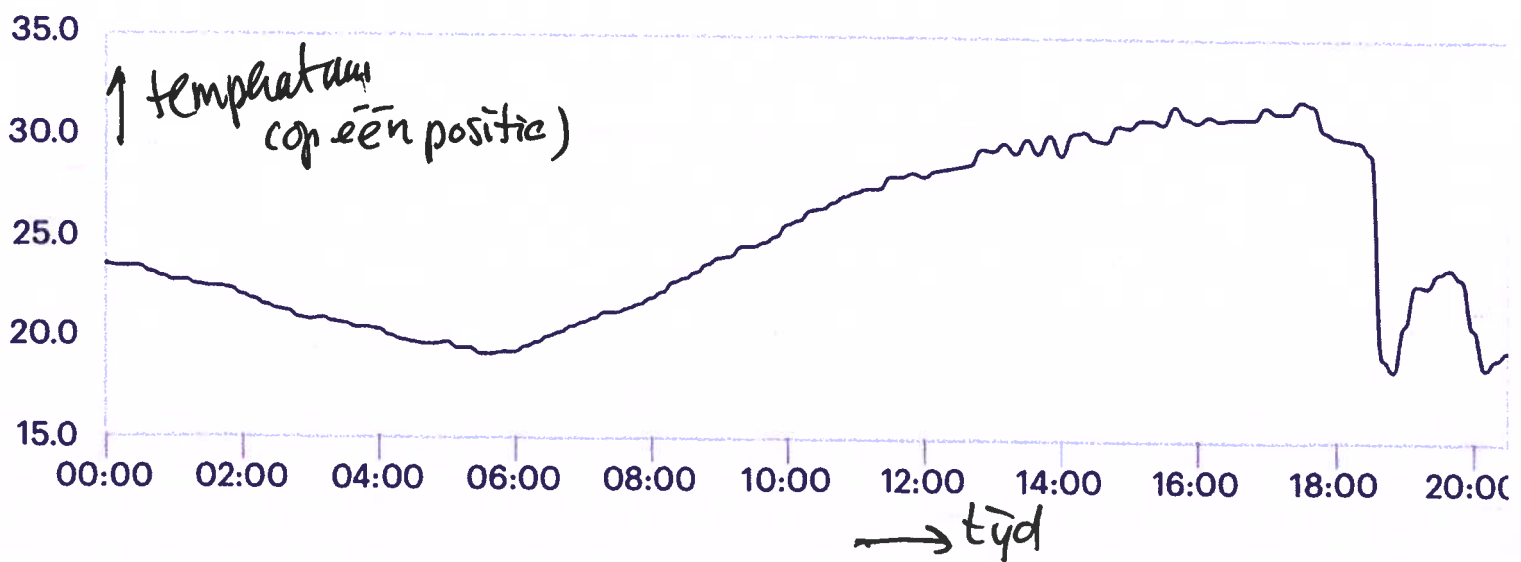
magnetische inductie

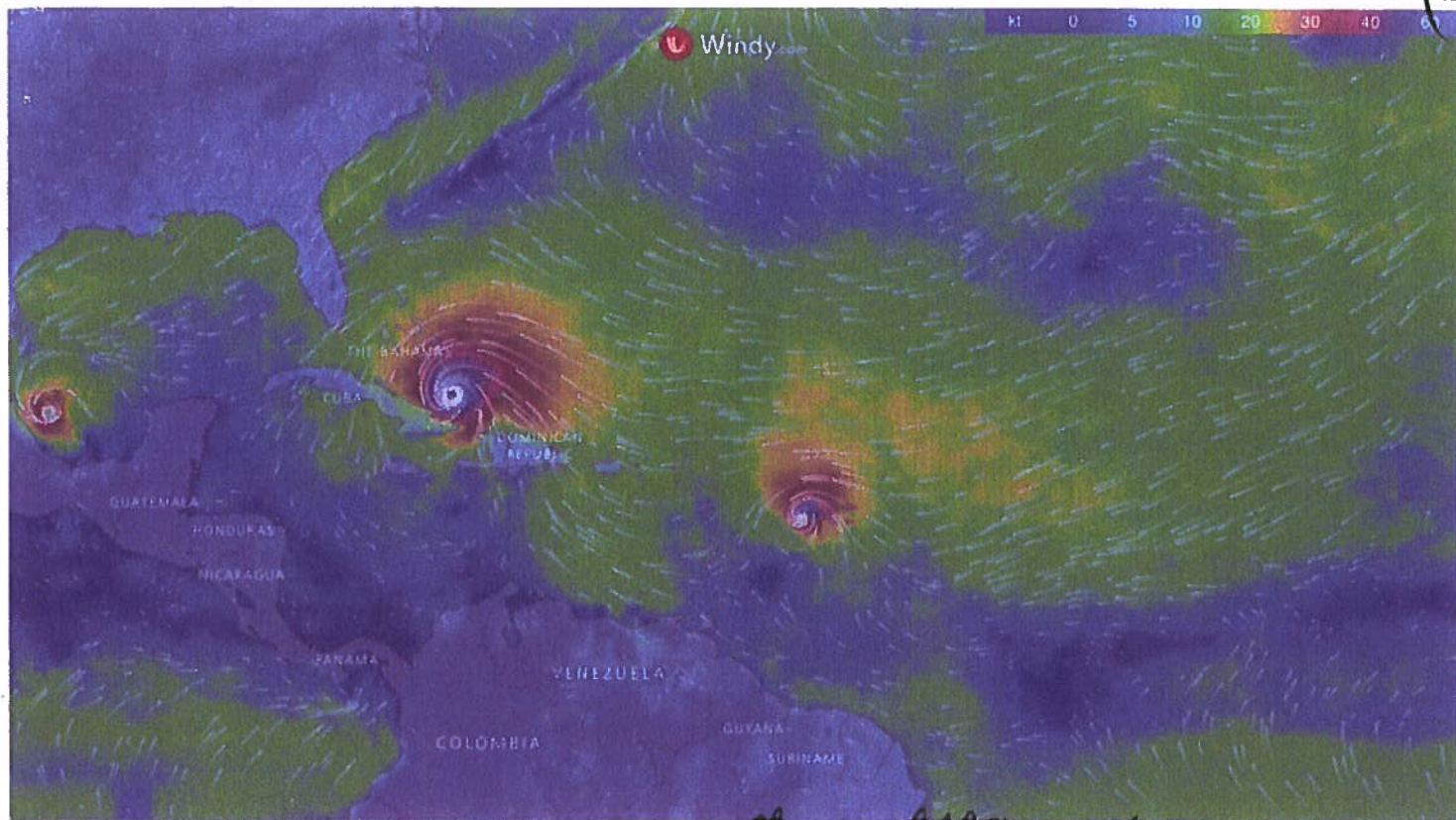


temperatuur 1,5 m hoogte in °C

Meetstation Gilze Rijen

Min: 18,6 Max: 32,0



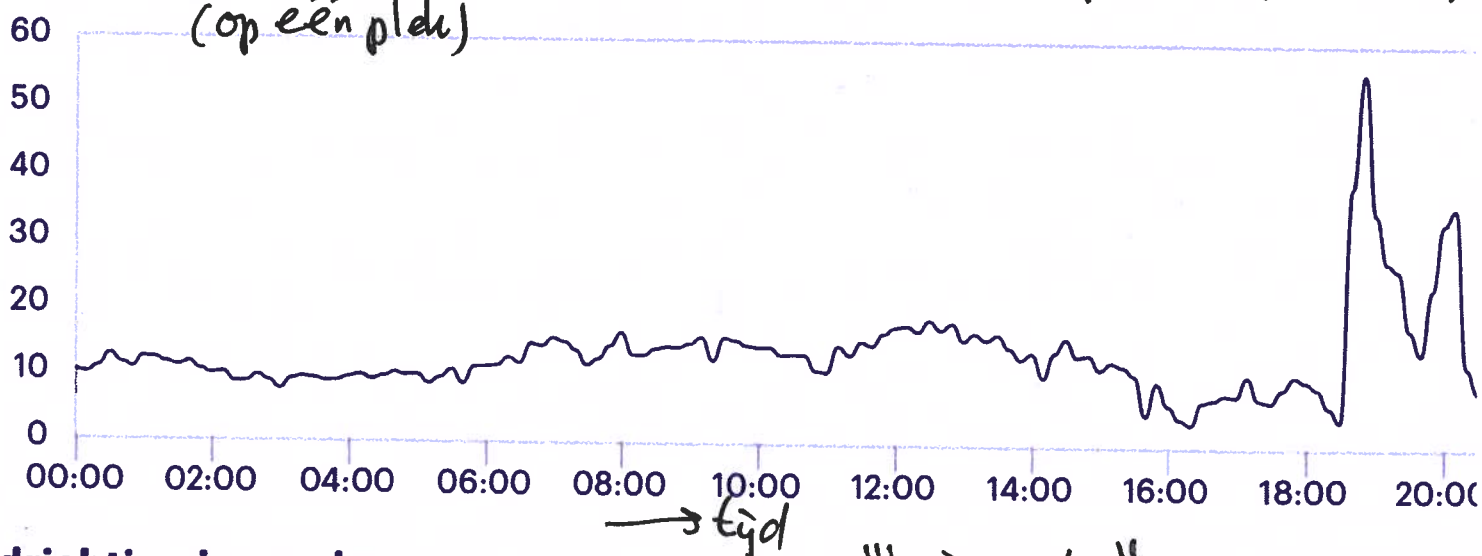


Windsnelheid in km/u

Meetstation Gilze Rijen

(op één plek)

op één ^{partij} { snelheidsveld bij een orkaan
kleuren geven de temperatuur aan
Min: 3,6 Max: 55,9



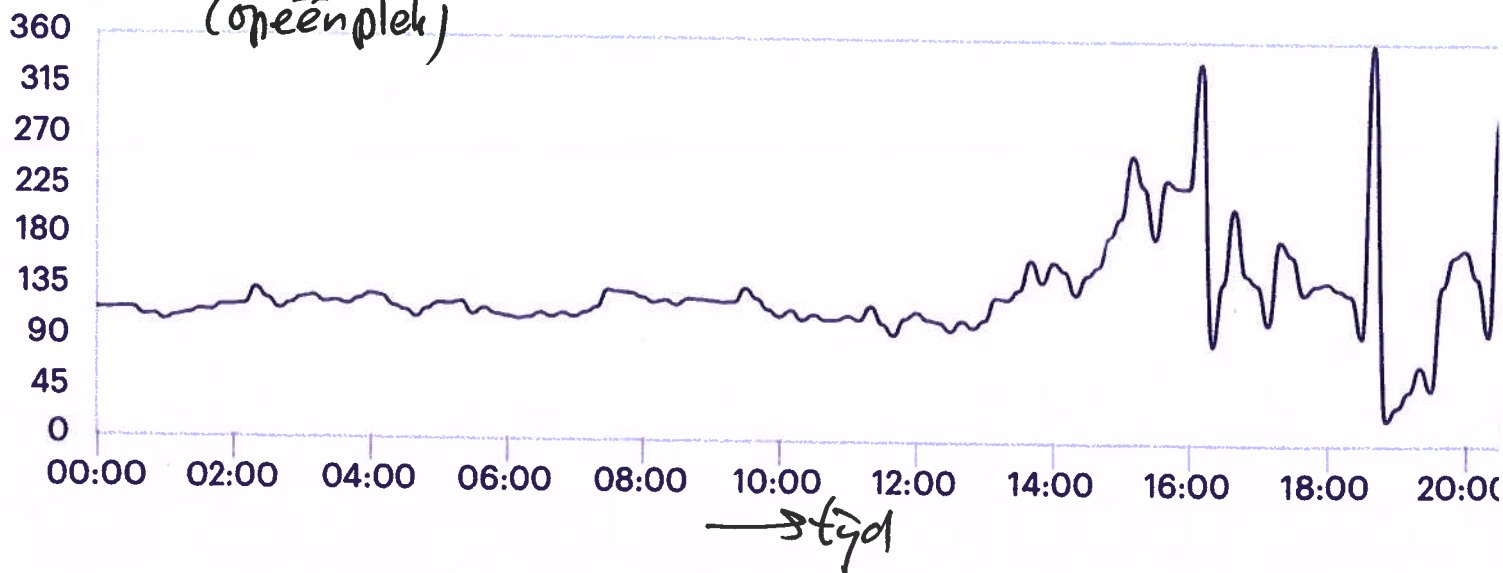
Mindrichting in graden

Meetstation Gilze Rijen

(op één plek)

"buienradar"

Min: 23 Max: 358



hoogtelijnen
in de bergen (2d representatie
van een 3d berglandschap)



(2d)

hoogtelynke (als functie van de tijd)
↓
iedere lyn komt met een jaar
overeen



* verschillende soorten "1^e afgeleiden"

(3)

De gradient steiner 16.8

Gegeven een scalaire functie $f(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
 $\uparrow \uparrow \uparrow$ $\uparrow$
een getal

dan is de gradient van f een vector in $\mathbb{R}^3$:

$$\text{grad}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \overset{\text{schrijf maar uit}}{=} \frac{\partial f}{\partial x} \underset{\parallel}{\vec{i}} + \frac{\partial f}{\partial y} \underset{\parallel}{\vec{j}} + \frac{\partial f}{\partial z} \underset{\parallel}{\vec{k}}$$
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(andere notatie) $= \nabla f$

$\uparrow$
"nabla"
of "del"

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

$\nwarrow$ als "operator"

(f invullen)

Scalar $\longrightarrow$ vector

Vb $f(x, y, z) = 6xy - z^2$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (6xy - z^2) = 6y \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} (x)}_{=1} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} (z^2)}_{=0} = 6y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 6x \\ \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (6xy - z^2) = -2z \end{cases} \Rightarrow \text{grad}(f) = \nabla f = \begin{pmatrix} 6y \\ 6x \\ -2z \end{pmatrix}$$
$$= 6y \vec{i} + 6x \vec{j} - 2z \vec{k}$$

(4)

De divergentie Steiner 16.9

gegeven een vectorfunctie $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} v_1(x,y,z) \\ v_2(x,y,z) \\ v_3(x,y,z) \end{pmatrix}$

dan is de divergentie van $\vec{v}$ een getal in $\mathbb{R}$:

$$\text{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

vector $\longrightarrow$ scalar

(andere notatie)

$$= \underbrace{\nabla \cdot \vec{v}}_{\text{inproduct}} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} v_1 + \frac{\partial}{\partial y} v_2 + \frac{\partial}{\partial z} v_3$$

Vb $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3xz \\ 2xy \\ -yz^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{div}(\vec{v}) = \frac{\partial}{\partial x} (3xz) + \frac{\partial}{\partial y} (2xy) + \frac{\partial}{\partial z} (-yz^2)$

$$= 3z + 2x - 2yz$$

$$\text{div}(\text{grad}(f)) = \text{div} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$= \Delta f \quad \text{Laplace}$$

$$= \nabla^2 f \quad \text{"nabla kwadraat"}$$

div komt voor in allerlei behoudswetten :

- ① massa behoud in een stroming (continuïteitsvergelijking)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

ρ ← dichtheid
 $\vec{v}$ ← snelheidsveld

als $\rho = \text{constant}$, dan $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ en $\text{div}(\rho \vec{v}) = \rho \cdot \text{div}(\vec{v})$

$$\Rightarrow \text{div}(\vec{v}) = 0 \quad (\text{stroming heet incompressibel})$$

"niet samendrukbaar"

- ② "er bestaan geen magnetische monopolen":

$$\text{div}(\vec{B}) = 0$$

↑ magnetische inductie

in de magneto-hydrodynamica een belangrijke
behoudswet

Divergentie = "uitstroom" — "instroom"

De rotatie

gegeven een vectorfunctie $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} v_1(x,y,z) \\ v_2(x,y,z) \\ v_3(x,y,z) \end{pmatrix}$

dan is de rotatie van $\vec{v}$ een vector in $\mathbb{R}^3$:

$$\text{rot}(\vec{v}) = \text{curl}(\vec{v}) = \nabla \times \vec{v}$$

$\nearrow$ nabla $\nwarrow$ uitproduct

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

vector $\longrightarrow$ vector

een stroming heet "irrotational" als $\text{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$

in de mechanica: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

$\uparrow$ hoeksnelheid

(snelheidsveld in een ronddraaiend object)

$$\Rightarrow \text{rot}(\vec{v}) = 2\vec{\omega}$$

(7)

$$\underline{Vb} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} yz \\ 3xz \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{rot}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 0 - 3x \\ y - 0 \\ 3z - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x \\ y \\ 2z \end{pmatrix}$$

$$= -3x\vec{i} + y\vec{j} + 2z\vec{k}$$

eigenschapp: $\text{div}(\text{rot}(\vec{v})) = 0$

$\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{vector} \\ \text{vector} \\ \text{scalar} \end{array}$

en $\text{rot}(\text{grad}(f)) = \vec{0}$

$\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{scalar} \\ \text{vector} \\ \text{vector} \end{array}$

$$\nabla(fg) = f \nabla g + g \nabla f$$

$$\nabla(f^n) = n f^{n-1} \nabla f$$

$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \nabla f - f \nabla g}{g^2}$$

$$\Delta(fg) = g \Delta f + 2 \nabla f \cdot \nabla g + f \Delta g$$

$$\text{div}(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot \text{rot}(\vec{u}) - \vec{u} \cdot \text{rot}(\vec{v})$$

$$\text{rot}(f \vec{v}) = (\text{grad } f) \times \vec{v} + f \text{rot}(\vec{v})$$

$$\text{div}(f \nabla g) = f \Delta g + \nabla f \cdot \nabla g$$

$$\text{div}(f \vec{v}) = f \text{div}(\vec{v}) + \vec{v} \cdot \nabla f$$

$$\begin{aligned} \text{div}(f \nabla g) - \text{div}(g \nabla f) \\ = f \Delta g - g \Delta f \end{aligned}$$

etcetera... !

De richtingsafgeleide

$$D_{\vec{b}} f|_P = \vec{b} \cdot \text{grad}(f) = \underbrace{|\vec{b}|}_{=1} \cdot |\text{grad}(f)| \cos(\gamma) = |\text{grad}(f)| \cdot \cos(\gamma)$$

afgeleide $\vec{b}$ in het punt P in de richting van $\vec{b}$ (met lengte van $\vec{b} = 1$)

eigenschap van een inproduct

De richting van de vector $\text{grad}(f)$ in een punt P is de richting van de maximale toename van de functie f in dat punt P .

N.l. als $\vec{b}$ en $\text{grad}(f)$ dezelfde richting hebben, dan is $\gamma = 0$ en $\cos(\gamma) = 1$ maximaal!

En dus is $D_{\vec{b}} f|_P$ maximaal in de richting van $\text{grad}(f)$ = richting van $\vec{b}$ in dit geval.

voorbeeld $f = x^2 + 3y^2 + xz$, $P = (1, 2, 3)$

$$\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, -1, 1) \quad (\Rightarrow |\vec{b}| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$\text{en } \text{grad}(f) = \begin{pmatrix} 2x+z \\ 6y \\ x \end{pmatrix}, \text{ in } P: \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}$$

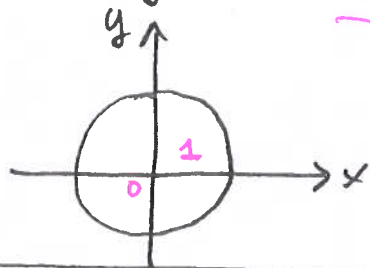
$$= \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\Rightarrow D_{\vec{b}} f|_P = \text{grad}(f)|_P \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{5}{\sqrt{3}} - \frac{12}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{6}{\sqrt{3}}$$

$f(x,y)=0$: een grafiek in het x - y vlak
 ↑ "1d" ↑ "2d"

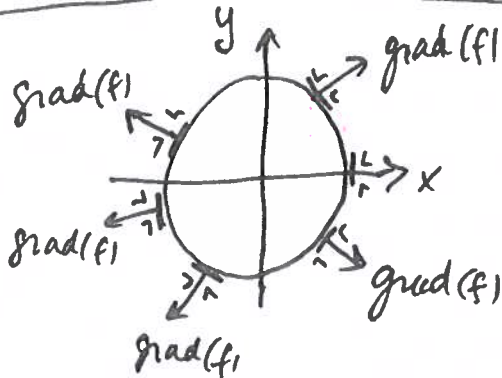
$f(x,y,z)=0$: een oppervlak in de x - y - z ruimte
 ↑ "2d" ↑ "3d"

Vb $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ (een cirkel met middelpunt $(0,0)$ en straal 1)



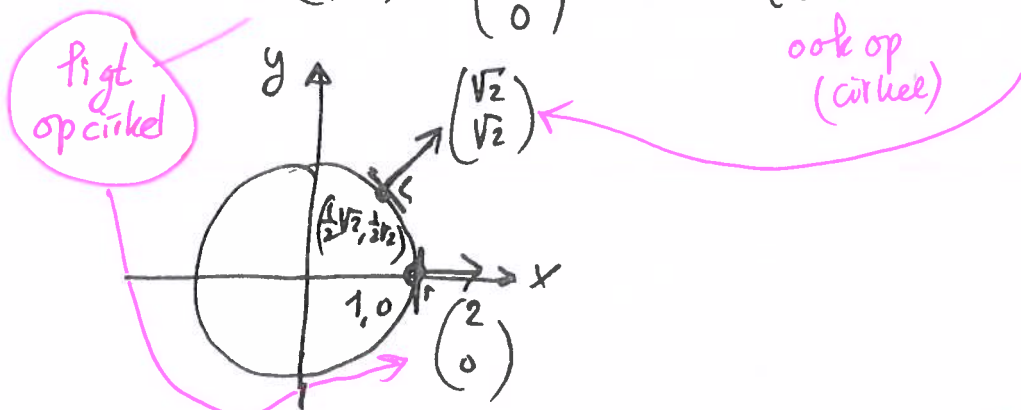
$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = 1^2$$

$\text{grad}(f)$ staat loodrecht op de cirkel (die door $f=0$ wordt gegeven)



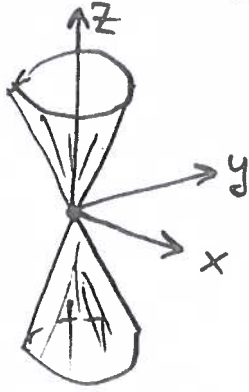
in dit voorbeeld: $\text{grad}(f) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$

in $(1,0)$: $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ en in $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$: $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$



dit volgt uit: $\text{grad}(f) \cdot \text{raadvector}_{\text{aan } f=0} = 0$ b. raadvector $\perp$ normaalvector

ander vb "de kegel" $z^2 - 4(x^2 + y^2) = 0$



$$f(x, y, z)$$

↑
2D oppervlakte in $\mathbb{R}^3$

$$\text{grad}(f) = \begin{pmatrix} -8x \\ -8y \\ 2z \end{pmatrix}$$

en bijv in het punt $P = (1, 0, 2)$:

$$\text{grad}(f)|_P = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

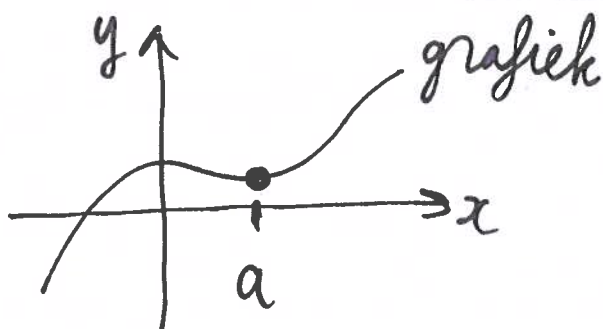
$\Rightarrow$ de normaalvector op de kegel
in het punt $(1, 0, 2)$, $\vec{n} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

met lengte = 1 : $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

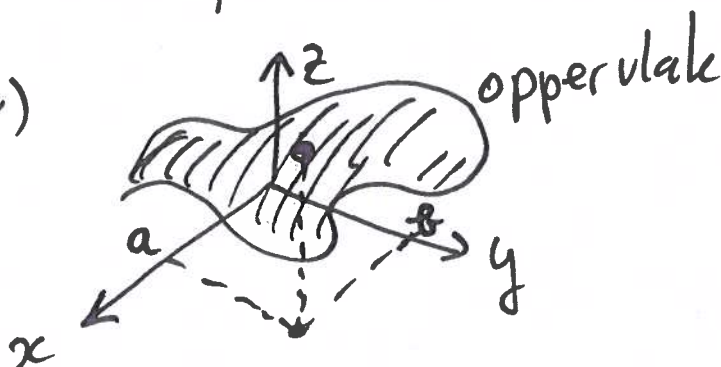
Taylorreeks in twee dimensies

(11)

in 1d: $y = f(x)$



in 2d: $z = f(x, y)$



rond (a, b) :

$$f(x, y) = f(a, b) + (x-a) \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + (y-b) \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

↑ partiële afgeleide ↑

$$+ \frac{1}{2!} \left\{ (x-a)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + (y-b)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) + \underline{2(x-a)(y-b) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)} \right\}$$

$$+ \frac{1}{3!} \left\{ (x-a)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a, b) \right.$$

↑ "kruis-afgeleide"

$+ \dots$ nog meer termen

+ etcetera

de **Jacobiaan** van een vectorfunctie $\begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \vec{f}(x,y)$ (12)

$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$ een 2×2 -matrix
(of Jacobi-matrix) ("een eerste afgeleide" matrix)

de **Hessiaan** van een scalaire functie $f(x,y)$

$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$ ook een 2×2 -matrix
("een tweede afgeleide" matrix)

→ symmetrische matrix, want $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ voor "nette" functies f
(zie ook pag. 129!)

Er geldt (zie werkcollege): $\mathcal{H} = J(\underbrace{\text{grad}(f)}_{\text{vectorfunctie (zie boven)}})$

(129)

Extra voorbeeld (geen tentamenstof)



Here is an example which shows that it is **not always true** that $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)$. Define

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

This function is continuous everywhere. We now compute the first order partial derivatives. For $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \frac{2x}{x^2 + y^2} - xy \frac{2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \frac{4x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - xy \frac{2y}{x^2 + y^2} - xy \frac{2y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - xy \frac{4y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

For $(x, y) = (0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \left[\frac{d}{dx} f(x, 0) \right]_{x=0} = \left[\frac{d}{dx} 0 \right]_{x=0} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \left[\frac{d}{dy} f(0, y) \right]_{y=0} = \left[\frac{d}{dy} 0 \right]_{y=0} = 0$$

By way of summary, the two first order partial derivatives are

$$f_x(x, y) = \begin{cases} y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2} & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$f_y(x, y) = \begin{cases} x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^2} & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Both $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ and $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ are continuous. Finally, we compute

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \left[\frac{d}{dx} f_y(x, 0) \right]_{x=0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f_y(h, 0) - f_y(0, 0)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[h \frac{h^2 - 0^2}{h^2 + 0^2} - 0 \right] = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \left[\frac{d}{dy} f_x(0, y) \right]_{y=0} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} [f_x(0, k) - f_x(0, 0)] = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \left[k \frac{0^2 - k^2}{0^2 + k^2} - 0 \right] = -1$$

extrema (maxima en minima) in 1D

(13)

functie $y = f(x)$

(een grafiek
in het x-y vlak)



voor een minimum: $f' = 0$ en $f'' > 0$

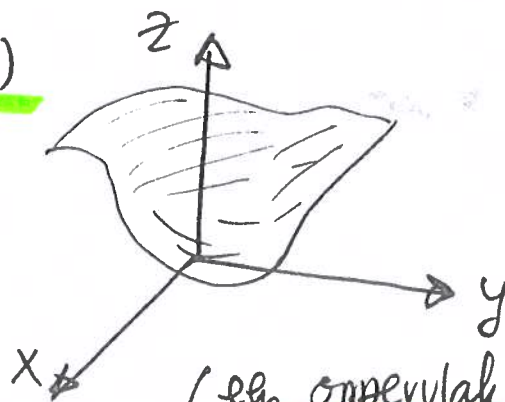
voor een maximum: $f' = 0$ en $f'' < 0$

voor een buigpunt: $f'' = 0$

voor een nulpunt: $f = 0$

in 2D:

$z = f(x, y)$



(een oppervlak
in de x-y-z ruimte)

I voor een minimum: $\text{grad}(f) = \vec{0}$ en $\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 = \det(\mathcal{H}) > 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \Delta f > 0 \end{cases}$



$\Delta f = \text{div}(\text{grad}(f))$
= "Laplace" van f

II voor een maximum: $\begin{cases} \det(\mathcal{H}) > 0 \\ \Delta f < 0 \end{cases}$ (en natuurlijk ook $\text{grad}(f) = \vec{0}$) (14)



III wat als $\text{grad}(f) = \vec{0}$ en $\det(\mathcal{H}) < 0$?

Dan: saddelpunt



Als contourlijnen-figuur:



als $\text{grad}(f) = \vec{0}$ en we zitten niet in geval I, II of III:

onduidelijk/onbepaald
(nadere analyse vereist...)

→ *doen we niet hier* ←

voorbeeld: $z = f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y^4$

eerst $\text{grad}(f)$ berekenen en gelijkstellen aan $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -6xy + 4y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 \\ y(-6x + 4y^2) = 0 \end{cases} \text{ en}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \text{ of } x=-y \\ \text{en} \\ y=0 \text{ of } y^2=\frac{3}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \text{ en } y=0 \Rightarrow (0,0) \\ \text{of} \\ x=y \text{ en } y^2=\frac{3}{2}x \Rightarrow (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) \\ \text{of} \\ x=-y \text{ en } y=0 \Rightarrow (0,0) \\ \text{of} \\ x=-y \text{ en } y^2=\frac{3}{2} \Rightarrow (\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}) \end{cases} \quad (15)$$

Das drie punten die kandidaat zyn voor minimum, maximum, zadelpunt of

$$\text{Bereken } \mathcal{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -6y \\ -6y & -6x + 12y^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \det(\mathcal{H}) &= 6x(-6x + 12y^2) - (-6y \cdot -6y) \\ &= -36x + 72xy^2 - 36y^2 \\ &= 36(-x^2 + 2xy^2 - y^2) \end{aligned}$$

$$\text{en } \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x - 6x + 12y^2 = 12y^2$$

$$\underbrace{\Delta f}_{\text{in feite}} = \text{sp}(\mathcal{H}) !!$$

maak een tabelletje:

punt	$\det(\mathcal{H})$	Δf	
$(0,0)$	0	0	onduidelijk! ...
$(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$	> 0	> 0	minimum
$(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$	> 0	> 0	minimum

Hoe vind je (benader je --) minima en maxima in 2D?

(zelfs in 1D kunnen we dit bijna nooit exact!)

in 1D: Taylor van f rond een nulpunt a :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \dots$$

$$f(x) \approx f(a) + (x-a)f'(a)$$

zoek nu x zodanig dat $f(a) + (x-a)f'(a) = 0$

$$\Rightarrow x = a - \frac{f(a)}{f'(a)} = \dots$$

en herhaal dit proces: $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

Newton-Raphson

voor een minimum of maximum:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f'(x_i)}{f''(x_i)}$$

in 2D: Gegeven zijn twee functies: $f_1(x,y)$ en $f_2(x,y)$

zoek punten (x,y) waarvoor zowel $f_1(x,y)=0$
als $f_2(x,y)=0$.

Pas nu (2x) 2D Taylor toe op f_1 en f_2
rond een punt (a,b) in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} f_1(x, y) \approx f_1(a, b) + \frac{\partial f_1}{\partial x}(a, b)(x-a) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(a, b)(y-b) \\ f_2(x, y) \approx f_2(a, b) + \frac{\partial f_2}{\partial x}(a, b)(x-a) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(a, b)(y-b) \end{cases}$$

h. stel deze twee rechteleds $= 0$ (net als in 1D):

twee lineaire vergelijkingen met twee onbekenden x en y

$\Leftrightarrow$
(omschrijven)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}}_{= \text{Jacobian}} \bigg|_{(a,b)} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_1(a, b) \\ f_2(a, b) \end{pmatrix}$$

herschrijven

$\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}^{-1}}_{= J^{-1}} \bigg|_{(a,b)} \begin{pmatrix} f_1(a, b) \\ f_2(a, b) \end{pmatrix}$$

en herhaal dit proces:
(net als in 1D)

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} - J^{-1} \bigg|_{(x_i, y_i)} \begin{pmatrix} f_1(x_i, y_i) \\ f_2(x_i, y_i) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \text{ startwaarden} \end{cases} \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Voor een minimum/maximum van een functie

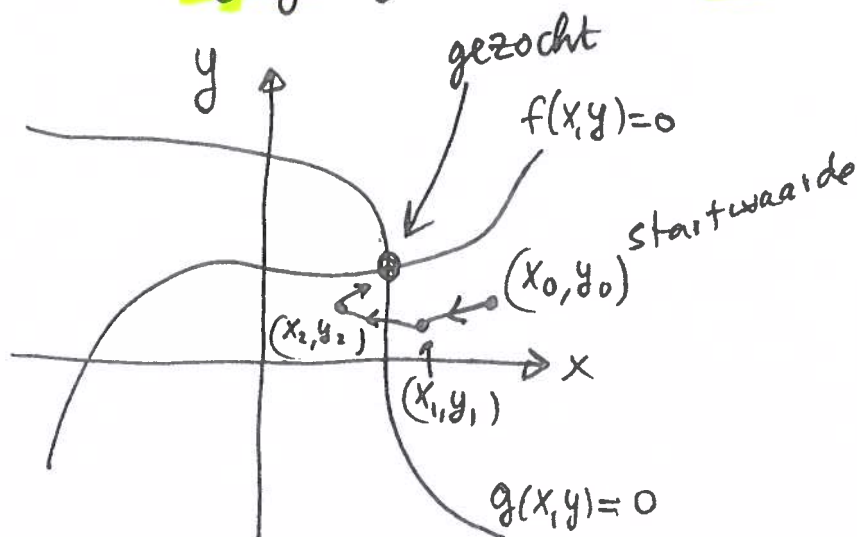
(18)

$$z = f(x, y) : \text{neem } f_1 = \frac{\partial f}{\partial x} \text{ en } f_2 = \frac{\partial f}{\partial y}$$

en vervang $\bar{y}^{-1}$ door $\partial \bar{L}^{-1}$ (zie opgave uit werkcollege)

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} - \left. \partial \bar{L}^{-1} \right|_{(x_i, y_i)} \cdot \left. \text{grad}(f) \right|_{(x_i, y_i)} \\ i = 0, 1, 2, \dots \\ \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \text{ startwaarden} \end{cases}$$

voorbeeld $\begin{cases} f(x, y) = 0 & (\text{een kromme in het } x\text{-}y \text{ vlak}) \\ g(x, y) = 0 & (\text{een andere kromme in het } x\text{-}y \text{ vlak}) \end{cases}$



n bij n matrix

~

$$A\vec{x} = \lambda \vec{x} \quad \begin{cases} \lambda \text{ eigenwaarde} \\ \vec{x} \text{ eigen vector (niet uniek...!)} \end{cases}$$

voor $\|\vec{x}\| = 1$ eigen vector ter lengte 1
(uniek)

$$\vec{x} \cdot \vec{x} = 1 \Leftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{x} - 1 = 0$$

(inproduct)

$$\begin{cases} A\vec{x} - \lambda \vec{x} = \vec{0} \\ \vec{x} \cdot \vec{x} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{f}(\vec{z}) = \vec{0}$$

met $\vec{z} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \lambda \end{pmatrix}$ vector ter lengte $n+1$

niet-lineair stelsel
vergelijkingen

Newton-Raphson



$$\begin{cases} \vec{z}_{k+1} = \vec{z}_k - J_k^{-1} \vec{f}(\vec{z}_k) \\ \vec{z}_0 = \dots \end{cases}$$

voor $n=2$:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - \lambda x_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - \lambda x_2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \approx ? \\ x_2 \approx ? \\ \lambda \approx ? \end{cases} \vec{x} \approx ?$$

Wet-linear!

niet-linear