DVen

Hoe kunnen we een oplossing vinden?

a) analytisch ("exacte formule")
→ alleen in zeer speciale gevallen mogelijk ...

b) kwalitatief ("richtingsvelden" en "faseplaatjes")
→ geeft alleen een globaal gedrag

c) numeriek ("met de computer")
→ bijna altijd mogelijk (let op nauwkeurigheid en stabiliteit ...)

d) reeksoplossingen ("semi-analytisch")
→ alternatief voor a) en b)

Beschouw

eerste orde DV

(straks een tweede orde DV)

$$\begin{cases} y'(x) = f(y(x), x) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

gegeven

2

Aanname: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks

$\boxed{\text{oplossing van DV}}$ $\qquad a_n \overset{?}{=}$ (zie les 1 en 2)

probeer de coëfficiënten a_n te bepalen

$\boxed{\text{"Recept"}}$:

$$\begin{cases} y'(x) = f(y(x), x) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

gegeven $\qquad y(x)$ gezocht

1. "de aanname"; zie boven: $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$
   $(= a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots)$
2. vul dit in in de DV en werk de termen uit.
3. archiveer/verzamel/orden de termen bij $x^0, x^1, x^2, \cdots$
4. levert een $\boxed{\text{recursierelatie}}$ tussen a_{n+1} en a_n
   les 1
   (of tussen a_{n+1} en a_n en a_{n-1} ---)
5. vind een $\boxed{\text{trend}}$: probeer te bepalen $a_n = \overset{?}{\cdots}\, a_0$
   (a_0 volgt uit de beginwaarde y_0)
6. $y(x)$ bekend (en analyseer de eigenschappen)
   + maak grafiek, etcetera

$\boxed{\text{Vb 1}}$ $y'(x) = -y(x)$

[we kennen de oplossing al natuurlijk : $y(x) = C \cdot e^{-x}$]

neem aan: $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$

en geldt: $y'(x) = 0 + a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots$

(elke term afzonderlijk differentiëren)

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

1 eerder starten tov

1 omhoog tov

check zelf dat deze twee reeksen identiek zijn!

invullen in DV:

$$\underbrace{a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots}_{= y'(x)} = -\underbrace{(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)}_{= y(x)}$$

naar links halen: $(a_1 + a_0) + (2a_2 + a_1)x + (3a_3 + a_2)x^2 + \cdots$

$$= 0$$

$$(= 0 \cdot x^0 + 0 \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + \cdots)$$

belangrijk

* $\boxed{\text{dit moet voor alle } x \text{ gelden}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_0 = 0 \\ 2a_2 + a_1 = 0 \\ 3a_3 + a_2 = 0 \\ 4a_4 + a_3 = 0 \\ \text{etc.} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -a_0 \\ a_2 = -\frac{1}{2} a_1 \\ a_3 = -\frac{1}{3} a_2 \\ a_4 = -\frac{1}{4} a_3 \\ \text{etc.} \end{cases} \Rightarrow$$

$\boxed{\text{recursie}}$:

$$a_{n+1} = \frac{-a_n}{n+1}$$

(4)

oplossen:

$$\begin{cases} a_1 = -a_0 = -\frac{1}{1!}a_0 \\ a_2 = -\frac{1}{2}a_1 = -\frac{1}{2}(-a_0) = \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2!}a_0 \\ a_3 = -\frac{1}{3}a_2 = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a_0\right) = -\frac{1}{6}a_0 = -\frac{1}{3!}a_0 \\ a_4 = -\frac{1}{4}a_3 = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{6}a_0\right) = \frac{1}{24}a_0 = \frac{1}{4!}a_0 \\ \text{etc} \ldots \end{cases}$$

$\boxed{\text{"trend ontdekken"}}$

oftewel: $a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}a_0 \quad n = 0, 1, 2, \ldots$ vanwege $+, -, +, -, \ldots$

$(-1)^1 = -1$; $n=0$
$(-1)^2 = +1$; $n=1$
$(-1)^3 = -1$; $n=2$
etc

dus ook $a_n = \frac{(-1)^n}{n!}a_0 \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

verschuiven van index (check zelf wel dat het klopt)

$\left(n=0: \ a_0 = \frac{(-1)^0}{0!}a_0 = a_0 \right.$ klopt dus ook!

$$\Rightarrow y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_0(-1)^n}{n!}x^n$$

$$= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}$$

les 2 (Taylorreeks)

$$= a_0 e^{-x}$$

klopt dus met $y(x) = C \cdot e^{-x}$ (blz ③) als $C = a_0$

andere naam voor onbekende constante

vb 2 $\quad y''(x) = y(x)$

2e orde DV
(twee extra condities nodig om oplossing vast te leggen)

oplossing kennen we ook al zie les over DVen

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n a_{n+1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

invullen in DV en naar links halen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} - a_n \right] x^n = 0 \quad (= 0x^0 + 0 \cdot x^1 + 0x^2 + \cdots)$$

belangrijk: moet voor alle x gelden $\Rightarrow$

recursie: $(n+2)(n+1) a_{n+2} - a_n = 0 \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

let nu op! deze slaat a_{n+1} over!!

om alle a_n's te vinden moeten we dus onderscheid gaan maken tussen $0, 2, 4, 6, \ldots$ (even indices) en $1, 3, 5, 7, \ldots$ (oneven indices).

Splits dus: even n $\quad a_{n+2} = \dfrac{a_n}{(n+2)(n+1)}$ $\quad n = 0, 2, 4, 6, \ldots$ even — weer verschuiven van index

en geldt ook: $a_n = \dfrac{a_{n-2}}{n(n-1)}$ $\quad n = 2, 4, 6, \ldots$

en $a_{n-2} = \dfrac{a_{n-4}}{(n-2)(n-3)}$ $\quad n = 4, 6, 8, \ldots$ $\quad$ ETCETERA

$$\Rightarrow a_{n+2} = \frac{a_{n-2}}{(n+2)(n+1)n(n-1)}$$

a_{n-2} formule invullen

$$= \frac{a_{n-4}}{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

a_{n-4} formule invullen

$$= \text{-------} \overset{\text{t/m de "laatste"}}{=} \frac{a_0}{(n+2)(n+1)n\cdots 2.1} \quad n=0,2,4,6,\ldots$$

denk aan definitie "!"

$$= \frac{a_0}{(n+2)!}, \quad n=0,2,4,6,\ldots \text{ even}$$

op dezelfde manier geldt ook:

in feite dezelfde recursie maar ander "eindpunt"!

$$a_{n+2} = \frac{a_1}{(n+2)!}, \quad n=1,3,5,7,\ldots \quad \text{oneven}$$

ipv a_0

n even: $a_n = \dfrac{a_0}{(n+2)!}$

en dus $y_1(x) = \displaystyle\sum_{\substack{n=0 \\ (n \text{ even})}}^{\infty} \frac{a_0}{(n+2)!} x^n$ is een oplossing van de DV

en $y_2(x) = \displaystyle\sum_{\substack{n=1 \\ (n \text{ oneven})}}^{\infty} \frac{a_1}{(n+2)!} x^n$ is ook een oplossing van deze DV

n oneven: $a_n = \dfrac{a_1}{(n+2)!}$

"super-positie principe"

Oplossing wordt: (neem lineaire combinatie)

$$y(x) = a_0 \sum_{\substack{n=0 \\ (n \text{ even})}}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)!} + a_1 \sum_{\substack{n=1 \\ (n \text{ oneven})}}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)!}$$

"ADMINISTRATIE" hernummeren

$$= a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k+2)!} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+3)!}$$

alle k-waarden levert links even machten en rechts oneven machten noem

$$= \underbrace{(c_0+c_1)}_{=a_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{\underset{+2}{(2k)}!} + \underbrace{(c_0-c_1)}_{=a_1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+3)!}$$

haakjes uitwerken

$$= c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{\underset{+2}{(2k)}!} + c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+3)!} + c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{\underset{+2}{(2k)}!} - c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+3)!}$$

c_0 en c_1 termen samenvoegen

$$= c_0 \Bigg[\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{\underset{+2}{(2k)}!}}_{\text{even}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+3)!}}_{\text{oneven}} \Bigg] + c_1 \Bigg[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^{2k}}{\underset{+2}{(2k)}!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^{2k+1}}{(2k+3)!} \Bigg]$$

$\Big($want $(-)^{\text{even}} = (+)^{\text{even}}\Big)$ $\Big((-)^{\text{oneven}} = -(\,)^{\text{oneven}}\Big)$

even & oneven $\Rightarrow$ "alles"

$$= c_0 \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}}_{\text{even èn oneven}} + c_1 \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-x)^m}{m!}}_{\text{even èn oneven}}$$

$$= c_0 e^{x} + c_1 e^{-x}$$

dit zijn inderdaad de oplossingen van deze DV

(check door invullen of zie les 5)

vb 3

$$\begin{cases} y'(x) = [y(x)]^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$ een niet-lineaire DV

(*)

via de methode van les 5 (scheiden van variabelen) $\Longrightarrow y(x) = \dfrac{1}{1-x}$

via reeks $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (⊙)

let op $y(0) = a_0 + \underbrace{a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + \cdots}_{=0} = \boxed{a_0 = 1}$

invullen van (⊙) in DV geeft:

voor $\boxed{n=1:}$ $1 \cdot a_1 = a_0 a_0 = 1 \Rightarrow a_1 = 1$

voor $\boxed{n=2:}$ $2 a_2 = a_0 a_1 + a_1 a_0 = 2 \Rightarrow a_2 = 1$

voor algemene n: ($= 2, 3, 4 \ldots$) $n \cdot a_n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ keer}} = n \Rightarrow a_n = 1$

(de 1-en volgen door eerdere waarden in te vullen)

Dwz $a_n = 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

dus $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots \overset{\text{les 1}}{=} \dfrac{1}{1-x}$

klopt! met (*)

$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)$ "reeks in het kwadraat"

$= \underbrace{a_0^2}_{\text{term voor } x^0} + \underbrace{(a_0 a_1 + a_1 a_0)}_{\text{term voor } x^1} x + \cdots\cdots x^2 + \cdots$

etcetera

$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)' = 0 + \underbrace{a_1}_{\text{term voor } x^0} + \underbrace{2 a_2}_{\text{term voor } x^1} x + \cdots$

vb 4 $\quad y''(x) - x\,y(x) = 0$ (9)

DV van Airy (zie ook werkcollege opgaven)

Simpele DV !!

Echter geen formule oplossing bekend in termen van e-machten, sin, cos, -- !

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$ weer aanname

levert splitsing in ------

$a_0 \to a_3 \to a_6 \to \dots$

$a_1 \to a_4 \to a_7 \to \dots$

$a_2 \to a_5 \to a_8 \to \dots$

hier: "drievouden" (i.p.v. even en oneven)

Slaat dus twee indices over!

[blijkt echter (gelukkig) dat $a_2 = 0 \Rightarrow a_5 = 0 \Rightarrow a_8 = 0$ -- etc.]

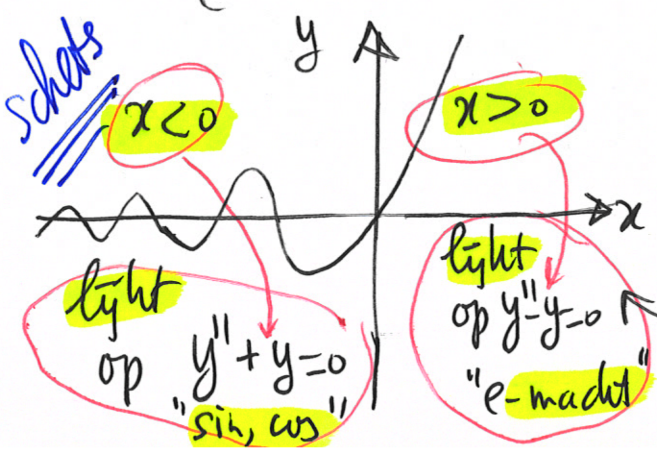
Oplossing van deze DV heet de **Airy-functie**

(komt o.a. voor in modellen met "stroming")

aerodynamica

ondiepwater vergelijkingen

schets



blijkt na analyse van de reeksoplossing $\boxed{y = Ai(x)}$

(zie werkcollege opgave)

Nu (een andere klasse van DV-en): $x^2 y'' + x \cdot p(x)\, y' + c(x)\, y = 0$ (**)

gezocht $y(x)$

deze maken het speciaal

gegeven functies

Vb uit de praktijk (zie ook straks en bij het werkcollege)

DV van Bessel: $x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0$

(electromagnetische golven, warmtegeleiding, ...)

$p(x) = 1$
$c(x) = x^2 - \nu^2$

oplossingen heten $\boxed{\text{Besselfuncties}}$ (zijn zeer belangrijk in de praktijk, net als cos, sin, exp, ...)

$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ oplossingen van (**) gaan niet lukken!!

(vanwege voorfactoren voor y'' en y'; check zelf maar → "tegenspraak")

Proberen nu: $y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

oplossingen vd vorm

r nog te bepalen (net als a_n's natuurlijk)

heet indexparameter (volgt uit een zgn. indexvergelijking)

$\boxed{\text{Methode van Frobenius}}$

Veronderstel $a_0 \neq 0$

Beschouw het geval $\boxed{p(x) = p_0}$ en $\boxed{c(x) = c_0}$

constante

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Euler-Cauchy DV}}$

$$x^2 y'' + p_0 x y' + c_0 y = 0$$

("simpelste" DV in deze klasse van DVen)

reeksaanname

$$\Rightarrow y'(x) = r x^{r-1}(a_0 + a_1 x + \dots) + x^r (a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots)$$

productregel voor diff.

$$= x^{r-1}(r a_0 + (r+1) a_1 x + (r+2) a_2 x^2 + \dots)$$

en ook

$$y''(x) = (r-1) x^{r-2}(r a_0 + (r+1)a_1 x + (r+2) a_2 x^2 + \dots) + x^{r-1}((r+1)a_1 + 2a_2(r+2)x + \dots)$$

$$= x^{r-2}(r(r-1)a_0 + [(r-1)(r+1) + (r+1)]a_1 x + \dots)$$

$$= x^{r-2}(r(r-1)a_0 + r(r+1)a_1 x + \dots)$$

invullen in DV geeft:

$$x^2 y'' = x^r(r(r-1)a_0 + r(r+1)a_1 x + \dots)$$

en

$$p_0 x y' = p_0 x^r (r a_0 + (r+1)a_1 x + (r+2)a_2 x^2 + \dots)$$

"invullen en haakjes" $\Rightarrow$

$$x^r\Big[\underbrace{r(r-1)a_0}_{\text{"}x^0\text{"}}+(r+1)ra_1x+\dots+p_0(\underbrace{ra_0}_{\text{"}x^0\text{"}}+(r+1)a_1x+\dots)$$
$$+c_0(\underbrace{a_0}_{\text{"}x^0\text{"}}+a_1x+\dots)\Big]=0$$

net als voor modellen op blz 1 t/m 9 $\Rightarrow$

term voor x^0 binnen de [haken]: $r(r-1)a_0+p_0ra_0+c_0a_0=0$

$\Leftrightarrow r(r-1)+p_0r+c_0=0$

delen door $a_0\neq 0$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{r^2+(p_0-1)r+c_0=0}$

de indexvergelijking

"abc-formule" $\Rightarrow$

$$\begin{cases} r_1=\dfrac{-(p_0-1)+\sqrt{(p_0-1)^2-4c_0}}{2} \\ r_2=\dfrac{-(p_0-1)-\sqrt{(p_0-1)^2-4c_0}}{2}\end{cases}$$

twee r-waarden mbv abc-formule

---

geval 1 $\quad r_1\neq r_2$

oplossingen: $\begin{cases} y_1(x)=x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \\ y_2(x)=x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\end{cases}$

nog te bepalen via eerdere methode

---

geval 2 $\quad r_1=r_2\overset{\text{noem deze}}{=}r$ (maar niet een geheel getal)

$$\begin{cases} y_1(x)=x^{r}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \\ y_2(x)=y_1(x)\cdot\ln(x)+x^{r+1}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\end{cases}$$

geval 3 : $r_1 = r_2 = r$ (wel een geheel getal) → dwz $= 1, 2, 3, \ldots$

$$\begin{cases} y_1(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ y_2(x) = a \cdot y_1(x) \ln(x) + x^{r+1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \end{cases}$$

↑ nog te bepalen! via andere constructie ...

---

geval 4: r_1 en $r_2 \in \mathbb{C}$

(beschouwen we niet: "te moeilijk" en komt in de scheikunde bijna niet voor ....)

Als $p(x)$ en $c(x)$ niet constant, dan gebruik machtreeksuitdrukkingen

$$\begin{cases} p(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots \\ c(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots \end{cases}$$

etc ...

Toepassing

Bessel DV $\quad x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0$

let op: ν heet de orde van de Bessel DV

"nu" (griekse "n") ($\neq$ de orde vd DV zelf ..., die is n.l. 2)

indexvergelijking: $r^2 + (\underbrace{1 - 1}_{=0}) r - \nu^2 = 0$

$\Leftrightarrow r^2 - \nu^2 = 0 \Leftrightarrow r_1 = +\nu$ en $r_2 = -\nu$

vb $r_1 = +\nu$

$$y(x) = x^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

invullen in Bessel DV

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+\nu)(n+\nu-1) a_n x^{n+\nu} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+\nu) a_n x^{n+\nu} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\nu+2} - \nu^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\nu} = 0$$

$n=0$: $\nu(\nu-1) + \nu - \nu^2 = 0$ geldt altijd (levert dus geen info op)

$n=1$: $(\nu+1)\nu + (\nu+1) - \nu^2 = 2\nu + 1 > 0 \Rightarrow a_1 = 0$

recursie voor $n = 2, 3, \ldots$

$$n(n+2\nu) a_n + a_{n-2} = 0$$

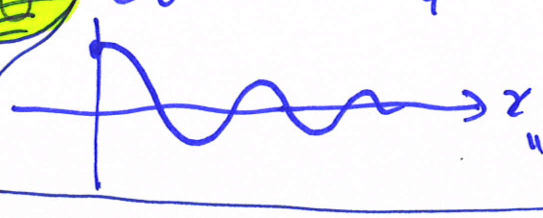
$$\Rightarrow a_3 = a_5 = a_7 = \ldots = 0$$

---- etcetera

gehele waarden van ν
dwz $\nu \in \{0, 1, 2, \ldots\}$

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+\nu)!\, n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2n}$$

Bijv $J_0(x) = 1 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{64}x^4 \ldots \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$



"dempende cosinus"