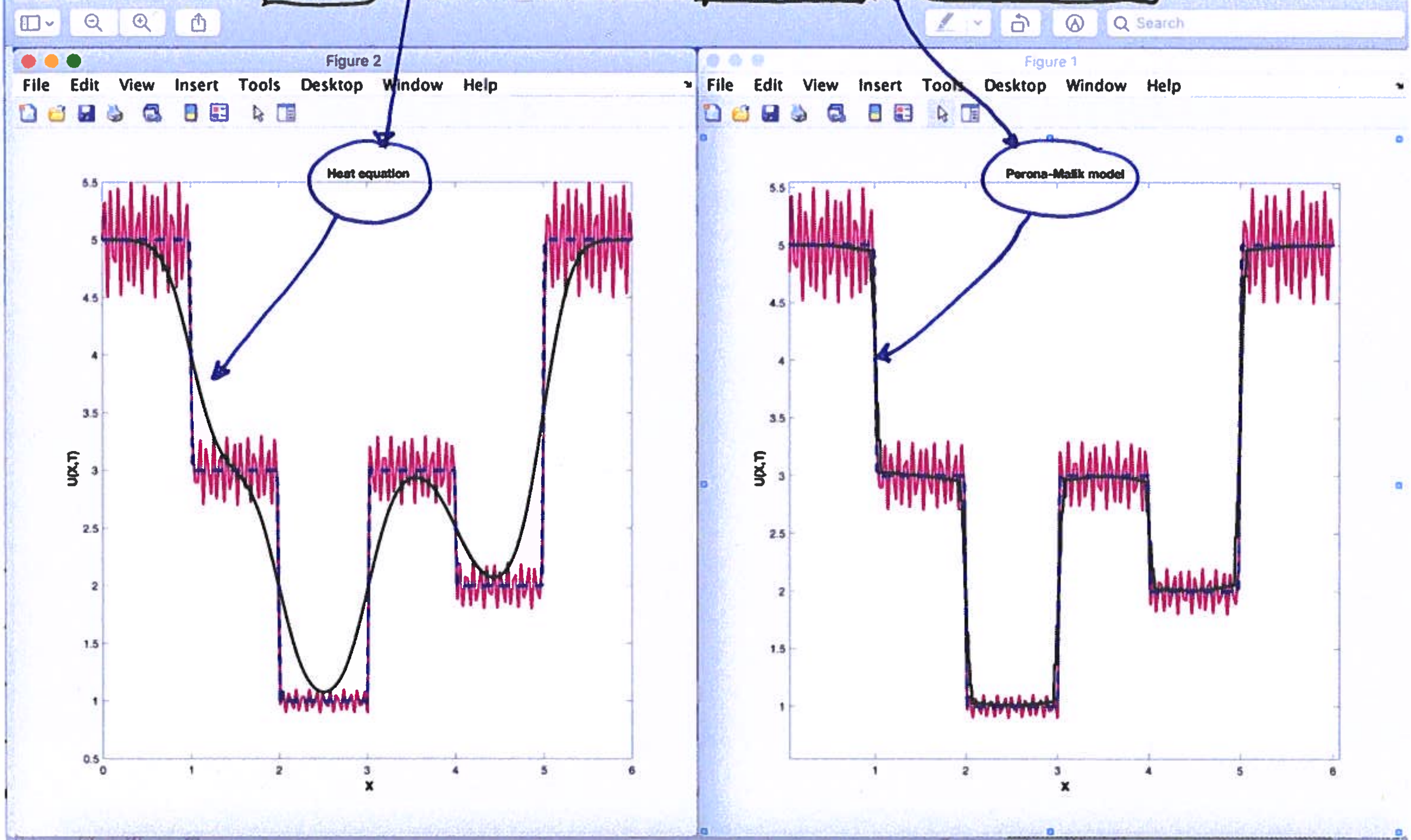
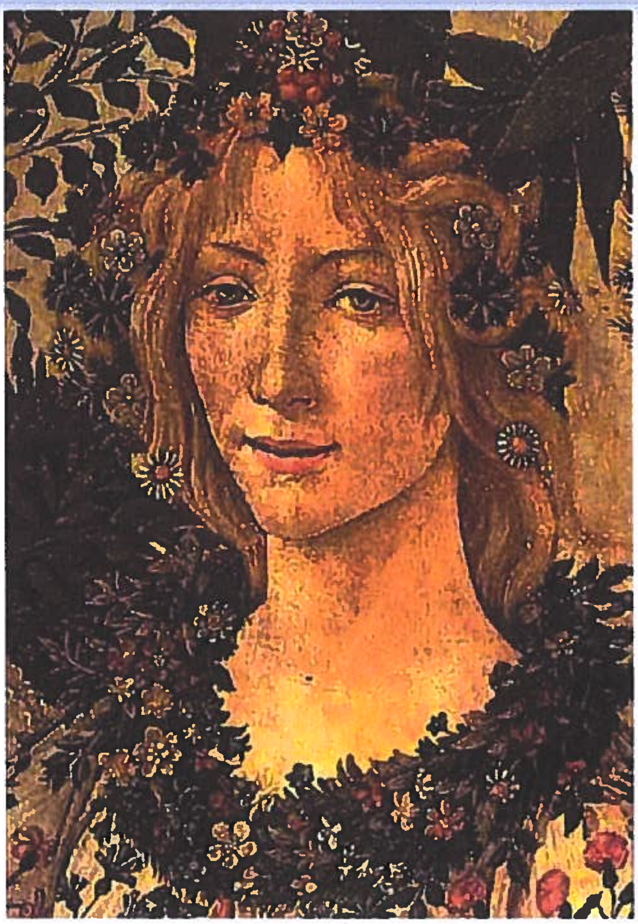
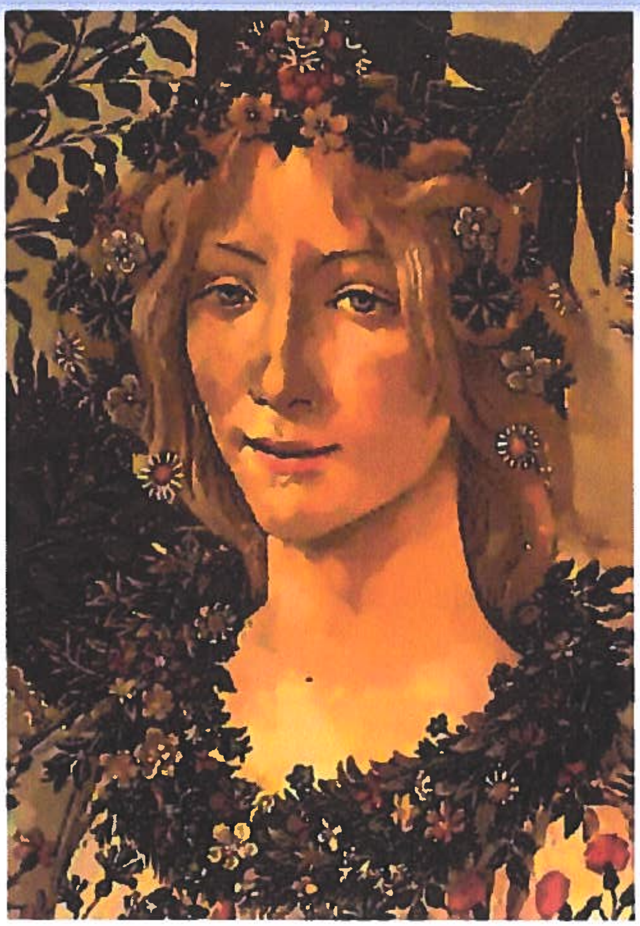
(linear heat) $\boxed{\dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u}$ $\longleftrightarrow$ $\boxed{\dfrac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\dfrac{\nabla u}{1 + \|\nabla u\|^2} \right)}$ (nonlinear diffusion)







"origineel" na toepassen "nonlinear diffusion"

Partiële DVen

Vb 1 de warmtevergelijking (diffusievergelijking) "temperatuur op een dunne staaf"

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$, gezocht $u(x,t)$

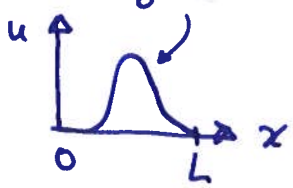
diffusie- of geleidingscoëfficiënt

"staaf" →

lengte van de staaf

1 conditie nodig op $t=0$ "begincoditie"

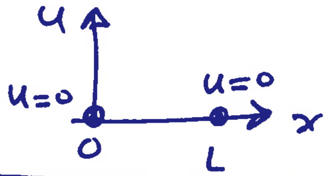
$u(x,0) = u_0(x)$



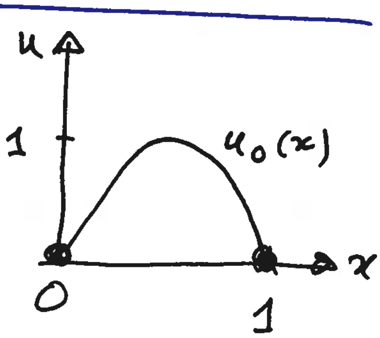
2 condities voor x nodig

1 op $x=0$ — bijv. $u(0,t)=0$

1 op $x=L$ — bijv. $u(L,t)=0$



Neem even $L=1$, $K=1$ en $u_0(x) = \sin(\pi x)$



Dan blijkt (...) de oplossing te zijn:

$$\boxed{u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x)}$$

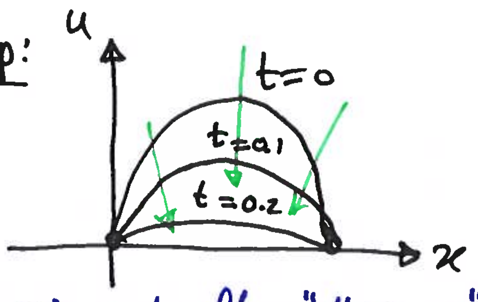
Check: $\frac{\partial u}{\partial t} = -\pi^2 e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x)$

en $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-\pi^2 t} \cdot \pi \cos(\pi x)$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-\pi^2 t} \cdot -\pi^2 \sin(\pi x)$

klopt!

Verloop:



de oplossing daalt : "diffusie"

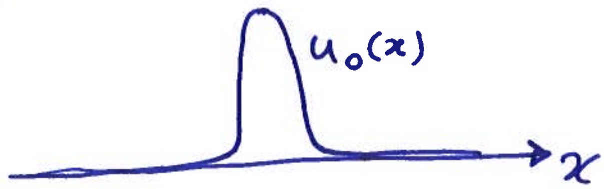
Vb 2 de advectievergelijking

(transportvergelijking, "one-way wave equation")

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + a\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = 0} \quad , \text{ gezocht } u(x,t)$$

a: gegeven constante ("snelheid")

begincoditie: $u(x,0) = u_0(x)$



(via "methode der karakteristieken", niet in deze cursus)

↳ oplossing: $\boxed{u(x,t) = u_0(x - at)}$

Check: noem $v(x,t) = x - at \Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u_0}{\partial v}\cdot\underbrace{\dfrac{\partial v}{\partial t}}_{=-a} = \dfrac{\partial u_0}{\partial v}\cdot -a$

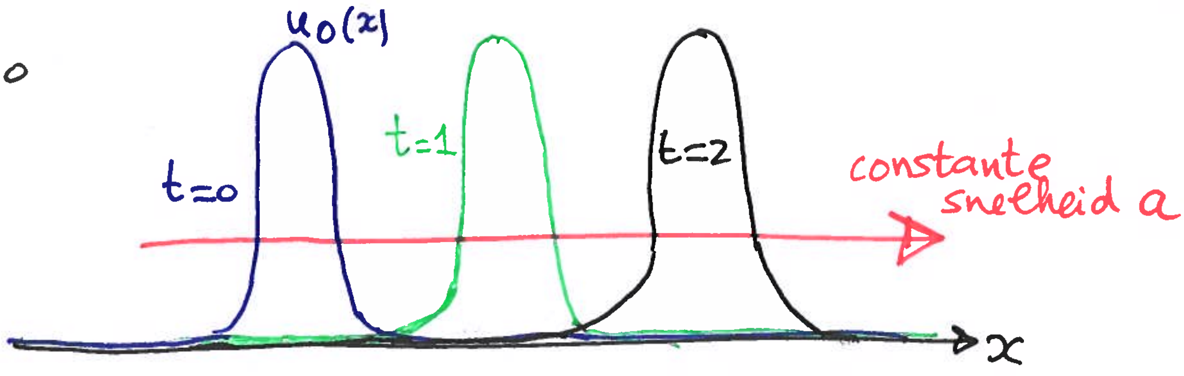
en $a\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x} = a\cdot\dfrac{\partial u_0}{\partial v}\cdot\underbrace{\dfrac{\partial v}{\partial x}}_{=1} = a\cdot\dfrac{\partial u_0}{\partial v}$

kettingregel

($\dfrac{\partial u_0}{\partial v}$ alleen als factor)

"de beginoplossing verplaatst zich met snelheid a ("transport") naar rechts voor $a>0$ en naar links voor $a<0$
(zonder van vorm te veranderen!)"

$a>0$



Vb 3 de golfvergelijking

("two-way" wave equation)

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}, \quad \text{gezocht } u(x,t)$$

twee begincondities

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \end{cases}$$

twee randcondities

bijv. $\begin{cases} u(0,t) = 0 \quad (\text{of } \sin(t)) \\ u(1,t) = 2 \quad (\text{of } e^{-t} \ldots) \end{cases}$

---

oplossing: $u(x,t) = F(x+ct)$ "willekeurige F"!

noem $x+ct = v(x,t)$

dan geldt: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \underline{\underline{c}}$ en $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \underline{\underline{1}}$

kettingregel

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial F}{\partial v} \cdot c\right] = c \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial F}{\partial v}\right] = c \cdot \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\partial F}{\partial v}\right] \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$= c \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \cdot c$$

$$= c^2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$$

èn $c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial F}{\partial v}\right] = c^2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \cdot \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{=1} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$ &

---

klopt dus! $\Rightarrow$ ∞-veel oplossingen zolang je geen begin- en eindcondities hebt opgelegd

Compleet? **NEE**, want $u(x,t) = G(x - ct)$

$= G(w(x,t))$

voldoet ook n.l.!

Check: $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial G}{\partial w} \cdot \dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial G}{\partial w} \cdot -c$

$$\underbrace{\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \underbrace{(-)(-)}_{=+}\, c^2 \frac{\partial^2 G}{\partial w^2} \quad \text{en} \quad c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial w^2}}_{\text{Klopt dus ook!}} \; \ldots$$

2 x factor "1"

"superpositieprincipe": de som van F en G is ook een oplossing

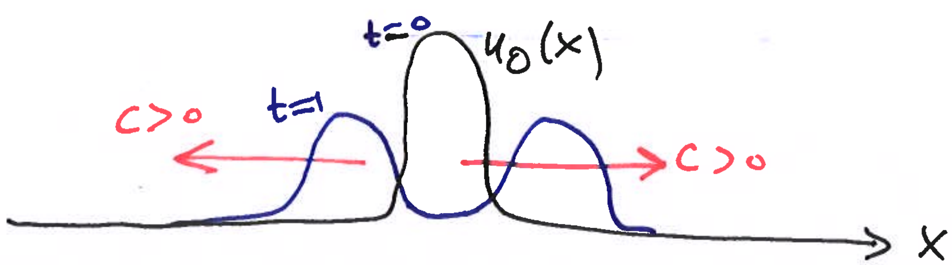
Dus $u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$

willekeurige functies
(zolang geen begin/eind condities opgelegd...)

$F(x+ct)$ is een "golf naar links" als $c>0$

$G(x-ct)$ is een "golf naar rechts" als $c>0$

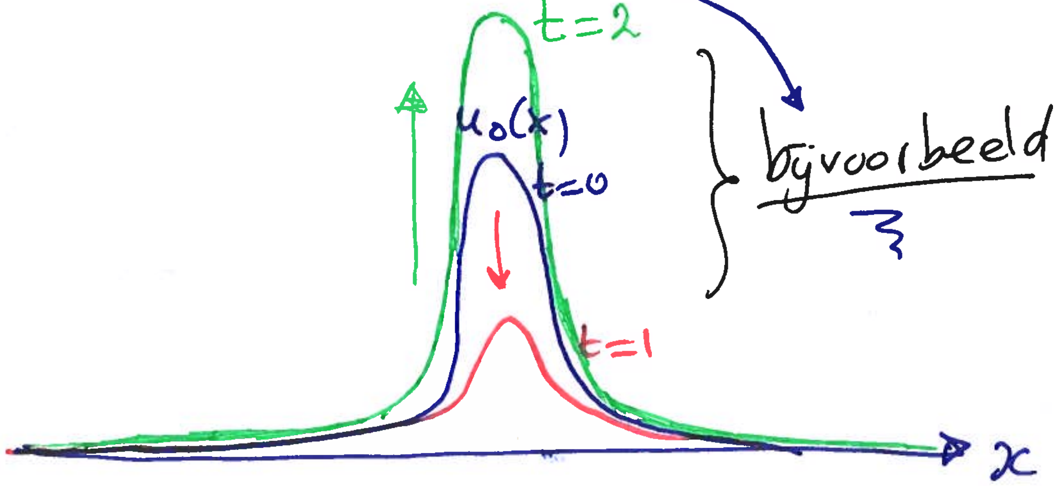
(vandaar "two-way" wave equation)



Staande golf:

amplitude hangt af van de tijd t

$$u(x,t) = A(t) \cdot u_0(x)$$



Lopende golf:

$$u(x,t) = u_0(x - ct)$$

(zie vb 2 advectievergelijking)

Speciaal voorbeeld

$$u(x,t) = 2x^2 + 18t^2$$

is één van de ∞-veel oplossingen van de golfvergelijking

$$= \underbrace{x^2 + x^2}_{=2x^2} + \underbrace{9t^2 + 9t^2}_{=18t^2} + \underbrace{6xt - 6xt}_{=0}$$

$$= x^2 + 6xt + 9t^2 + x^2 - 6xt + 9t^2$$

$$= (x+3t)^2 + (x-3t)^2$$

$$= F(x+3t) + G(x-3t)$$

dwz $\underline{c=3}$

"neem het kwadraat"

---

check: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 4x$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4$

$\dfrac{\partial u}{\partial t} = 36t$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 36$

$$\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}_{=36} = \frac{36}{\underbrace{4}_{=4}} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 9 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 3^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$c=3$ inderdaad

Hoe kom je aan oplossingen van PDVen? (6

LASTIG, er zijn verschillende trucjes/methoden
(en natuurlijk numerieke methoden
en reeksoplossingen)

Vb Soms werkt "scheiding van variabelen"
(ietsje anders dan in les 5, wel een soortgelijk principe)

Beschouw $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$

Zoek: een oplossing van de vorm: $u(x,t) = T(t) \cdot X(x)$

nog te bepalen

bereken: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}[T(t)X(x)]$

$= X(x) \cdot \frac{\partial}{\partial t} T(t) = X(x) \cdot \frac{dT}{dt}(t)$ (partiële afgeleide wordt gewone afgeleide)

en $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[T(t)X(x)]$

$= T(t) \cdot \frac{\partial}{\partial x} X(x) = T(t) \cdot \frac{d}{dx} X(x)$ (idem)

maar hou ze wel uit elkaar!

Val in: $X(x) \cdot \frac{dT}{dt}(t) + T(t) \cdot \frac{dX}{dx}(x) = 0$

Herschrijf: $\underbrace{\frac{1}{T(t)} \frac{dT}{dt}(t)}_{\text{alleen een functie van de tijd } t\,!} = - \underbrace{\frac{1}{X(x)} \frac{dX}{dx}(x)}_{\text{alleen een functie van de plaats } x\,!}$

Merk op:
Dit MOET voor ALLE x èn t gelden (7

$\Longrightarrow$ dit kan dan alleen als er zowel "links" als "rechts" dezelfde constante staat, noem deze λ.

$$\text{Dus} \begin{cases} \dfrac{1}{T(t)} \dfrac{dT}{dt}(t) = \lambda \\ \dfrac{1}{X(x)} \dfrac{dX}{dx}(x) = -\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dT}{dt}(t) = \lambda T(t) \\ \dfrac{dX}{dx}(x) = -\lambda X(x) \end{cases}$$

dit weten we al! (les 5 o.a.)

$$\Longrightarrow \begin{cases} T(t) = c_1 \cdot e^{\lambda t} \\ X(x) = c_2 \cdot e^{-\lambda x} \end{cases}$$

$$\text{dus} \quad u(x,t) = c_1 e^{\lambda t} \cdot c_2 e^{-\lambda x}$$

$$= \underbrace{c_1 \cdot c_2}_{\text{noem deze } C} \cdot e^{\lambda(t-x)}$$

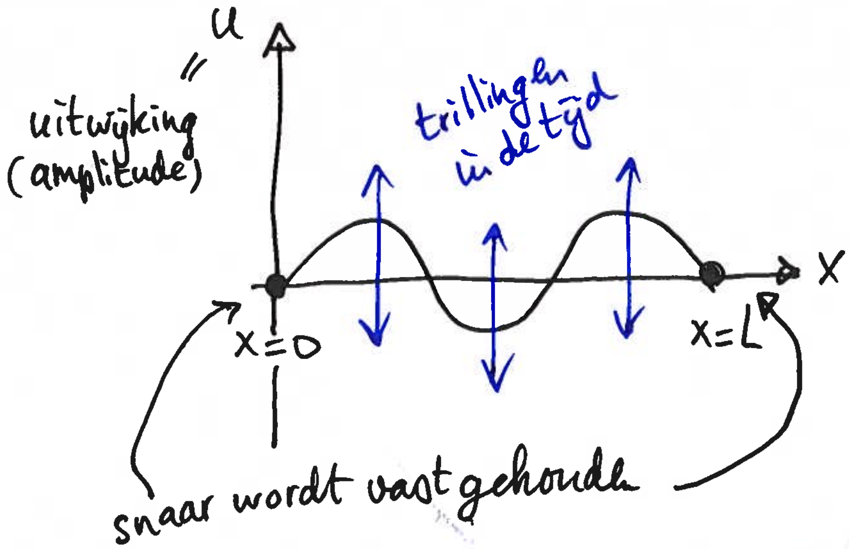
$$= C \cdot e^{-\lambda(x-t)}$$

vergelijk deze met de algemene oplossing van de advectievergelijking (voorbeeld 2)

NB. C en λ volgen uit ① beginconditie en ① randconditie

onbekenden

De trillende snaar



L = lengte van de snaar

Voor kleine trillingen (uitwijkingen) voldoet de beweging van de snaar aan de golfvergelijking (voor een afleiding hiervan of "bewijs": zie literatuur):

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \quad \text{met } c^2 = \frac{S}{\rho}$$

S ← spanning op de snaar

ρ ← constante dichtheid in de snaar

gezocht $u(x,t)$

Randvoorwaarden (twee!): $u(0,t) = 0$ (zie figuur)
$u(L,t) = 0$

Beginvoorwaarden (twee!): $u(x,0) = f(x)$ (begintoestand van de snaar)

$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$ (begin "snelheid" van de snaar)

* Neem even $g(x) = 0$ (zie blz. 12 onderaan voor $g(x) \neq 0$)

Scheiden van variabelen :

aanname : $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = X \cdot \frac{dT}{dt} \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X \cdot \frac{d^2T}{dt^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = T \cdot \frac{dX}{dx} \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = T \cdot \frac{d^2X}{dx^2}$$

invullen in golfvergelijking : $X \frac{d^2T}{dt^2} = c^2 T \frac{d^2X}{dx^2}$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}}_{\text{alleen een functie van } x \,!} = \underbrace{\frac{1}{c^2T}\frac{d^2T}{dt^2}}_{\text{alleen een functie van } t\,!}$$

dit moet voor alle waarden van x èn t waar zijn.
dit kan alleen als beide zijden van het gelijkteken dezelfde constante waarden hebben.

Noem deze constante $-\lambda$ ("heet "separation constant")

niet belangrijk (zie pag. 10)

$\Rightarrow$ twee gewone DVen : $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ T'' + c^2 \lambda T = 0 \end{cases}$

Let op : we zoeken "$u(x,t) \not\equiv 0$".
(niet identiek gelijk aan de functie die overal nul is)

$X(x)$ heeft de randvoorwaarden: $\begin{cases} X(0)=0 \\ X(L)=0 \end{cases}$

$T(t)$ heeft de beginvoorwaarde: $T'(0)=0$

(vanwege $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0$

$g=0$ hier)

(de beginvoorwaarde $u(x,0)=f(x)$ gebruiken we pas op blz 12!)

Drie gevallen: $\lambda<0$, $\lambda=0$, $\lambda>0$

1) $\lambda=0$: $\begin{cases} X''=0 \\ X(0)=X(L)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(x)=c_1x+c_2 \\ X(0)=0,\ X(L)=0 \end{cases}$

$\Rightarrow c_1=c_2=0 \Rightarrow X(x)=0$

$\Rightarrow u(x,t)=0$

(dit willen we niet)

$\lambda=0$ valt dus af

2) $\lambda<0$: $\begin{cases} X''-\mu^2X=0 \\ X(0)=X(L)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(x)=c_1e^{\mu x}+c_2e^{-\mu x} \\ X(0)=0,\ X(L)=0 \end{cases}$

$\lambda = -\mu^2$ (noem deze zo)

$\Rightarrow \begin{matrix} 0=c_1+c_2 \\ 0=c_1e^{\mu L}+c_2e^{-\mu L} \end{matrix} \overset{\text{check}}{\Rightarrow} c_1=c_2=0$

$\Rightarrow X(x)=0$

$\Rightarrow u(x,t)=0$

(dit willen we niet)

$\lambda<0$ valt dus ook af

3) $\lambda > 0$: $\begin{cases} X'' + \mu^2 X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(x) = c_1 \cos(\mu x) + c_2 \sin(\mu x) \\ X(0) = 0, X(L) = 0 \end{cases}$

$\lambda = \mu^2$ (noem deze zo)

$\Rightarrow 0 = c_1 \underbrace{\cos(0)}_{=1} + c_2 \underbrace{\sin(0)}_{=0}$

$\Rightarrow c_1 = 0$

$\Rightarrow X(x) = c_2 \sin(\mu x)$

$X(L) = c_2 \sin(\mu L) = 0$

$\xRightarrow{!!!} \mu = \dfrac{n\pi}{L}$

en dus $\lambda = \mu^2 = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}$

$n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

∞ - veel waarden !

$X_n(x) = c_2 \sin\left(\dfrac{n\pi}{L} x\right)$

$n = 1, 2, 3, \ldots$ ∞-veel!

$\lambda = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}$ invullen in T-DV : $T'' + \underbrace{\dfrac{c^2 n^2 \pi^2}{L^2}}_{>0!!} T = 0$

$n = 1, 2, 3, \ldots$

$\Rightarrow T(t) = k_1 \cos\left(\dfrac{n\pi c t}{L}\right) + k_2 \sin\left(\dfrac{n\pi c t}{L}\right)$

$T'(t) = -\dfrac{n\pi c}{L} k_1 \sin\left(\dfrac{n\pi c t}{L}\right) + \dfrac{n\pi c}{L} k_2 \cos\left(\dfrac{n\pi c t}{L}\right)$

$T'(0) = -\dfrac{n\pi c}{L} k_1 \underbrace{\sin(0)}_{=0} + \dfrac{n\pi c}{L} k_2 \underbrace{\cos(0)}_{=1} = 0$

$\Rightarrow k_2 = 0$

$$\Rightarrow T_n(t) = k_1 \cos\left(\frac{n\pi c t}{L}\right) \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

(∞-veel!)

index toevoegen

$$\Longrightarrow u_n(x,t) = \underbrace{c_2 \cdot k_1}_{\text{noem deze } C_n\text{!!}} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi c t}{L}\right)$$

$n = 1,2,3,\ldots$ (∞-veel!)

superpositieprincipe

$$\Longrightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$$

oscillaties in de tijd!

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi c t}{L}\right)$$

beginvoorwaarde nu gebruiken:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\underbrace{\cos(0)}_{=1} \overset{\text{gegeven}}{=} f(x)$$

Dus de c_n's zijn precies de coëfficiënten in de Fourier-sinus reeks met periode $2L$ van $\tilde{f}(x)$. !

De functie $\tilde{f}(x)$ is de functie $f(x)$ maar dan periodiek uitgebreid en oneven "gemaakt".

$$\Longrightarrow c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

En hiermee hebben we de golfvergelijking opgelost.

(als $g(x) \neq 0$, dan soortgelijke beschouwingen, geeft extra $\cos(\ldots t)$ term)

Voor de warmtevergelijking kunnen we dit ook uitvoeren.

[in feite berekenen we een Fourier reeks oplossing van een partiële DV; vergelijk dit met een machtreeks oplossing van een gewone DV uit de vorige les!]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = K \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & , 0 < x < L , t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & , t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & , 0 < x < L \end{cases}$$

aanname:

$u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ $\overset{---}{\Longrightarrow} \begin{cases} X'' + \mu^2 X = 0 \\ X(0) = 0, X(L) = 0 \end{cases}$

(de twee andere mogelijke gevallen vallen weer af!)

$$\overset{---}{\Longrightarrow} \left.\begin{array}{l} X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ \text{en } T_n(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2 K}{L^2} t} \end{array}\right\} n = 1, 2, 3, \ldots$$

vanwege $\boxed{T' + \frac{K n^2 \pi^2}{L^2} T = 0}$

superpositie principe $\overset{---}{\Longrightarrow}$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2 K}{L^2} t} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

demping in de tijd! "diffusie"

$c_n = \ldots$ (zie golfvergelijking)

Fourier-reeks oplossing van de warmte-vergelijking

Fourier-transformatie om PDV en op te lossen

transportvergelijking met $a = \frac{1}{3}$: $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$

Neem F-trafo t.o.v. de x-variabele (en laat t ongemoeid)

$$\Rightarrow \underbrace{\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial x}\right)} = \underbrace{\mathcal{F}(0)}_{=0}$$

$$= \mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{1}{3}\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}(u) + \frac{1}{3}\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0}$$

eigenschap $\mathcal{F}$ (zie les 4)

DEZE BLADZIJDE IS GEEN TENTAMENSTOF ("voor de liefhebber")

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\hat{u}(\omega,t) + \frac{1}{3} i\omega\, \hat{u}(\omega,t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d\hat{u}}{dt}(\omega,t) = -\frac{1}{3} i\omega\, \hat{u}(\omega,t) \\ \hat{u}(\omega,t) = \mathcal{F}(f(x)) = \hat{f}(\omega) \end{cases}$$

noem

een gewone DV! (in t)

ω kan je hier zien als een parameter

los op

$$\hat{u}(\omega,t) = \hat{f}(\omega)\, e^{-\frac{i\omega}{3}t}$$

Pas nu inverse F-trafo toe om weer "terug" te keren naar "x".

$$\underbrace{\mathcal{F}^{-1}(\hat{u}(\omega,t))}_{=u(x,t)} = \underbrace{\mathcal{F}^{-1}\left(\hat{f}(\omega)\, e^{-\frac{i\omega}{3}t}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{-\frac{i\omega t}{3}} e^{ix\omega}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega(x-\frac{1}{3}t)}\, d\omega = f\left(x - \frac{t}{3}\right)$$

herken inverse F-trafo