Een <u>machtreeks</u> rond het punt 0:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 x^0 + c_1 x^1 + c_2 x^2 + \cdots$$
$$= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

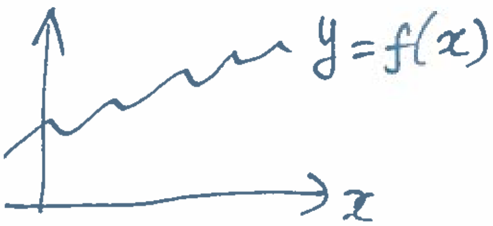
een <u>functie van x</u>

Noem deze $f(x)$

Rond een ander punt a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

(bijv. $a = -\pi$ of 3 of $\sqrt{5}$ ...)



<u>Vragen</u>:

1) voor welke waarden van x bestaat de machtreeks?

2) wat zijn de coëfficiënten c_n?

3) hoe bereken je ze als $f(x)$ bekend is?

4) wat kan je ermee? (DVen oplossen, functies benaderen, en nog veel meer!)

5) welke f, als je de c_n's wel hebt?

Schrijf uit:
(stel $f(x)$ bekend)

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

$f(x)$ gegeven; $(x-a)$, $(x-a)^2$ gegeven

i) vul in $x=a$

$$\Rightarrow f(a) = c_0 + c_1(a-a) + c_2(a-a)^2 + \cdots$$
$$= c_0 + c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0^2 + \cdots$$
$$= c_0$$
$$\Rightarrow \boxed{c_0 = f(a)}$$

ii) bereken $f'(x)$: $f'(x) = 0 + c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots$

vul in $x=a$

$$\Rightarrow f'(a) = c_1 + 2c_2(0-0) + 3c_3(0-0)^2 + \cdots$$
$$= c_1$$
$$\Rightarrow \boxed{c_1 = f'(a)}$$

--- het lijkt alsof --- $c_2 = f''(a)$, $c_3 = f'''(a)$, enzovoort

PAS OP

iii) bereken $f''(x)$: $f''(x) = 0 + 2c_2 + 6c_3(x-a) + \cdots$

vul in $x=a$ $\Rightarrow f''(a) = 2c_2 + 6c_3 \cdot 0 + 0 + 0 \cdots$
$$= 2c_2$$
$$\Rightarrow \boxed{c_2 = \tfrac{1}{2} f''(a)}$$

!!

verder gaan op deze manier:

$$\text{----} \Rightarrow f'''(a) = 6.c_3 \text{ en dus } \boxed{c_3 = \frac{1}{6} f'''(a)}$$

$$\text{----} \quad c_4 = \frac{1}{24} f''''(a) \,, \; c_5 = \frac{1}{120} f'''''(a) \text{, etcetera}$$

Herinner je (of definieer nu): $n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1$

oftewel $1! = 1$ [leg vast: $0! = 1$]

$2! = 2$

$3! = 6$

$4! = 24$

$5! = 120$

etc

$$\Rightarrow \boxed{c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}}$$

! staat voor "faculteit"

Dus :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

f bekend, a gegeven $\Rightarrow$ reeks bekend

Taylorreeks rond a

---

voorbeeld: $f(x) = e^x$ rond 0 (d.w.z. $a = 0$)

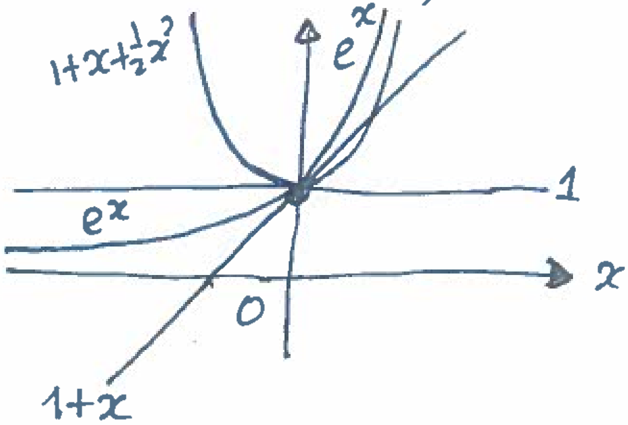
bereken $f'(x) = e^x, f''(x) = e^x, f'''(x) = e^x, \ldots$

en $f'(0) = 1, f''(0) = 1, f'''(0) = 1, \ldots$

$$\Rightarrow \quad c_n = \frac{1}{n!} \quad \text{en} \quad \underset{\substack{\parallel \\ e^x}}{f(x)} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots$$

Benaderingen van e^x rond 0 :

$$f(x) \approx 1 \quad , f(x) \approx 1 + x, \; f(x) \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2, \; \ldots$$



$\approx$: ongeveer gelijk aan
benaderd door

Stelling (zonder bewijs)

Bereken $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$ (de "convergentiestraal")

Dan is de reeks $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ convergent (eindig, bestaat)

voor $-R < x - a < R$ (of: $|x-a| < R$)

als $R = 0$, dan is de reeks slechts convergent voor $x = a$

als $R = \infty$, dan is de reeks convergent voor alle waarden van x

voorbeeld$_1$:

$$f(x) = e^x \text{ rond } 0, \quad c_n = \frac{1}{n!}$$

$$\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \left|\frac{1/n!}{1/(n+1)!}\right| = \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)\cdots 3.2.1}{n(n-1)(n-2)\cdots 3.2.1}$$

$$= n+1$$

voor $n \to \infty$: $n+1 \to \infty \Rightarrow R = \infty$

en dus de Taylorreeks is convergent voor alle x

voorbeeld$_2$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \quad (\neq e^x)$$

welke f?

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1/n}{1/(n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$$

$\Rightarrow$ reeks convergent voor $-1 < x < 1$ (of: $|x| < 1$)

wat voor $x = 1$? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonische reeks (is divergent; zie vorige les)

en voor $x = -1$? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \cdots > -1$

$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdots$ en dus $< -\frac{1}{2}$

oftewel $-1 < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} < -\frac{1}{2} \Rightarrow$ convergent

Toepassingen (zie ook lesstof verderop in de cursus!)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = ?$$

invullen geeft $\frac{0}{0}$

en uit "$\frac{0}{0}$" kan in principe elk getal uitkomen, zelfs $-\infty, -3, 0, 1, 200, \infty$ ----

schrijf uit: $$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots}{x}$$

Taylorreeks van $\sin(x)$ rond 0

$$= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$$

en neem nu limiet: $\lim_{x \to 0} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} \cdots\right) = 1$

Komt er dan niet altijd 1 uit een dergelijke limiet met "$\frac{0}{0}$"?

NEE!

anderen voorbeeld: $$\lim_{x \to 0} \frac{x \sin(x)}{\cos(x) - 1} \stackrel{?}{=} \cdots = \frac{0}{0} = ?$$

Schrijf uit: $$\frac{x \sin(x)}{\cos(x) - 1} = \frac{x\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots\right)}{\underbrace{\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 \cdots\right)}_{\text{Taylorreeks van } \cos(x) \text{ rond } 0} - 1}$$

$$= \frac{x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \cdots}{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \cdots}$$

delen door x^2

$$= \frac{1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \cdots}{-\frac{1}{2} + \frac{1}{24}x^2 - \cdots}$$

neem nu $\lim_{x \to 0} \Rightarrow \frac{1 - 0 + 0 - \cdots}{-\frac{1}{2} + 0 - \cdots} = \frac{1}{-1/2} = -2$

Als je een functie benadert door een eindige versie van de Taylorreeks, hoe groot is de fout?

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \quad (\infty\text{-veel termen})$$

gegeven $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

kiezen

$$\approx \underbrace{\sum_{n=0}^{N} c_n (x-a)^n}_{\text{Taylorpolynoom van graad } N} \quad (\text{eindig veel termen})$$

$$\underset{\text{en exact}}{f(x) =} \underbrace{\sum_{n=0}^{N} c_n (x-a)^n}_{\text{benadering}} + \underbrace{\frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x-a)^{N+1}}_{\text{de fout}}$$

ξ: een onbekend punt tussen x en a

speciaal geval $N=0$: $f(x) = f(a) + f'(\xi)(x-a)$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(\xi)$$ "middelwaardestelling"

Samenstellen van Taylorreeksen

vb $\quad f(x) = e^{\sin(x)}$ $\quad$ (rond 0) $\quad$ nooit vergeten te melden!

opgave: bepaal de Taylorreeks t/m x^3 termen

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots$$

$$e^{\sin(x)} = 1 + \sin(x) + \frac{1}{2}\big(\sin(x)\big)^2 + \frac{1}{6}\big(\sin(x)\big)^3 + \cdots$$

$$= 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3!} \cdots\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{3!} \cdots\right)^3 + \cdots$$

$$= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \underbrace{\text{H.O.T.}}_{\text{hogere orde termen}} + \frac{1}{2}\left(x^2 + \text{H.O.T.}\right) + \frac{1}{6}\left(x^3 + \text{H.O.T.}\right) + \text{H.O.T.}$$

$$= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \text{H.O.T.}$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \underline{\underline{0 \cdot x^3}} + \text{H.O.T.}$$