machtreeks / Taylorreeks

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

(rond 0)

Taylor

$$\left[a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right]$$

$$\underset{\text{benadering}}{\approx} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_N x^N = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$$

$$= a_0 \cdot 1 + a_1 x + \dots + a_N x^N$$

De functies $1, x, x^2, x^3, \dots$ "vormen een basis"

voorbeeld: $e^x = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \dots$ = "∞-e lineaire combinatie van functies $1, x, x^2, \dots$"

machtreeks / Taylorreeks rond 0 geeft lokale benaderingen (rond 0)

---

hoe voor periodieke functies $f(x)$? (over een interval, dus niet lokaal)

Fourier: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$

periodieke functies

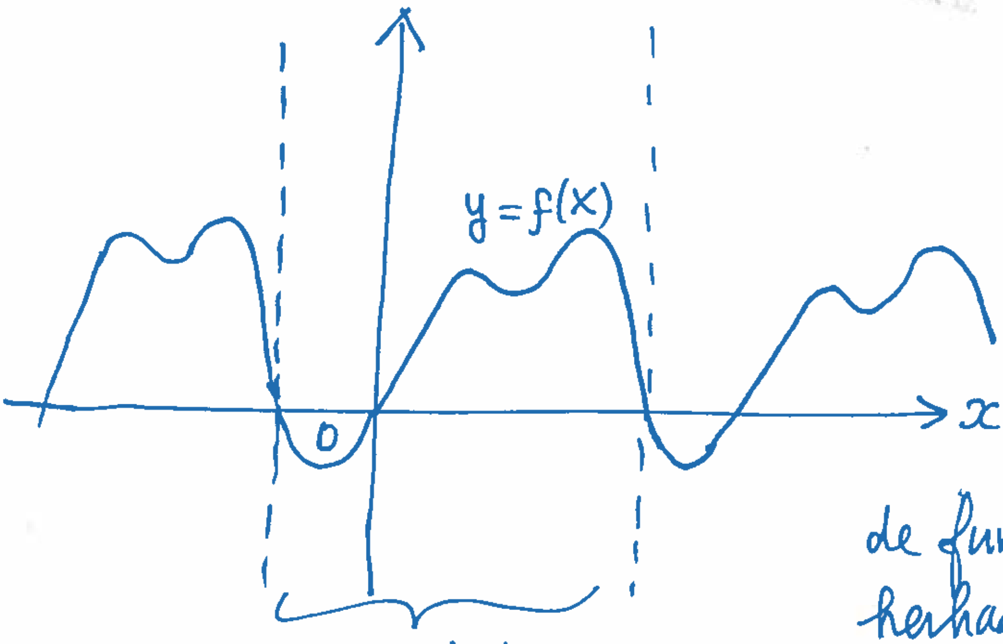
$$\approx \sum_{n=0}^{N} (a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx))$$

De functies $\sin(x), \sin(2x), \sin(3x), \ldots$ ($\sin(0x)=0$ doet niet mee)
èn $1, \cos(x), \cos(2x), \cos(3x), \ldots$ ($\cos(0x)=1$ doet wel mee)

"vormen een basis" voor periodieke functies (globaal)

Fourierreeksen (volgende les: Fourierintegralen en Fourier-tranformatie)

* Bernoulli, d'Alembert, Euler ≈ 1750
  ("trillingen van snaren")
* Fourier 1768–1830 ("warmtestromen")
* signaalanalyse en beeldverwerking (MRI)
  (metingen)



1 periode

de functie $f(x)$ herhaalt zich (is periodiek)

$$\text{frequentie} = \frac{1}{\text{periode}} \quad (\text{sec}^{-1})$$

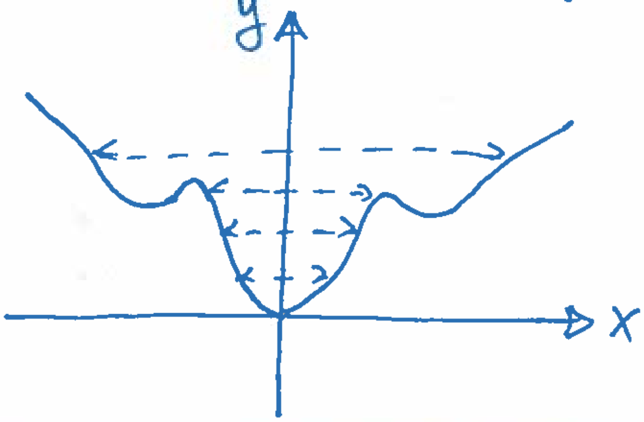
Even en oneven functies

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heet **even** als $g(x) = g(-x)$ voor alle x-waarden

voorbeelden: x^2, $|x|$, $\cos(x)$, $\cos(2x)$, ...

$(-x)^2 = x^2$ $\quad |-x| = |x| \quad \cos(-x) = \cos(x) \quad \cos(-2x) = \cos(2x)$

de grafiek van g is dan symmetrisch in de y-as:

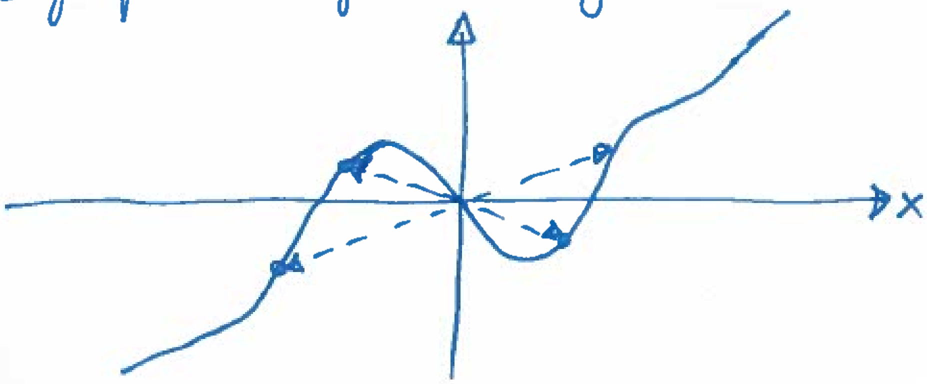


$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heet **oneven** als $g(-x) = -g(x)$ voor alle waarden van x

voorbeelden: x, x^3, $\frac{1}{x}$, $\sin(x)$, $\sin(5x)$, ...

$(-x) = -(x)$ $\quad (-x)^3 = -(x^3) \quad \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} \quad \sin(-x) = -\sin(x) \quad \sin(-5x) = -\sin(5x)$

de grafiek van g is dan symmetrisch in de oorsprong:



Niet alle functies zijn even of oneven!

voorbeelden: e^x, $1+3x$, ...

$$\begin{cases} e^{-x} \neq e^{x} \\ e^{-x} \neq -e^{x} \end{cases} \qquad \begin{aligned} 1+3x &\neq 1-3x \\ 1+3x &\neq -(1+3x) \end{aligned}$$

Wel geldt: iedere functie f is te schrijven als een combinatie van een even en een oneven functie: $f(x) = g(x) + h(x)$ met g even en h oneven.

N.l. "neem" $g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ en $h(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$

dan: $g(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) + f(\underbrace{--}_{=+}x)) = \frac{1}{2}(f(-x) + f(x))$

$$= \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) = g(x)$$

$$\begin{aligned} h(-x) &= \frac{1}{2}(f(-x) - f(--x)) \\ &= \frac{1}{2}(f(-x) - f(x)) \\ &= -\frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \\ &= -h(x) \end{aligned}$$

en $g(x) + h(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$

$$= \frac{1}{2}f(x) + \underbrace{\frac{1}{2}f(-x) + \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}f(-x)}$$

$=0$

$$= f(x)$$

voorbeeld: $e^x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) + \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

niet even, niet oneven $= \underbrace{\cosh(x)}_{\text{even}} + \underbrace{\sinh(x)}_{\text{oneven}}$

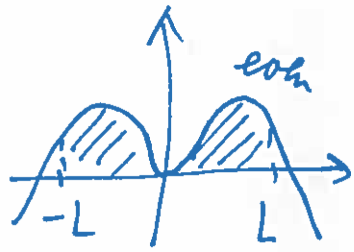
Enkele eigenschappen:

a)
- g even en h oneven $\Rightarrow$ $\underbrace{gh}_{\text{produkt}}$ oneven
- g oneven en h oneven $\Rightarrow$ gh even
- g even en h even $\Rightarrow$ gh even
- g oneven en h even $\Rightarrow$ gh oneven

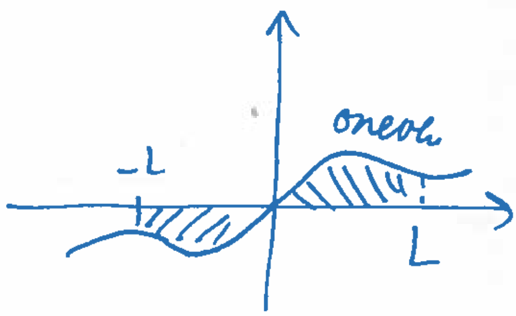
b)
- g even $\Rightarrow$ g' oneven
- h oneven $\Rightarrow$ h' even

c) $L > 0$, g even en h oneven

$$\Rightarrow \int_{-L}^{L} g(x)\,dx = 2\int_0^L g(x)\,dx$$



en $$\int_{-L}^{L} h(x)\,dx = 0$$



periodieke functies

$p > 0$, f heet <u>periodiek</u> als $f(x+p) = f(x)$ voor <u>alle</u> waarden van x

p heet de <u>periode</u> van f; f heet p-periodiek

<u>vb</u> $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\sin(4x)$, ...
$(p = 2\pi)$ $(p = 2\pi)$ $(p = \frac{\pi}{2})$

<u>Let op</u>: als $f(x+p) = f(x)$

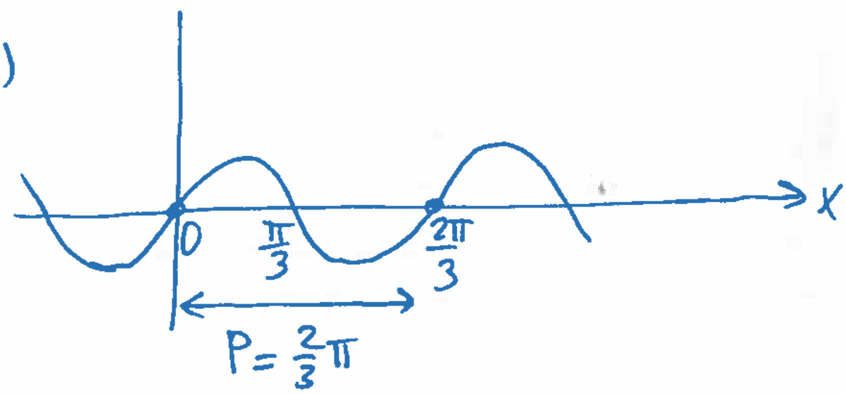
dan ook $f(x+2p) = f(\underbrace{(x+p)}_{\text{is ook een waarde op de x-as}}+p) = f(x)$

en $f(x+3p) = f(x)$, $f(x+4p) = f(x)$, ...

m.a.w. ook $2p, 3p, 4p$, ... zijn perioden van f!

De "<u>kleinste</u>" <u>periode</u> van f heet <u>fundamentele periode</u>
of gewoonweg <u>dè periode</u>

<u>vb</u> $f(x) = \sin(3x)$



De vraag van vandaag: stel f heeft periode 2π, kunnen we dan schrijven

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right) \boxed{?}$$

zie verderop waarom dit handig is ....

waar is b_0? zie straks

hebben ook periode $= 2\pi$

Stel dat dit waar is, hoe kunnen we de a_n en b_n bepalen? (bij Taylor namen we afgeleiden, $x=a$ invullen, etcetera ...)

Stap $\boxed{1}$ Neem $\int_{-\pi}^{\pi}$ aan beide kanten van de gelijkheid $\Rightarrow$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right) dx$$

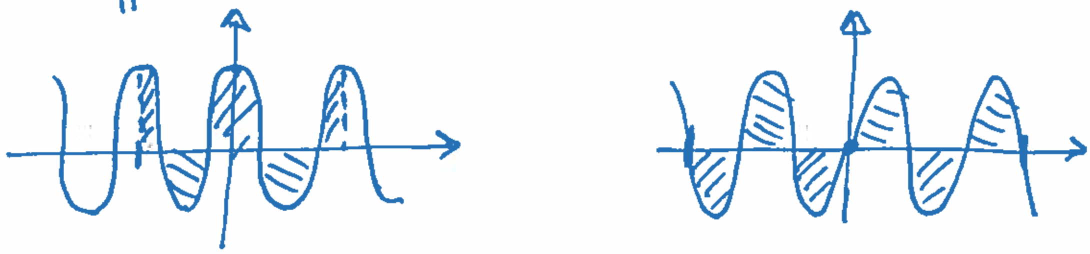
$$= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx = \frac{a_0}{2} x \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi}$$

$$= \frac{a_0}{2} (\pi - (-\pi))$$

$$= \pi a_0$$

$$\underset{?!}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\,dx \right)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,dx = 0 \quad \text{en} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\,dx = 0$$



$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \pi \cdot a_0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

stap $\boxed{2}$ { vermenigvuldig beide kanten met cos (mx)
integreer weer van $-\pi$ naar π

↑ andere index

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\cos(mx)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right)\right\}\cos(mx)\,dx$$

$$\underbrace{= \frac{a_0}{2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\,dx}_{=0}}_{=0}$$

(zie linksboven)

?!

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)\,dx$$

herinner je (of zoek op ...): $\cos(nx)\cos(mx)$

$$= \frac{1}{2}\cos((n+m)x) + \frac{1}{2}\cos((n-m)x)$$

en $\sin(nx)\cos(mx)$

$$= \frac{1}{2}\sin((n+m)x) + \frac{1}{2}\sin((n-m)x)$$

gebruik deze eigenschappen in de laatste twee integralen

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos((n+m)x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos((n-m)x)\,dx}_{=0 \text{ voor alle combinaties van } n \text{ en } m}$$

BEHALVE : $n=m \Rightarrow \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos((n-m)x)\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\cos(0x)}_{=1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi$$

en $\underbrace{\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin((n+m)x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin((n-m)x)\,dx}_{=0 \text{ voor alle combinaties van } n \text{ en } m}$

$= 0$ voor <u>alle</u> combinaties van n en m

$$\Longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx = a_m\cdot\pi$$

$$\Rightarrow a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx$$

$m = 1, 2, 3, \ldots$

dwz --- $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\,dx$ $n = 1, 2, 3, \ldots$

gewoon een andere naam aan de index geven ...

NET ZO, maar dan vermenigvuldigen met $\sin(mx)$ en integreren van $-\pi$ naar π

----- $\Longrightarrow$ $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\,dx$

$n = 1, 2, 3, \ldots$

[$b_0 = ?$ (blijkt niet voor te komen, dwz $= 0$)]

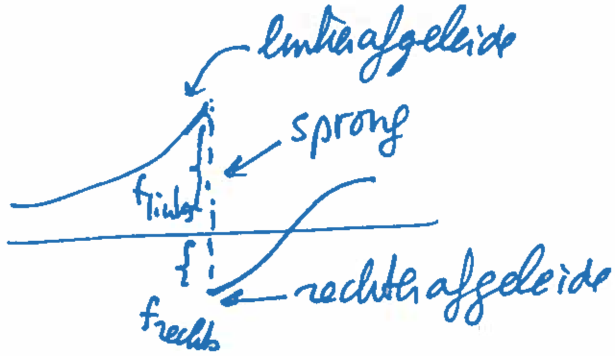
De reeks wordt de Fourierreeks van f genoemd

Wanneer is deze reeks van f $=$ f ?

Stelling (zonder bewijs): als f periodiek is met periode 2π
en f is stuksgewijs continu op $[-\pi, \pi]$
en f heeft een "linksafgeleide" en een "rechtsafgeleide" in elk punt

Dan convergeert de Fourierreeks van f èn $= f(x)$
(met de a_n en b_n zoals aangegeven)

stuksgewijs continu :



in de "sprongen" geldt: $\sum_{n=1}^{\infty} \cdots =$ gemiddelde van f_{links} en f_{rechts}

Speciale gevallen :

f even $\Rightarrow$ $\underbrace{f(x)}_{\text{even}} \cdot \underbrace{\sin(nx)}_{\text{oneven}}$ oneven $\Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = 0$

$\Rightarrow$ F-reeks heeft alleen de cosinustermen

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

f oneven $\Rightarrow$ $\underbrace{f(x)}_{\text{oneven}} \cdot \underbrace{\cos(nx)}_{\text{even}}$ oneven $\Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = 0$

$\Rightarrow$ F-reeks heeft alleen de sinustermen

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

F-reeksen kunnen gebruikt worden om periodieke functies te benaderen (net als Taylorreeksen voor benaderingen rondom een punt)

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$$

Een andere periode dan 2π?

Stel f heeft periode $p = 2L$ ipv 2π

Dan: $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \right)$$

met $$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

(voor $L = \pi$ krijg je de eerder afgeleide formules terug)

In principe hebben Fourierreeksen alleen zin voor periodieke functies !