Differentiaalvergelijkingen

DVen

partiële DVen

(partial differential equations)
PDEs

- warmtevergelijking

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

geleidingscoëfficiënt

$T(x,t) = ?$

- wet van behoud van massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

$\rho(x,y,z,t) = ?$

(snelheidsveld $\vec{v}$ gegeven)

- golfvergelijking

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$u(x,y,t) = ?$

amplitude van een golf

partiële afgeleiden

gewone DVen

(ordinary differential equations)
ODEs

zoek de functie $y(x)$

die voldoet aan de DV:

$$\begin{cases} y'(x) = \mathbf{F}(y(x), x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

gegeven

"gewone" afgeleiden

Soms wordt $y(x)$ vervangen door $x(t)$ of $u(t)$!

dwz $x'(t) = \mathbf{F}(x(t), t)$

of $u'(t) = \mathbf{F}(u(t), t)$

of $u'(x) = \mathbf{F}(u(x), x)$

of ... etcetera

Een speciale vorm van DVen

"separabele vergelijkingen" ("scheidbaar")

$$\boxed{y'(x) = f(x)\cdot g(y)}$$

f en g gegeven

$\Updownarrow$

anders opgeschreven: $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y)}$

$\Updownarrow$

"kruiselings vermenigvuldigen" (formeel): $\boxed{\dfrac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx}$

$\Updownarrow$

integreer aan beide kanten: $\boxed{\displaystyle\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx}$

$\Updownarrow$

integratieconstante

primitiveer aan beide kanten: $\boxed{G(y) = F(x) + C}$

in feite:

$G(y) + C_1 = F(x) + C_2$

$\Leftrightarrow\ G(y) = F(x) + \underbrace{C_2 - C_1}$

$\Leftrightarrow\ G(y) = F(x) + C$ (noem deze zo)

G = primitieve van $\frac{1}{g}$ en F = primitieve van f

$\Updownarrow$

"los op": $\boxed{y = G^{-1}(F(x) + C)}$

C volgt uit de extra voorwaarde:

$y(x_0) = y_0$ (beginvoorwaarde)

Voorbeelden

1)

$$\begin{cases} y' = f(x) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

~~geen y-afhankelijkheid in het rechterlid~~

gewoon integreren

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = y_0 + \int_0^x f(\tilde{x})\,d\tilde{x}}$$

(bereken de primitieve van f en vul de juiste grenzen in)

Controleer door in te vullen:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 0 + \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x f(\tilde{x})\,d\tilde{x} \\ \quad = f(x) \\ y(0) = y_0 + \underbrace{\displaystyle\int_0^0 f(\tilde{x})\,d\tilde{x}}_{=0} = y_0 \end{cases}$$

2)

$$\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

gegeven parameter

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \lambda y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \lambda\, dx$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \lambda \int dx$$

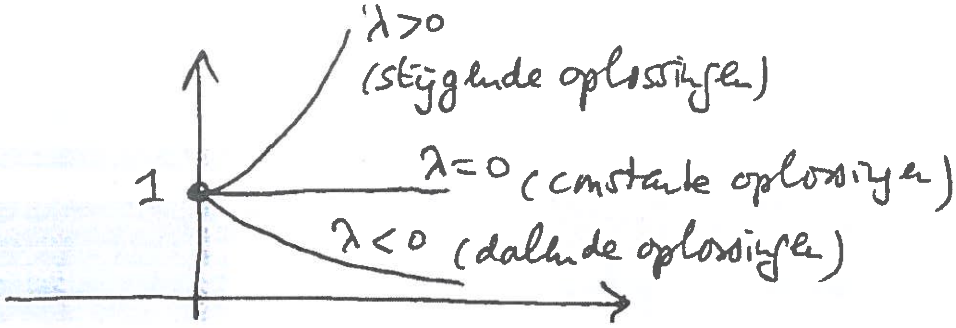
$$\Leftrightarrow \ln(y) = \lambda x + \bar{c}$$

$$\Leftrightarrow y = e^{\lambda x + \bar{c}}$$

$$\Leftrightarrow y = \underbrace{e^{\bar{c}}}_{\text{noem deze } c} . e^{\lambda x} = c . e^{\lambda x}$$

$$y(0) = c . e^{\lambda . 0} = c . 1 = c \underset{\text{moet}}{=} 1$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = e^{\lambda x}}$$



---

3) $y' = 3yx^2 \iff \dfrac{dy}{y} = 3x^2\,dx$

$\iff \displaystyle\int \frac{dy}{y} = 3\int x^2\,dx$

$\iff \ln(y) = x^3 + \bar{c}$

$\iff y = e^{x^3+\bar{c}}$

$\iff y = c \cdot e^{x^3}$

---

4) $\dfrac{dx}{dt} = e^{t-x} \iff \dfrac{dx}{dt} = e^{t} \cdot e^{-x}$

$\iff e^{x}\,dx = e^{t}\,dt$

$\iff \displaystyle\int e^{x}\,dx = \int e^{t}\,dt$

$\iff e^{x} = e^{t} + c$

$\iff x(t) = \ln(e^{t} + c)$

---

5) $\begin{cases} y' = g(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ ← geen directe x-afhankelijkheid in rechterlid (wel indirekt via $y = y(x)$)

$\iff \displaystyle\int \frac{dy}{g(y)} = \int dx$

→

$$\Longleftrightarrow \int_{y_0}^{y} \frac{d\tilde{y}}{g(\tilde{y})} = \underbrace{\int_0^x d\tilde{x}}_{\tilde{x}\big|_{\tilde{x}=0}^{\tilde{x}=x} = x}$$

(geen C, want je hebt de beginwaarde al gebruikt in de integratiegrenzen)

$$\Longleftrightarrow \boxed{x = \int_{y_0}^{y} \frac{d\tilde{y}}{g(\tilde{y})}}$$

---

6) een bijzondere DV

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int 2\,dx$$

$$\Longleftrightarrow 2.\sqrt{y} = 2x + C$$

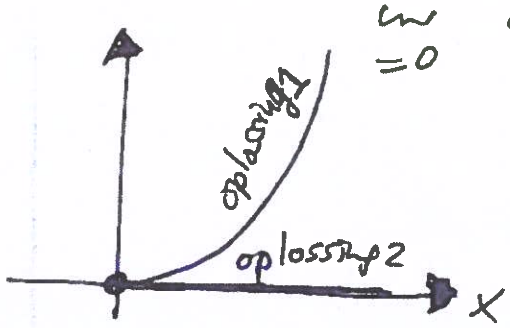
$$\Longleftrightarrow y = \left(x + \frac{C}{2}\right)^2$$

$$y(0) = \left(0 + \frac{C}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow y = x^2$$

Echter, er is nog een oplossing, nl $y(x) = 0$ voor alle x-waarden

vul maar in: $\underbrace{0'}_{=0} = \underbrace{2\sqrt{0}}_{=0}$ ✓ en $y(0) = 0$ ✓



let dus op!

7) nog een bijzondere DV

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \iff \int \frac{dy}{y^2} = \int dx$$

$$\iff -\frac{1}{y} = x + C$$

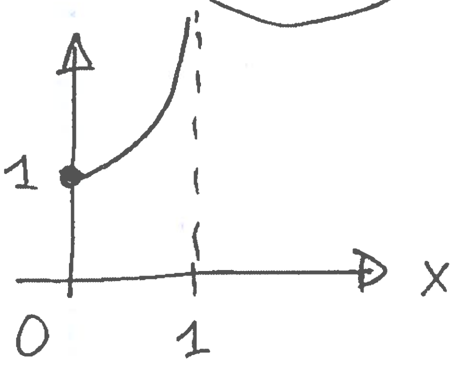
$$\iff \frac{1}{y} = -(x+C)$$

$$\iff y = \frac{-1}{x+C}$$

$$y(0) = -\frac{1}{C} = 1 \Rightarrow C = -1$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{1-x}$$

de oplossing bestaat slechts voor $x \in [0,1)$



8)
$$\begin{cases} y' = \mu(2-y)\, e^{K\left(1-\frac{1}{y}\right)} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

μ en K chemische constanten

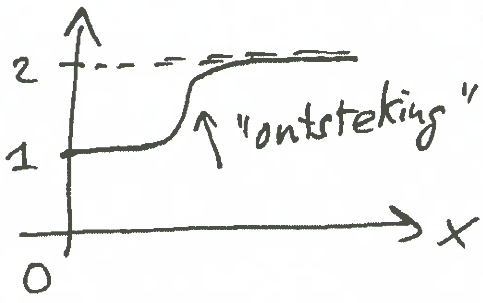
dit is een niet-lineaire DV

x: speelt de rol van tijd en y: temperatuur in een zekere chemische reactie er is geen oplossing bekend !

(geen exacte formule; geen primitieve te bepalen in het voorgaande proces)

hoe kom je toch aan oplossingen ??

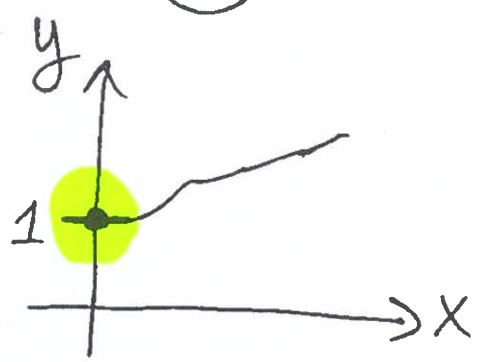
→ via een numerieke methode (zie later in de cursus)

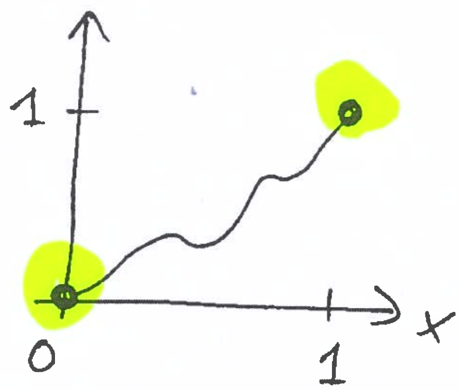


Beginwaardeproblemen ↔ Randwaardeproblemen

(voor 2e orde DVen)

$$\begin{cases} y'' = -y \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' = -y \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$





Een niet-lineair randwaardeprobleem:

$$\begin{cases} y'' + \lambda e^{y} = 0 \\ y(0) = 0 \, , \; y(1) = 0 \end{cases}$$

← speelt een rol in de chemie en astronomie

λ een parameter

- voor $\lambda \leq 0$ bestaat er een unieke oplossing
- voor $0 < \lambda < 3.5\ldots$ bestaan er twee oplossingen!
- voor $\lambda = 3.5\ldots$: één oplossing
- voor $\lambda > 3.5\ldots$ bestaat er geen oplossing!!!

Een variant: $$\begin{cases} y'' + 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 = 0 \\ y(0) = 0 \, , \; y(1) = 0 \end{cases}$$

Er zijn ∞-veel oplossingen

Richtingsveld van een DV

- Teken/schets in het x-y vlak in "alle" punten (x,y) de richtingscoëfficiënt/raaklijn
- Oplossingen van de DV moeten deze structuur volgen oftewel: verbind deze door de richtingen te volgen

n.l. $y' = \dfrac{dy}{dx}$ is richtingscoëfficiënt van de oplossing van de DV in elk punt (x,y)

en in de DV is $y' = F(x,y)$ ↑ bekend

Voorbeeld $y' = xy$

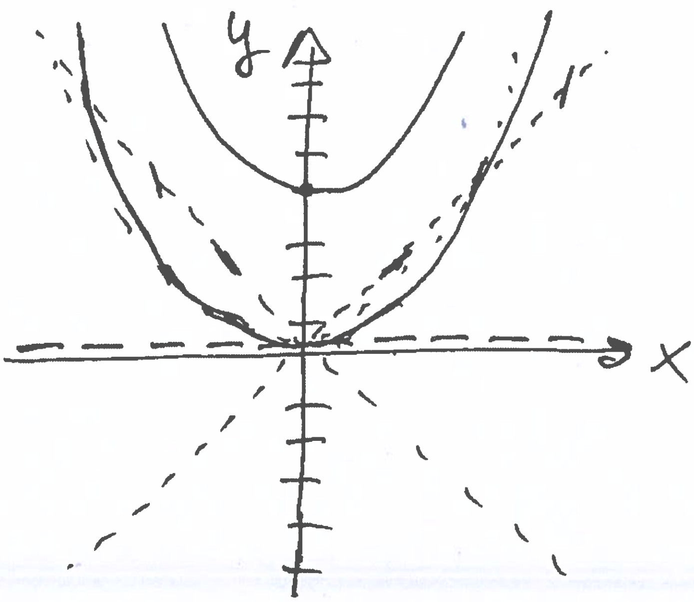
in $x=0$: $y'=0$

in $y=0$: $y'=0$

in $y=x$: $y'=x^2$

in $y=-x$: $y'=-x^2$

etcetera



Controle: $\int \frac{dy}{y} = \int x\,dx$

$$\Leftrightarrow \ln(y) = \frac{1}{2}x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad y = c \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = r(x)$$

inhomogene term

gegeven

2e orde

lineaire DV

homogeen als $r(x) = 0$

superpositie-principe voor lineaire homogene DV en:

als $y_1(x)$ een oplossing is van de DV en $y_2(x)$ een andere oplossing is, dan is ook iedere lineaire combinatie $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ een oplossing van de DV.

willekeurige constanten

dit is te checken door invullen in de DV:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 \frac{dy_1}{dx} + c_2 \frac{dy_2}{dx}$$

en $\frac{d^2y}{dx^2} = c_1 \frac{d^2y_1}{dx^2} + c_2 \frac{d^2y_2}{dx^2}$

invullen in DV:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = c_1\frac{d^2y_1}{dx^2} + c_2\frac{d^2y_2}{dx^2}$$
$$+ p(x)\left(c_1\frac{dy_1}{dx} + c_2\frac{dy_2}{dx}\right)$$
$$+ q(x)\left(c_1 y_1 + c_2 y_2\right)$$

$$= c_1\left[\frac{d^2y_1}{dx^2} + p(x)\frac{dy_1}{dx} + q(x)y_1\right]$$
$$+ c_2\left[\frac{d^2y_2}{dx^2} + p(x)\frac{dy_2}{dx} + q(x)y_2\right]$$

y_1 is oplossing en y_2 is oplossing

$$= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0$$

Vb $\quad y'' - y = 0$

$y(x) = e^x$ voldoet èn $y(x) = e^{-x}$ voldoet!

check $(e^x)'' - e^x = e^x - e^x = 0$

en $(e^{-x})'' - e^{-x} = e^{-x} - e^{-x} = 0$

2x − ⇒ +

$\Rightarrow y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ is ook een oplossing

worden vastgelegd door twee extra voorwaarden

neem bijv $y(0) = 4$ en $y'(0) = -2$

invullen in de oplossing: $y(0) = c_1 e^0 + c_2 e^{-0}$

$$= c_1 + c_2 = 4$$

en $y'(x) = c_1 e^x - c_2 e^{-x}$

$$y'(0) = c_1 e^0 - c_2 e^0$$

$$= c_1 - c_2 = -2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 4 \\ c_1 - c_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} c_1 = 1 \\ c_2 = 3 \end{matrix} \Rightarrow y(x) = e^x + 3e^{-x}$$

is <u>dé</u> oplossing

2^e orde lineaire homogene DV

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0$$

constanten

Probeer oplossingen van de vorm: $y(x) = e^{\lambda x}$

(λ nog te bepalen)

Vul in: $\lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + q e^{\lambda x} = 0$

Delen door $e^{\lambda x} \neq 0$: $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

"abc-formule" $\Rightarrow$ $\lambda_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$

Afhankelijk van p en q, bestaan er drie gevallen!

---

1) als $p^2 > 4q$, dan $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ en $\lambda_1 \neq \lambda_2$

de oplossingen zijn $e^{\lambda_1 x}$ en $e^{\lambda_2 x}$

$\xRightarrow[\text{principe}]{\text{superpositie}}$ $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

---

2) als $p^2 = 4q$, dan $\lambda_1 = \lambda_2 \overset{-p/2}{=} \in \mathbb{R}$

de oplossingen zijn $e^{\lambda_1 x}$ en $x e^{\lambda_1 x}$

$\Rightarrow$ $y = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda_1 x}$

---

3) $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, $\lambda_2 \in \mathbb{C}$; als $p^2 < 4q$

er geldt: $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ (bijv: $\lambda_1 = 1+i$ en $\lambda_2 = 1-i$)

de oplossingen zijn $e^{(\alpha+\beta i)x}$ en $e^{(\alpha-\beta i)x}$

$\alpha = -\frac{p}{2}$, $\Rightarrow y = e^{-\frac{p}{2}x}\left(C_1 \cos\left(\sqrt{q-\frac{1}{4}p^2}\,x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{q-\frac{1}{4}p^2}\,x\right)\right)$

$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$

na uitwerken vallen de termen met "i" weg

(ze verdwijnen in feite in de constanten C_1 en C_2)

---

opm 1 C_1 en C_2 volgen weer uit de twee extra voorwaarden (begin/rand)

opm 2 je kunt de oplossingen uit 1), 2) en 3) controleren door in de DV in te vullen