"$n=1$" vb 1

(eerste orde) OV $\left\{\begin{array}{l} y' + y = x \\ y(0) = 2 \end{array}\right.$ (*) $\quad y(x) = ?$

inhomogene term

1

① homogene OV: $y' + y = 0 \xrightarrow{\text{schrijf}} y_h' + y_h = 0$

(zonder beginwaarde) vanwege homogeen

oplossen

$y_h(x) = c \cdot e^{-x}$ (via les 5)

de homogene oplossing van (*)

② zoek een (één) partikuliere ("speciale") oplossing van (*)

noem deze $y_p(x)$ ← partikulier

"proberen" (kijk goed naar de inhomogene term): $y_p = Ax + B$

$\Rightarrow y_p' = A$ en vul in de OV (*) in: $\underbrace{A}_{=y_p'} + \underbrace{Ax+B}_{=y_p} = x$

twee vergelijkingen met twee onbekenden

$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} A + B = 0 \\ A = 1 \end{array}\right. \Rightarrow B = -1$

$\Rightarrow y_p = x - 1$

$\Rightarrow$ totale oplossing: $y = y_h + y_p = ce^{-x} + x - 1$

Nu $y(0) = 2$ gebruiken: $y(0) = c \cdot e^{-0} + 0 - 1 = c - 1 = 2 \Rightarrow c = 3$

$\Rightarrow y = 3e^{-x} + x - 1$

vb2 (eerste orde DV)

$$\begin{cases} 2y' - 3y = \sin(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

②

$2y_h' - 3y_h = 0 \Rightarrow y_h' = \frac{3}{2}y_h \Rightarrow y_h = C \cdot e^{\frac{3}{2}x}$

zoek $y_p = A\cos(x) + B\sin(x)$ voor $2y_p' - 3y_p = \sin(x)$

$y_p' = -A\sin(x) + B\cos(x)$

invullen

$\Rightarrow -2A\sin(x) + 2B\cos(x) - 3A\cos(x) - 3B\sin(x) = \sin(x)$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2A - 3B = 1 \\ 2B - 3A = 0 \end{cases} \rightarrow A = \frac{2}{3}B$$

$-\frac{4}{3}B - 3B = 1$

$A = \frac{2}{3} \cdot \frac{-3}{13} = \frac{-2}{13}$ $\quad -\frac{13}{3}B = 1$

$B = -\frac{3}{13}$

$y_p = -\frac{2}{13}\cos(x) - \frac{3}{13}\sin(x)$

$y = Ce^{\frac{3}{2}x} - \frac{2}{13}\cos(x) - \frac{3}{13}\sin(x)$

$y(0) = C - \frac{2}{13} - 0 = 1 \Rightarrow C = 1 + \frac{2}{13} = \frac{15}{13}$

$$\Rightarrow \boxed{y = y_h + y_p = \frac{15}{13}e^{\frac{3}{2}x} - \frac{2}{13}\cos(x) - \frac{3}{13}\sin(x)}$$

Het superpositieprincipe voor lineaire homogene DVen :

Stel dat $y_1, y_2, \dots, y_n$ oplossingen zijn van de DV, dan is de lineaire combinatie

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$$

ook een oplossing van deze DV.

($c_1, c_2, \dots, c_n$ zijn weer willekeurige constanten)

---

voorbeeld 1: $y''' - y'' - 6y' = 0$

3e orde ($n=3$)

check

$y = e^{\lambda x}$ $\Longrightarrow$ $\lambda^3 - \lambda^2 - 6\lambda = 0 \iff \lambda(\lambda-3)(\lambda+2) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = -2 \Rightarrow y_1 = 1,\ y_2 = e^{3x}$

$y_3 = e^{-2x}$

$\Rightarrow y = c_1 + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-2x}$

---

voorbeeld 2: $y'''' - 16y = 0$ ... $\Longrightarrow \lambda^4 - 16 = 0$

4e orde ($n=4$)

! $\Rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 2i,\ \lambda_4 = -2i$

... $\Longrightarrow y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 \cos(2x) + c_4 \sin(2x)$

Terug naar $n=2$ (2^e orde): (4)

$$\boxed{y'' + p y' + q y = r(x)} \quad (*)$$

inhomogene term

(als $r(x)=0$, dan homogene DV)

Voor $r(x)=0$: zie vorige les! (drie gevallen)

Noem $y_p(x)$ de (een) particuliere oplossing van DV (*), dwz $y_p'' + p y_p' + q y_p = r(x)$

gegeven constante — gegeven en $\neq 0$

! voldoet niet per se aan de beginvoorwaarden/rand

Noem $y_h(x)$ de algemene oplossing van (*), maar nu met $r(x)=0$; dwz de "corresponderende" oplossing van de homogene DV

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

uit de vorige les

Dan is $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ ook een oplossing van de inhomogene DV (*).

N.l.: $y'' + p y' + q y = (y_h'' + y_p'') + p(y_h' + y_p') + q(y_h + y_p)$

anders opschrijven $= \underbrace{(y_h'' + p y_h' + q y_h)}_{=0} + \underbrace{(y_p'' + p y_p' + q y_p)}_{= r(x)} = r(x)$

KLOPT! dus

methode van onbepaalde coëfficiënten

voorbeeld 3: $y'' - 4y' + 5y = e^x$ (**)

duz $p = -4$, $q = 5$ $\qquad e^x = r(x)$

$y_h'' - 4y_h' + 5y_h = 0$ (het homogene probleem)

$\underset{\text{zie vorige les}}{\Rightarrow} \begin{cases} \lambda_1 = 2+i \\ \lambda_2 = 2-i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{(2+i)x} \\ e^{(2-i)x} \end{cases}$ twee oplossingen van het homogene probleem

$e^{(2+i)x} = e^{2x} \cdot e^{ix} = e^{2x}(\cos(x) + i\sin(x))$

$e^{(2-i)x} = e^{2x} \cdot e^{-ix} = e^{2x}(\cos(x) - i\sin(x))$ $\quad$ + (optellen)

$2e^{2x}\cos(x)$

en bij $\quad$ − (aftrekken)

$2i\,e^{2x}\sin(x)$

$\Rightarrow y_h(x) = c_1 e^{2x}\cos(x) + c_2 e^{2x}\sin(x)$

factor 2 staat hierin "verstopt" $\qquad$ en de factor i op dezelfde manier

hoe $y_p(x)$ te bepalen?

"probeer" $y_p(x) = Ae^x$ (A een nog onbekende constante)

Vul $y_p(x)$ in bij (**): $y_p'' - 4y_p' + 5y_p = Ae^x - 4Ae^x + 5Ae^x \overset{\text{moet}}{=} e^x$

$\Rightarrow 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$ en dus $y_p(x) = \frac{1}{2}e^x$

⇒ de algemene oplossing van model (**)
wordt: $y(x) = c_1 e^{2x}\cos(x) + c_2 e^{2x}\sin(x) + \frac{1}{2}e^{x}$

volgen uit twee extra condities
(rand/begin-waarden)

---

voorbeeld 4: $y'' + 2y' + y = e^{-x}$ (***)

homogene oplossing ($p=2$, $q=1$, $r(x)=e^{-x}$)

$y_h'' + 2y_h' + y_h = 0$ $\;\lambda^2+2\lambda+1=0\;$ $\Rightarrow (\lambda+1)^2=0$ en $\lambda_1=\lambda_2=-1$ gelijke λ's

en dus $y_1(x)=e^{-x}$ en $y_2(x)=x e^{-x}$ (check geval ii)

particuliere oplossing

$r(x)=e^{-x}$ en deze komt als factor voor in $y_1(x)$ en $y_2(x)$. zie eerdere discussie

Het is zinloos om $y_p(x)=Ae^{-x}$ of $y_p(x)=Axe^{-x}$ te proberen, omdat deze twee al onderdeel zijn van $y_h(x)$

"Probeer" nu: $y_p(x)=Ax^2e^{-x}$ één macht hoger

Val in bij (***):

$\Rightarrow y_p' = 2Axe^{-x} - Ax^2e^{-x}$ productregel

en $y_p'' = 2Ae^{-x} - 2Axe^{-x} - 2Axe^{-x} + Ax^2e^{-x}$ nogmaals

$y_p'' + 2y_p' + y_p =$

$= \cancel{Ax^2e^{-x}} - \cancel{4Axe^{-x}} + \boxed{2Ae^{-x}}$ valt ook weg

valt weg $+ \cancel{4Axe^{-x}} - \cancel{2Ax^2e^{-x}} + \cancel{Ax^2e^{-x}} \underset{\text{moet}}{=} \boxed{e^{-x}}$

$\Rightarrow \boxed{2Ae^{-x}} = \boxed{e^{-x}}$ en $A=\frac{1}{2}$ $\Longrightarrow$ $y_p(x)=\frac{1}{2}x^2e^{-x}$

$\Rightarrow$ de algemene oplossing van (∗∗∗)

$$y(x) = \underbrace{c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}}_{\text{algemene homogene oplossing}} + \underbrace{\tfrac{1}{2} x^2 e^{-x}}_{\text{particuliere ("speciale") oplossing}}$$

c_1, c_2 volgen weer uit de twee extra condities (rand/beginwaarden)

---

voorbeeld 5: $y'' - 3y' + 2y = 4x$

$p = -3,\ q = 2,\ r(x) = 4x$

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$

of via abc-formule

homogene oplossing

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = 2$ (check!!)

en dus $y_h(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$

particuliere oplossing

$r(x) = 4x \rightsquigarrow$ "probeer" $y_p(x) = Ax + B$

$y_p' = A$, $y_p'' = 0$

$\Rightarrow 0 - 3A + 2(Ax + B) \overset{\text{moet}}{=} 4x$

dwz $2A \cdot x + (2B - 3A) = 4 \cdot x + (0)$

oftewel: $\begin{cases} 2A = 4 \\ 2B - 3A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 3 \end{cases}$ en dus $y_p(x) = 2x + 3$

wat als je probeert $y_p(x) = Ax$?

$\downarrow$

$y_p' = A,\ y_p'' = 0$

$\Rightarrow -3A + 2Ax = 4x$

$\Rightarrow A = 0$ en $A = 2$

algemene oplossing

$\Rightarrow$ $y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + 2x + 3$

Stel we hebben de twee condities: $y(0) = 4$ en $y'(0) = 2$ (beginwaarden)

$\Rightarrow y(0) = c_1 + c_2 + 3 \overset{\text{moet}}{=} 4$

en $y'(x) = c_1 e^{x} + 2c_2 e^{2x} + 2$ met $y'(0) = c_1 + 2c_2 + 2 \overset{\text{moet}}{=} 2$

$\Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 + 2c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 2,\ c_2 = -1$ en dus $\boxed{y(x) = 2e^{x} - e^{2x} + 2x + 3}$

2 vgl'en met 2 onbekenden

voorbeeld 6: $r(x) = e^x + x$

(een combinatie van twee functies)

DV: $y'' - 5y' + 6y = r(x)$

homogene oplossing

$y_h'' - 5y_h' + 6y_h = 0 \overset{\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3}{\Longrightarrow} y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$

$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$

of via abc-formule

particuliere oplossing

$y_p(x) = Ae^x + Bx + C$

$y_p' = Ae^x + B$ en $\boxed{y_p'' = Ae^x}$

invullen in oorspronkelijke DV:

$\boxed{Ae^x} - 5Ae^x - 5B + 6Ae^x + 6Bx + 6C \overset{\text{moet}}{=} e^x + x + 0$

$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2Ae^x = e^x \\ 6Bx = x \\ 6C - 5B = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{1}{2} \\ B = \frac{1}{6} \\ C = \frac{5}{36} \end{array} \right.$

3 vergelijkingen met 3 onbekenden

$\Rightarrow y_p(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{6}x + \frac{5}{36}$

$\Longrightarrow y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{6}x + \frac{5}{36}$

algemene oplossing

volgen uit twee extra condities $\Rightarrow$ ----

afhankelijk van opgave ...

"Algemeen" recept

$y'' + py' + qy = r(x)$

hoe vinden we $y_p(x)$? ($y_h(x)$ is duidelijk)

Als $r(x) = (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) e^{\alpha x} * \begin{cases} \cos(\beta x) \\ \sin(\beta x) \end{cases}$ of

kies dan $y_p(x) = (A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0) e^{\alpha x} * \cos(\beta x)$

$+ (B_n x^n + B_{n-1} x^{n-1} + \dots + B_1 x + B_0) e^{\alpha x} * \sin(\beta x)$

→ vul deze $y_p(x)$ in bij de DV (met $r(x)$)

→ verzamel de termen (zie eerdere voorbeelden)

M-vergelijkingen met M onbekende

→ bepaal $A_n, A_{n-1}, \dots, A_0$ en $B_n, B_{n-1}, \dots, B_0$

$\Rightarrow y_p(x) = \text{-----}$

NB bij samenvallende λ's: speciale behandeling, meestal extra macht in x toevoegen

---

$\Rightarrow y(x) = \underbrace{C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)}_{y_h(x)} + y_p(x)$

2 rand- of beginvoorwaarden invullen $\Rightarrow$ 2 vergelijkingen met 2 onbekenden

los op $\Rightarrow C_1 = \text{--}, C_2 = \text{--}$

$\Downarrow$

dè oplossing van de DV: $y(x) = \text{--}$
