Twee lineaire vergelijkingen met twee onbekende $x_1$ en $x_2$:

$$\odot \quad \boxed{\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}}$$

gegeven getallen $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1$ en $b_2$

Schrijf dit als: $\odot\odot$ $\boxed{A\vec{x} = \vec{b}} \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

matrix

vectoren

gezocht

Determinant van een $2\times 2$ - matrix $A$:

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Stelsel $\odot$ heeft een unieke oplossing $\vec{x}$, als $\det(A) \neq 0$

* $A$ heet dan niet-singulier (of regulier)
* de inverse van $A$: $A^{-1}$ bestaat en er geldt $A^{-1}A = AA^{-1} = I$

met $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, de identiteitsmatrix

Uit $\odot\odot$: $A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}(\vec{b})$

$$\iff \underbrace{(A^{-1}A)}_{=I}\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \iff \boxed{\vec{x} = A^{-1}\vec{b}}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

* de formule voor $A^{-1}$ is te vinden in Steiner (2x2- matrix A)

- diagonaal omwisselen
- mintekens bij de andere 2 & delen door determinant

$A\vec{x} = \vec{b}$ heet inhomogene vergelijking

$A\vec{x} = \vec{o}$ " homogene " ; $\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

De homogene vergelijking heeft de unieke oplossing $\vec{x} = \vec{o}$ als $\det(A) \neq 0$, in het 2x2-geval: $\vec{x} = \vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

oftewel $x_1 = 0$ en $x_2 = 0$

"de triviale oplossing"

Als $\det(A) = 0$ (A is dus singulier)

dan is $\vec{x} = \vec{o}$ nog steeds een oplossing, maar er kunnen ook andere oplossingen $\vec{x} \neq \vec{o}$ bestaan.

We bekijken nu een iets ander lineair stelsel:

$$\boxed{A\vec{x} = \lambda \vec{x}}$$

met $\lambda$ een (nog) onbekend getal

"de vingerafdruk" van de matrix A

$$\Leftrightarrow \quad A\vec{x} - \lambda\vec{x} = \vec{o}$$

$$\Leftrightarrow \quad A\vec{x} - \lambda I\vec{x} = \vec{o}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{(A - \lambda I)}_{\text{een nieuwe matrix}}\vec{x} = \vec{o} \quad \text{(een homogene vergelijking)}$$

NB. de triviale oplossing $\vec{x} = \vec{o}$ voldoet voor elke waarde van $\lambda$.

n.l. $(A - \lambda I)\vec{o} = \vec{o}$

We zoeken niet-triviale oplossingen $\vec{x} \neq \vec{o}$ en de waarde van $\lambda$ die hiermee samenhangt

Dit kan dus alleen als (zie boven aan vorige bladzijde):

$$\boxed{\det(A-\lambda I)=0}$$ (de matrix $A-\lambda I$ is singulier)

Werk dit nu uit voor een 2x2-matrix:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{21}a_{12} = 0$$

$$\Leftrightarrow a_{11}a_{22} - \lambda a_{22} - \lambda a_{11} + \lambda^2 - a_{21}a_{12} = 0$$

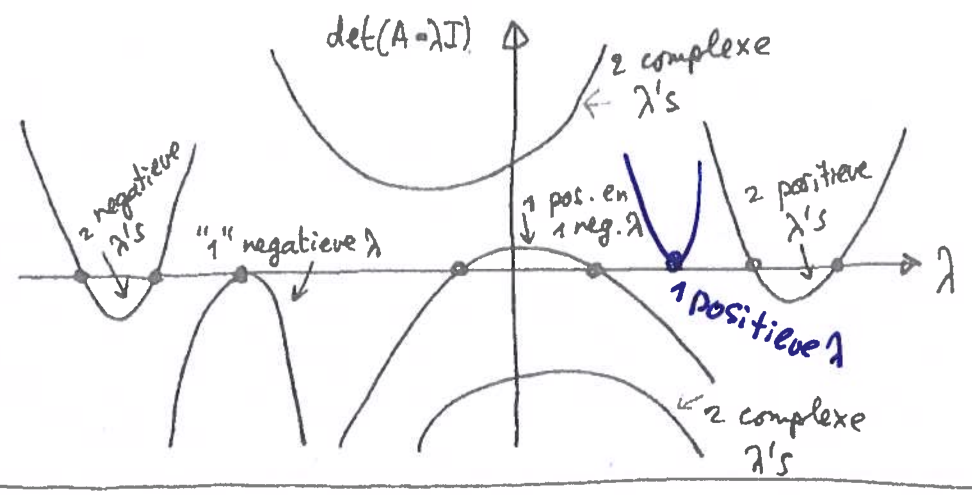
$$\Leftrightarrow \lambda^2 - \underbrace{(a_{11}+a_{22})}_{=\text{ som van de diagonaalelementen}}\lambda + \underbrace{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}_{=\det(A)\ !} = 0$$

het "spoor" van de matrix A: sp(A)

"abc-formule"

$$\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{a_{11}+a_{22} \pm \sqrt{(a_{11}+a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})}}{2}$$

(kan dus een complex getal opleveren!)




De $\lambda$'s heten <u>eigenwaarden</u> van de matrix A

det $(A-\lambda I)$ heet de karakteristieke determinant van $A$
het is een polynoom van graad 2 in $\lambda$ (voor een 2x2 matrix $A$).
de twee nulpunten van dit polynoom zijn de twee eigenwaarden van $A$

- $A\vec{x}=\lambda\vec{x}$ heet een matrix-eigenwaardevergelijking
- $\lambda$'s : eigenwaarden of karakteristieke waarde
- $\underbrace{\{\lambda's\}}_{\text{de verzameling eigenwaarde}}$ : het eigenwaardespectrum van $A$

---

* Net als voor een 2x2-matrix kan dit worden uitgewerkt voor een $n\times n$-matrix $A$.
(let op: in 'real-life' problemen kan $n>10^6$ of zelfs $10^9$ zijn!)

denk aan "google-search"!!

$$A\vec{x}=\lambda\vec{x} \quad \text{met} \quad \vec{x}=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} \text{ en } A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn}-\lambda\end{vmatrix}=0 \qquad (\Leftarrow \det(A-\lambda I)=0)$$

$\Rightarrow$ $n^e$ graads polynoom in $\lambda$ : $\lambda^n+\cdots\lambda^{n-1}+\cdots\lambda^{n-2}+\cdots+\underset{\substack{\uparrow\\ \text{constante term}}}{c}=0$

Deze heeft $n$ oplossingen $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$
($A$ heeft $n$ eigenwaarden)

<u>voorbeeld 1</u> $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

2 x 2 matrix

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\iff \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$$

<u>voorbeeld 2</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 95 & 2 & 0 \\ 117 & -12 & 3 \end{pmatrix}$

3 x 3 matrix

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 95 & 2-\lambda & 0 \\ 117 & -12 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ -12 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$- 0 . \begin{vmatrix} 95 & 0 \\ 117 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$+ 0 . \begin{vmatrix} 95 & 2-\lambda \\ 117 & -12 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff (1-\lambda) \left[(2-\lambda)(3-\lambda) + 12.0\right] + 0 \cdots + 0 = 0$$

$$\iff \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$$

drie eigenwaarden van A

---

Bij iedere gevonden getal (eigenwaarde) $\lambda_k$ bestaat er ook een oplossingsvector $\vec{x}_k \neq \vec{0}$ waarvoor geldt: $A\vec{x}_k = \lambda_k \vec{x}_k \quad (k = 1, \ldots, n)$

Deze $\vec{x}_k$'s heten $\boxed{\text{eigenvectoren}}$ van A bij $\lambda_k$.

(karakteristieke vectoren)

Hoe kom je aan deze $\vec{x}_k$'s ? $\rightarrow$

Bij iedere gevonden $\lambda_k$ los je op: $A\vec{x}_k = \lambda\vec{x}_k$

$\Rightarrow \vec{x}_k = \ldots$

bekend

zojuist uitgerekend

---

voorbeeld: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (zie eerder)

$\lambda_1 = 3$ en $\lambda_2 = 2$

$\rightarrow A\vec{x} = 3\vec{x} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

oftewel $x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ $\infty$-veel oplossingen $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ $(\alpha \neq 0)$ voldoen hieraan

idem voor $\lambda_2 = 2$ : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \beta . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\beta \in \mathbb{R}$ $(\beta \neq 0)$

---

De eigenvector $\vec{x}$ bij eigenwaarde $\lambda$ is dus niet uniek bepaald !

---

## Eigenschappen van eigenvectoren

① als $\vec{x}$ een eigenvector van matrix $A$ is bij eigenwaarde $\lambda$, dan is ook $\alpha . \vec{x}$ eigenvector bij dezelfde $\lambda$

$\rightarrow$

n.l. $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$

$$\Rightarrow A(\alpha\vec{x}) \underset{\text{lineair}}{=} \alpha . A\vec{x} \underset{\substack{\lambda \\ \text{eigenwaarde} \\ \text{bij } \vec{x}}}{=} \alpha . \lambda\vec{x} = \lambda(\alpha\vec{x})$$

---

<u>Normaliseren</u> van eigenvectoren (lengte = 1 forceren)

→ speciale eigenvector kiezen uit de ∞-veel

De lengte van een vector $\vec{x}$ : $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle\vec{x},\vec{x}\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$

(of $|\vec{x}|$) inproduct

vb. $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (uit eerdere 2x2 voorbeeld met $\lambda = 3$)

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\rangle} = \sqrt{\langle\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}\rangle} = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^2}$$

$$= \sqrt{2\alpha^2} = \sqrt{2} . \alpha \underset{\text{stel}}{=} 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

en dus $\underset{\text{genormaliseerd}}{\vec{x}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$ (deze $\vec{x}$ heeft lengte = 1)

---

② Als A <u>symmetrisch</u> is, dan staan de eigenvectoren (bij verschillende $\lambda$) <u>loodrecht op elkaar</u> ("inproduct = 0")

<u>vb</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 8 \\ -3 & 5 & 4 \\ 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ is symmetrisch : $\underset{\text{getransponeerd}}{A^T} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 8 \\ -3 & 5 & 4 \\ 8 & 4 & 6 \end{pmatrix} = A$

maar $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 8 \\ 2 & 5 & 4 \\ 8 & 4 & 6 \end{pmatrix} \neq A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ -3 & 5 & 4 \\ 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ (8

is niet symmetrisch

<u>bewijs van ②</u>: stel $\lambda \neq \mu$ (twee verschillende eigenwaarden met eigenvectoren $\vec{x}$ en $\vec{y}$

$$\begin{cases} A\vec{x} = \lambda \vec{x} \\ A\vec{y} = \mu \vec{y} \end{cases}$$

Neem inproducten: $\langle A\vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \lambda \vec{x}, \vec{y} \rangle = \lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$

eigenschap inproduct $\rightarrow$ $\parallel$

$\langle \vec{x}, A^T\vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, A\vec{y} \rangle$

$\uparrow$ A symmetrisch

ook geldt: $\langle \vec{x}, A\vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \mu \vec{y} \rangle$

eigenschap inproduct $\rightarrow$ $= \mu \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$

combineren

$\Rightarrow \lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \mu \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \Rightarrow \underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$

(want $\lambda \neq \mu$)

moet

$\Rightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$, (oftewel $\vec{x}$ en $\vec{y}$ staan loodrecht op elkaar)

(3) Als $A = A^T$ ($A$ symmetrisch)

dan zijn alle eigenwaarden $\lambda \in \mathbb{R}$

(dus niet complex)

(4) Als $A = -A^T$ ($A$ heet dan scheefsymmetrisch)

dan geldt voor elke eigenwaarde:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_{1,2} = \pm c_1 i \\ \lambda_{3,4} = \pm c_2 i \\ \lambda_{5,6} = \pm c_3 i \\ \vdots \qquad \vdots \\ \lambda_{n-1,n} = \pm c_{n/2}\, i \end{array}\right\} \in i\mathbb{R}$$

alle eigenwaarde liggen op de imaginaire as in het complexe vlak

voor deze matrices geldt dat de diagonaalelementen altijd 0 zijn!

(5) De som van de diagonaalelementen van $A$ wordt spoor van $A$ genoemd ("trace"):

$$sp(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$
$$\| $$
$$tr(A)$$

Er geldt: $\boxed{sp(A) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k}$ de som van alle eigenwaarden van $A$

6 $$\boxed{\det(A) = \underbrace{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdots \lambda_n}_{\text{het product van alle eigenwaarden}}}$$

andere notatie: $\prod_{k=1}^{n} \lambda_k$

7 $\lambda(A^2) = [\lambda(A)]^2$ en eigenvectoren van $A^2$ zijn = eigenvectoren van $A$

$\lambda(A^{-1}) = \dfrac{1}{\lambda(A)}$ en eigenvectoren van $A^{-1}$ zijn = eigenvectoren van $A$

getallenvoorbeeld: $\underbrace{1+2+3}_{= a_{11}+a_{22}+a_{33}} = \underbrace{1+2+3}_{= \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$ :-)

(uitgeerder 3x3 voorbeeld)

$\underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3}_{= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3} = \underbrace{1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2\ 3 \end{vmatrix} - 0 \cdot | \cdots | + 0 \cdot | \cdots |}_{= \det(A)} = 6$

# Diagonaalvorm van A

let op de betekenis van de index !
eerst: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Stel A heeft de eigenvectoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$
bij de eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$
dwz $A\vec{x}_1 = \lambda_1 \vec{x}_1$, $A\vec{x}_2 = \lambda_2 \vec{x}_2, \ldots, A\vec{x}_n = \lambda_n \vec{x}_n$

Maak de nieuwe matrix $X$ uit de eigenvectoren van A:
("zet ze naast elkaar")

$$X = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \end{pmatrix} = \left( \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} x_{n1} \\ x_{n2} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} \right)$$

nu dus "dubbele index"

"haakjes weghalen"

$$= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

dan geldt: $\underbrace{A\,X}_{\text{matrix-vermenigvuldiging}} = \begin{pmatrix} (A\vec{x}_1) & (A\vec{x}_2) & \cdots & (A\vec{x}_n) \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} (\lambda_1 \vec{x}_1) & (\lambda_2 \vec{x}_2) & \cdots & (\lambda_n \vec{x}_n) \end{pmatrix}$$

$$= X \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \ \lambda_n \end{pmatrix}$$

noem deze diagonaal matrix D

notatie: alleen maar nullen

$$= X\,D$$

dwz $AX = XD$

opgebouwd uit eigenvectoren

diagonaalmatrix met eigenwaarden

$$\Rightarrow X^{-1}AX = \underbrace{\underbrace{X^{-1}X}_{=I}D}_{=D}$$ , ofwel $D = X^{-1}AX$

diagonaal-matrix

inverse van $X$

oorspronkelijke matrix

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & & \theta \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \theta & & & \ddots \; 1 \end{pmatrix}$$

---

voorbeeld $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -11 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, check zelf dat: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$

en dat $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

(op de factoren $\alpha$ na, maar die spelen in deze berekening geen rol! zie nl.: $X^{-1}$ en $X$ in de formule)

$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ en $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

check dat $AX = XD$

## Nog een paar voorbeelden: (13

De "projectiematrix" $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

eigenwaarden: $\lambda = 1$ en $\lambda = 0$

eigenvectoren: $\vec{x} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\vec{x} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$

NB. de matrix $P$ is singulier ($\lambda = 0$ is eigenwaarde)

de matrix $P$ is symmetrisch ($\lambda$'s $\in \mathbb{R}$)

---

De "reflectiematrix" $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

eigenwaarden: $\lambda = 1$ en $\lambda = -1$

eigenvectoren: $\vec{x} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\vec{x} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$

NB. $R = 2P - I$ en
$$\begin{aligned} \lambda(R) &= \lambda(2P - I) \\ &= 2\lambda(P) - \lambda(I) \\ &= \begin{cases} 2 \cdot 1 - 1 = 1 & \checkmark \\ 2 \cdot 0 - 1 = -1 & \checkmark \end{cases} \end{aligned}$$

---

De "90° rotatie matrix" $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

eigenwaarden: $\lambda = i$ en $\lambda = -i$ ($\in \mathbb{C}$)

eigenvectoren: $\vec{x} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ en $\vec{x} = \alpha\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$

NB. $Q$ is scheef-symmetrisch ($\lambda$'s $\in \mathbb{C}$)

een 3x3 voorbeeld:



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+1) \overset{\text{stel}}{=} 0$$

$\Rightarrow$ $\lambda = 1$, $\lambda = -1$ en $\lambda = 3$ zijn eigenwaarden van $A$

$\lambda = 1$ : $\quad (A - 1.I)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ eigenvectoren $\vec{x} = \alpha . \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ met $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$

$\lambda = -1$ : $\quad (A + 1.I)\vec{x} = \vec{0} \overset{\dots}{\Leftrightarrow} \vec{x} = \alpha . \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$

$\alpha = 3$ : $\quad (A - 3.I)\vec{x} = \vec{0} \overset{\dots}{\Leftrightarrow} \vec{x} = \alpha . \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$

# * Stelsels DVen

## Chemische reacties

vb 1

$$A \xrightarrow{k_1 > 0} B$$

reactiesnelheid

stelsel van twee DVen: $\begin{cases} [A]' = -k_1 [A] \\ [B]' = k_1 [B] \end{cases}$

$x = [A]$
$y = [B]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = -k_1 x \\ y' = k_1 y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \vec{x}' = A \vec{x}$$

lineair

vb 2

$$A \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} B$$

$$\begin{cases} [A]' = -k_1 [A] + k_2 [B] \\ [B]' = k_1 [A] - k_2 [B] \end{cases}$$

lineair

vb 3

$$A + B \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} AB$$

$$\begin{cases} [A]' = -k_1 . [A].[B] + k_2 . [AB] \\ [B]' = -k_1 . [A].[B] + k_2 . [AB] \\ [AB]' = k_1 . [A].[B] - k_2 . [AB] \end{cases}$$

niet-lineair

vb4

$$2A + B \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} AB$$

$$2A + C \underset{k_4}{\overset{k_3}{\rightleftharpoons}} A_2C$$

$$\begin{cases} [A]' = -k_1 [A][B] + k_2 [AB] - k_3 [A]^2[C] + k_4 [A_2C] \\ [B]' = -k_1 [A][B] + k_2 [AB] \\ [AB]' = k_1 [A][B] - k_2 [AB] \\ [C]' = -k_3 [A]^2[C] + k_4 [A_2C] \\ [A_2C]' = k_3 [A]^2[C] - k_4 [A_2C] \end{cases}$$

niet-lineair

vb5

$$A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$$

$$\begin{pmatrix} [A] \\ [B] \\ [C] \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & -k_2 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [A] \\ [B] \\ [C] \end{pmatrix}$$

lineair

vb6

$A \xrightarrow{k_1} B$ (langzaam)

$B + B \xrightarrow{k_2} C + B$ (zeer snel)

$B + C \xrightarrow{k_3} A + C$ (snel)

niet-lineair

$$\begin{cases} [A]' = -k_1 [A] + k_3 [B][C] \\ [B]' = k_1 [A] - k_3 [B][C] - k_2 [B]^2 \\ [C]' = (\underset{\text{netto}}{0}) + k_2 [B]^2 \end{cases}$$

# Lineaire (homogene) stelsels DVen

---

(*) $\quad \vec{x}\,'(t) = A\,\vec{x}(t) \qquad\qquad \vec{x}(t) = \; ?$

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

$\vec{x}\,'(t)$: afgeleide van een vector met n-componenten

$A$: $n \times n$ - matrix

$\vec{x}(t)$: de gezochte vector zelf met n-componenten

---

we weten dat voor $n=1$: $\quad x'(t) = \lambda\, x$

heeft oplossing $x(t) = c \cdot e^{\lambda t}$

---

we "proberen" voor $n > 1$: $\quad \vec{x}(t) = \vec{v}\, e^{\lambda t}$

$\vec{v}$, $\lambda$: nog te bepalen!

invullen in (*) geeft:

$$\begin{aligned} \vec{x}\,'(t) &= (\vec{v}\, e^{\lambda t})' \\ &= \vec{v}\,(e^{\lambda t})' \\ &= \vec{v} \cdot \lambda\, e^{\lambda t} \\ &= \lambda \cdot \vec{v}\, e^{\lambda t} \end{aligned}$$

$$\vec{x}\,'(t) \overset{(*)}{=} A\,\vec{x}(t) = A \cdot \vec{v}\, e^{\lambda t} = \lambda \cdot \vec{v}\, e^{\lambda t}$$

$\Rightarrow$ delen door $e^{\lambda t}\ (\neq 0)$

$$A\vec{v} = \lambda v$$

dwz (!) zoek $\lambda$ en $\vec{v}$ die dit oplossen

oftewel, dit is een eigenwaarde/vector probleem!

zoek eigenwaarden $\lambda$ van A
en bijbehorende eigenvectoren $\vec{v}$ (zie eerder!)

---

Stel dat A eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ heeft met bijbehorende eigenvectoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$, dan zijn de oplossingen van het oorspronkelijke stelsel:

$$\vec{x}_{(1)}(t) = \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t}, \quad \vec{x}_{(2)}(t) = \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \ldots, \quad \vec{x}_{(n)}(t) = \vec{v}_n e^{\lambda_n t}$$

(de eerste oplossing) (de tweede oplossing) (de n-de oplossing)

(NB. $\vec{x}_{(1)}$ is natuurlijk niet hetzelfde als $x_1$)

De algemene oplossing wordt (via het "superpositieprincipe" voor lineaire homogene DVen):

$$\boxed{\vec{x}(t) = C_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + C_n \vec{v}_n e^{\lambda_n t}}$$

- - -

nog te bepalen uit n-condities op $t=0$

---

$n=1$ begrijpen we al, $n \geq 3$ is lastig

dus we gaan nu het geval $n=2$ onderzoeken

---

**Voorbeeld**

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{x}\,'(t) = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}\vec{x}(t) \\ \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}\end{array}\right. \quad \boxed{*}$$

karakteristieke polynoom: $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 6 \\ 6 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 36$

$= (\lambda-9)(\lambda+3)$

$\Rightarrow$ eigenwaarden van de matrix: $\left\{\begin{array}{l}\lambda_1 = 9 \\ \lambda_2 = -3\end{array}\right.$

eigenvectoren: voor $\lambda = 9$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{x_1 = x_2}$$

$\Downarrow$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (of een veelvoud hiervan)

voor $\lambda = -3$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{x_1 = -x_2}$$

$\Downarrow$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (of een veelvoud hiervan)

$\Rightarrow$ de oplossing van het stelsel DVen $\boxed{*}$: $\vec{x}(t) = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{9t} + c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-3t}$

Pas begincondities toe: $c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1 - c_2 = 3 \\ c_1 + c_2 = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1 = 1 \\ c_2 = -2 \end{array}\right.$$

en dus $\vec{x}(t) = 1.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{9t} - 2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-3t} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1(t) = e^{9t} + 2e^{-3t} \\ x_2(t) = e^{9t} - 2e^{-3t} \end{array}\right.$