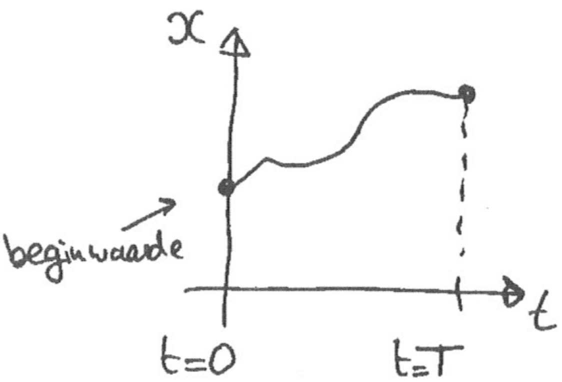
$\boxed{n=2}$

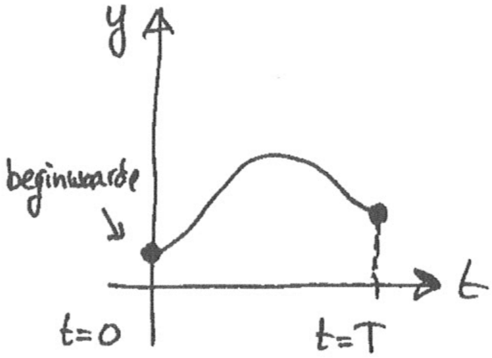
$$\boxed{\vec{x}\,'(t) = A\,\vec{x}(t)}$$

noem $\vec{x}$ nu $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (ipv $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$)

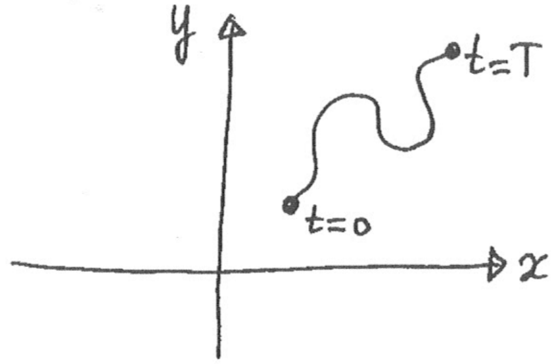
$$\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{2\times 2\text{-matrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t)$$

oplossingen : $\begin{cases} x(t) = \dots \\ y(t) = \dots \end{cases}$





een andere manier van tekenen (het "faseplaatje"):



in de "faseruimte"

t varieert nu van 0 naar T over de kromme in het x-y vlak

baan   pad   "trajectory"

Het faseplaatje bestaat uit krommen die starten bij verschillende beginwaarden. Vergeet dan ook <u>niet</u> om op de krommen een pijl te zetten in de richting van toenemende t-waarden.

voorbeeld 1 $\quad A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \iff \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff \lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0 \iff \underset{\lambda_1}{\lambda = -2} \text{ of } \underset{\lambda_2}{\lambda = -4}$$

Dit geeft (---) de eigenvectoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

niet uniek bepaald!

$\Rightarrow$ de algemene oplossing wordt:

$$\vec{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-4t}$$

volgen uit beginvoorwaarde

$x(0) = \text{--}$ en $y(0) = \text{--}$

Faseplaatje

i) neem $c_1 = 0 \Rightarrow \vec{x} = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-4t} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 e^{-4t} \\ -c_2 e^{-4t} \end{pmatrix}$

dus $y = -x$ (is een kromme)

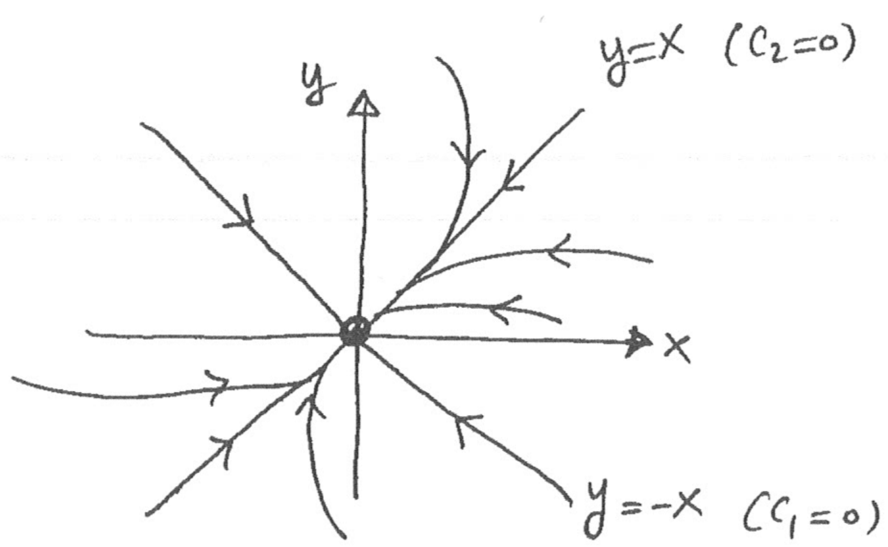
ii) neem $c_2 = 0 \Rightarrow \vec{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-2t} \\ c_1 e^{-2t} \end{pmatrix}$

dus $y = x$ (is een andere kromme)

iii) kies andere waarden voor c_1 en c_2, bijv $c_1 = c_2$, ---

dit geeft andere krommen in het x-y vlak

niet vergeten: zet pijlen in de juiste richting, dwz voor toenemende waarden van t



hoe weet je welke richting de pijlen op wijzen?

voor $t \to \infty$: $e^{-2t} \to 0$ en $e^{-4t} \to 0$

dus pijlen staan richting het punt $(0,0)$

het punt $(0,0)$ "trekt" alle krommen (oplossingen) "aan".

$(0,0)$ is een speciaal punt: een "kritiek punt" of "stationair punt" van het stelsel DVen.

Voor het <u>lineaire geval</u> (deze les) is dit <u>het enige</u> kritieke punt. Voor <u>niet-lineaire</u> stelsels DVen kunnen er meerdere kritieke punten aanwezig zijn.

In een kritiek punt geldt altijd: $x' = y' = 0$.

Schrijf
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'}{x'} = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x + a_{12}y}$$

In het punt (0,0) heeft $\frac{dy}{dx}$ geen bepaalde waarde; n.l. geeft "$\frac{0}{0}$" ..

$\frac{dy}{dx}$ = de richtingscoëfficiënt van de kromme $y(x)$ in het punt (x,y)

En we hebben gezien dat in zulke gevallen nader onderzoek gedaan dient te worden

Classificatie van kritieke punten

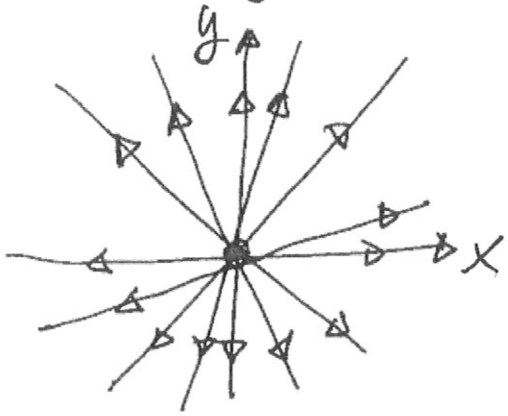
① een "onechte knoop" = voorbeeld 1.

② een "echte knoop": voorbeeld 2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = c_1 e^t \\ y = c_2 e^t \end{cases} \quad \text{dwz } c_1 y = c_2 x \Leftrightarrow y = \frac{c_2}{c_1} x$$

dit zijn rechte lijnen door de oorsprong.



nu wijzen de pijlen naar buiten (vanwege e^{+t})

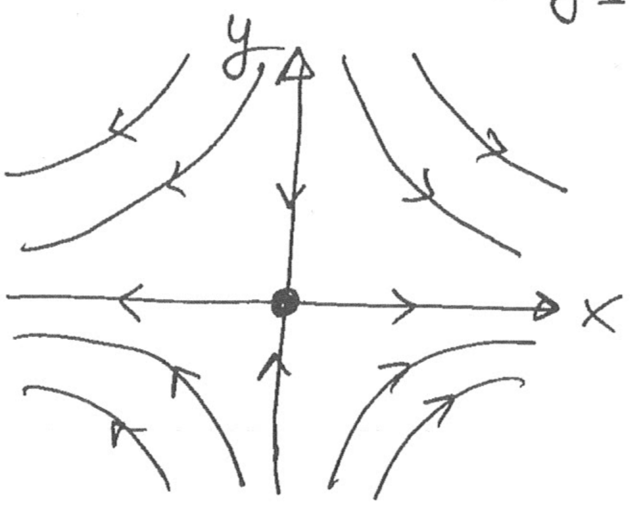
③ een "zadelpunt": voorbeeld 3 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (5

$\Rightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \Rightarrow$ algemene oplossing wordt:

$$\vec{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = c_1 e^{t} \\ y = c_2 e^{-t} \end{cases} \Rightarrow xy = c_1 e^{t} c_2 e^{-t} = \underbrace{c_1 c_2}_{\text{constant}}$$

$$\Rightarrow y = \frac{c}{x} \quad \text{hyperbolen in het } x\text{-}y \text{ vlak}$$



op de lijn $x = 0$ en $y > 0$ (y^{+}-as)

geldt: $x' = 0$ en $y' = -y < 0$

dus y neemt af

$\Rightarrow$ pijlen naar beneden

op de lijn $y = 0$ en $x > 0$ (x^{+}-as)

geldt: $\begin{cases} x' = x > 0 \\ y' = 0 \end{cases}$

dus x neemt toe

$\Rightarrow$ pijlen naar rechts

etcetera ---

bij een zadelpunt zijn altijd twee afstotende en twee aantrekkende "krommen", verder zijn er "krommen" in de vorm van hyperbolen (zie plaatje).

---

(4) een "<u>centrumpunt</u>" (gesloten krommen rondom het kritieke punt)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x' = y \\ y' = -4x \end{cases} \quad (\odot)$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \iff \lambda^2 + 4 = 0 \iff \underset{\lambda_1}{\lambda = 2i} \text{ of } \underset{\lambda_2}{\lambda = -2i} \in \mathbb{C}$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}$$

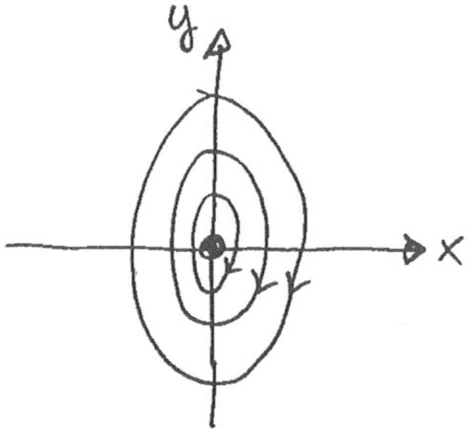
$$\Rightarrow \vec{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} e^{2it} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix} e^{-2it}$$

$$\begin{aligned} e^{2it} &= \cos(2t) + i \sin(2t) \\ e^{-2it} &= \cos(2t) - i \sin(2t) \end{aligned} \quad (\odot\odot)$$

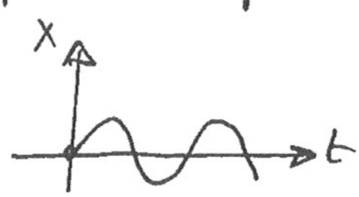
Uit $(\odot)$ volgt
$$\begin{cases} x' = y \\ 4x = -y' \end{cases} \; *$$

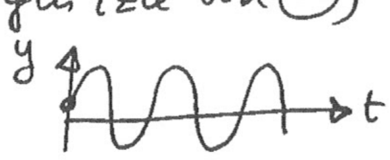
$$\begin{aligned} 4xx' = -yy' &\iff 4xx' + yy' = 0 \quad \text{"kettingregel"} \\ &\iff (2x^2)' + (\tfrac{1}{2}y^2)' = 0 \\ &\iff 2x^2 + \tfrac{1}{2}y^2 = C \end{aligned}$$

dwz <u>ellipsen</u> in het x-y vlak



periodieke oplossingen (zie ook $\odot\odot$)





op $x = 0$ en $y > 0$: $\begin{cases} x' = y > 0 \\ y' = -4x = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow x$ neemt toe

$\Rightarrow$ pijlen met de klok mee

(5) een "spiraalpunt" (een kritiek punt rondom welke de banen in het x-y vlak "spiraliseren")

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -x - y \end{cases} \quad ooo$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \underbrace{\lambda = -1+i}_{\lambda_1} \overset{\in \mathbb{C}}{} \text{ of } \underbrace{\lambda = -1-i}_{\lambda_2} \overset{\in \mathbb{C}}{}$$

λ_1 en λ_2 zijn altijd complex geconjugeerd in dit geval, dwz van de vorm $\lambda_1 = a+bi$ en $\lambda_2 = a-bi$

$$(\lambda_2 = \bar{\lambda}_1)$$

eigenvectoren : $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(-1+i)t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{(-1-i)t}$$

$$= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{-t} e^{it} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{-t} e^{-it}$$

$$= e^{-t} \left[c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{it} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{-it} \right]$$

"demping"

Uit ooo volgt: $\begin{cases} xx' = -x^2 + xy \\ yy' = -xy - y^2 \end{cases}$ +

$$xx' + yy' = -(x^2 + y^2)$$

$$\Leftrightarrow \left(\tfrac{1}{2}x^2\right)' + \left(\tfrac{1}{2}y^2\right)' = \underbrace{-(x^2+y^2)}_{\text{altijd} < 0}$$

Noem $r^2 = x^2 + y^2$ (poolcoördinaten $x = r\cos(t)$, $y = r\sin(t)$)

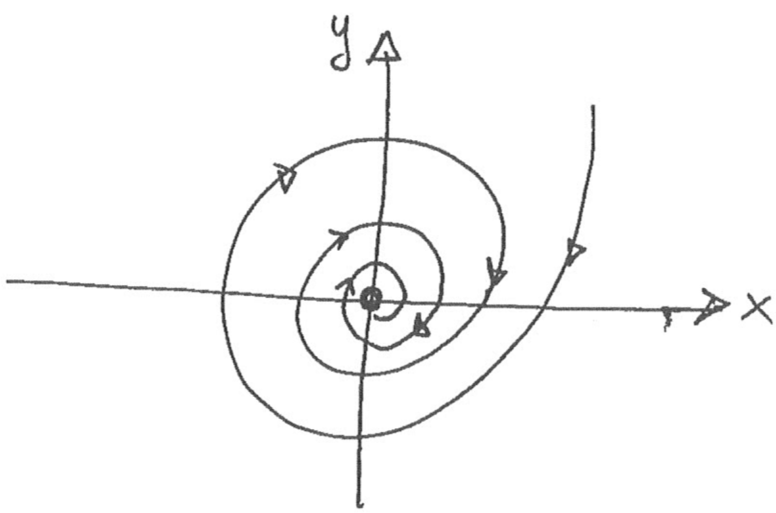
$$\Rightarrow \left(\tfrac{1}{2}r^2\right)' = -r^2$$

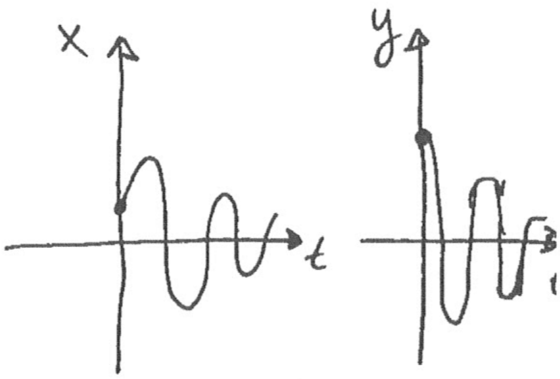
$$\Leftrightarrow (r^2)' = -2r^2$$

$$\Leftrightarrow 2rr' = -2r^2$$

$$\underset{r\neq 0}{\Leftrightarrow} \quad r' = -r \quad \Rightarrow r(t) = C \cdot e^{-t}$$

de "straal" r op de baan in het x-y vlak neemt af (voor toenemende t)





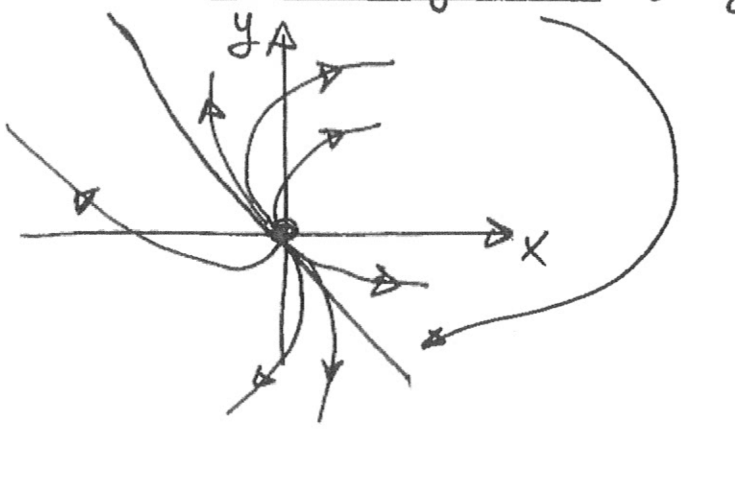
(6) Een "gedegenereerde knoop"

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = 4x + y \\ y' = -x + 2y \end{cases}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 3)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 3$$ "dubbele" eigenwaarde

maar nu slechts 1 eigenvector (in geval (2) wel twee eigenvectoren)



Hoe kunnen we dit anders karakteriseren?

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^2 - \underbrace{(a_{11}+a_{22})}_{= sp(A)}\lambda + \underbrace{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}_{= det(A)} = 0 \quad (*)$$

(we weten ook dat $sp(A) = \lambda_1 + \lambda_2$
en $det(A) = \lambda_1 \lambda_2$)

Noem de discriminant van (*) : D

Dan is $D = (sp(A))^2 - 4 . det(A)$

Het kritieke punt is een knoop, als $det(A) > 0$
èn $D \geq 0$

" " " is een zadelpunt, als $det(A) < 0$

" " " is een centrumpunt, als $sp(A) = 0$
èn $det(A) > 0$

" " " is een spiraalpunt, als $sp(A) \neq 0$
èn $D < 0$

Welke kant wijzen de pijlen in het faseplaatje?

knoop: $\det(A)>0, \Delta \geq 0$

- aantrekkend als $sp(A)<0$ (stabiel)
- afstotend als $sp(A)>0$ (instabiel)

$\det(A)>0$ betekent $\lambda_1\lambda_2>0$ oftewel zowel λ_1 als $\lambda_2 >0$ (mogelijkheid 1)
óf λ_1 én $\lambda_2 <0$ (mogelijkh. 2)

als $sp(A)=\lambda_1+\lambda_2<0$, dan moeten ze beide <0 zijn

als $sp(A)=\lambda_1+\lambda_2>0$, dan beide λ's >0.

---

spiraal: $\Delta<0, sp(A)\neq 0$

- aantrekkend als $sp(A)<0$ (stabiel)
- afstotend als $sp(A)>0$ (instabiel)

als $sp(A)=\lambda_1+\lambda_2 \overset{!}{=} (a+bi)+(a-bi)=2a<0$, dan aantrekkend (stabiel)

als $sp(A)=\lambda_1+\lambda_2=2a>0$ dan afstotend (instabiel)

Centrumpunt: $sp(A)=0$ en $\det(A)>0 \Rightarrow \lambda_1+\lambda_2=0$ oftewel $\lambda_2=-\lambda_1$

$\Rightarrow \det(A)=\lambda_1\lambda_2=-\lambda_1^2$

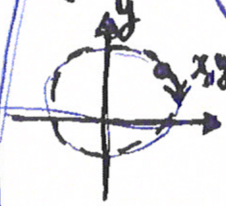
als $\det(A)>0$ dan $\lambda_1^2=-\det(A)<0$

kan alleen als: λ_1 en λ_2 puur imaginair (geen reëel deel)

$\Rightarrow$ periodieke oplossingen rond het kritieke punt

Vb

$\begin{cases} x'=y \\ y'=-x \end{cases}$

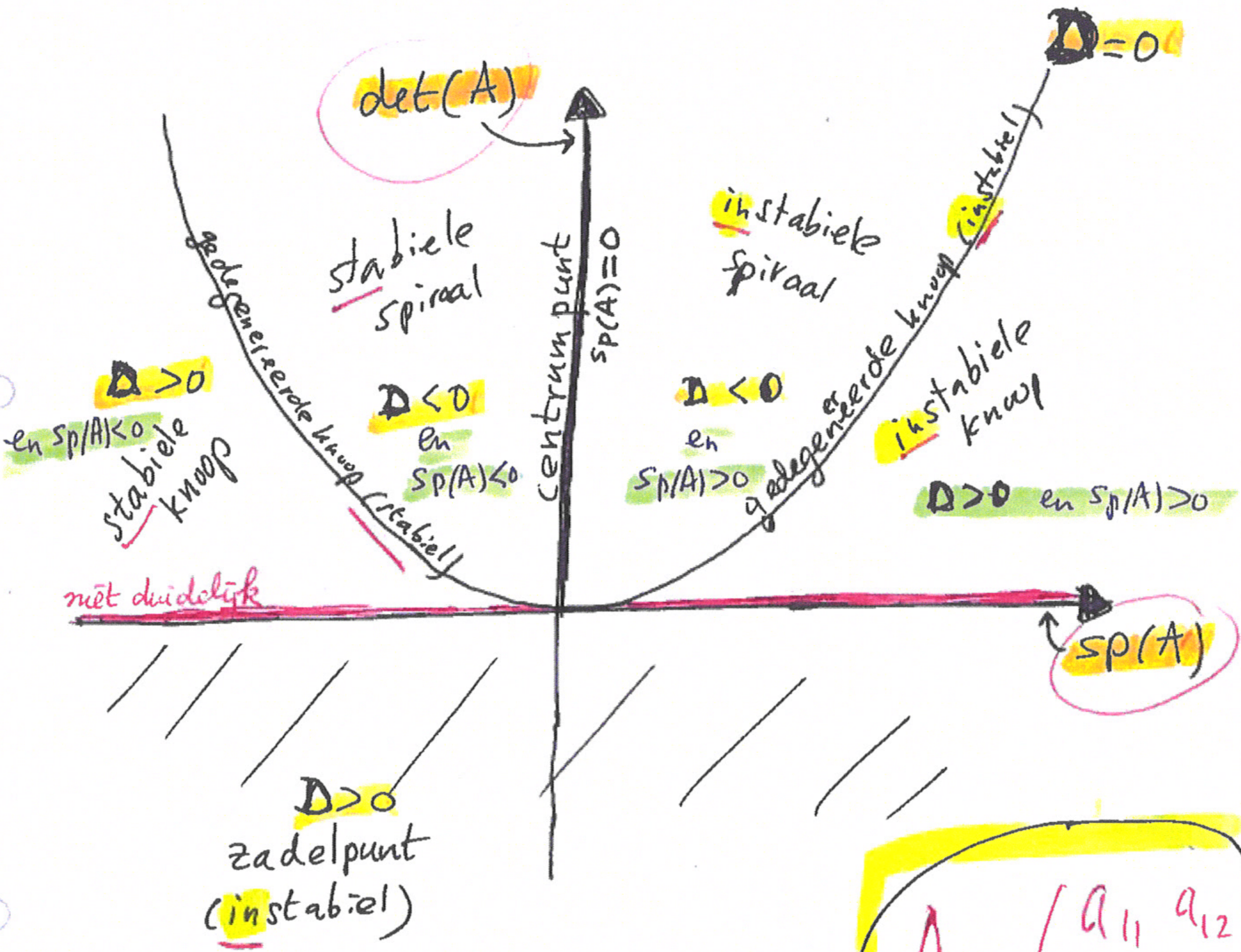


$x,y>0$ $\begin{cases} x'>0: x \text{ neemt toe} \\ y'<0: y \text{ neemt af} \end{cases}$

---

zadel: $\det(A)<0 \Rightarrow$ altijd 1 λ negatief en 1 λ positief $\Rightarrow$ instabiel

overzicht in 1 figuur



$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \lambda_1 \lambda_2$$

$$sp(A) = a_{11} + a_{22} = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$D = (sp(A))^2 - 4 \cdot \det(A) = ---$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\dot{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{(t)} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{(t)}$$

lineair stelsel

$\boxed{\text{Toepassing van deze criteria:}}$

Zonder de eigenwaarden te berekenen

Vb

$$\vec{x}' = A\vec{x} \quad \text{met} \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$sp(A) = a_{11} + a_{22} = -3 + (-3) = -6 < 0$$

$$det(A) = (-3)(-3) - (1)(1) = 8 > 0$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 8 = 36 - 32 = 4 > 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ knoop (stabiel)}$$

Omschrijven van een 2^e orde DV naar een stelsel 1^e orde DVen

$$a x'' + b x' + c x = h(x) \qquad \text{"}\vec{F} = m\vec{a}\text{"}$$

wrijving

2^e afg.

$$x_1 \overset{def}{=} x$$

$$x_2 \overset{def}{=} x' = x_1' \longrightarrow x_1' = x_2$$

$$x_2' = x'' = \frac{h(x) - b x' - c x}{a}$$

$$= \frac{h(x_1) - b x_2 - c x_1}{a}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = \dfrac{h(x_1) - b x_2 - c x_1}{a} \end{cases}$$

voor dit geval alleen !! (let op)

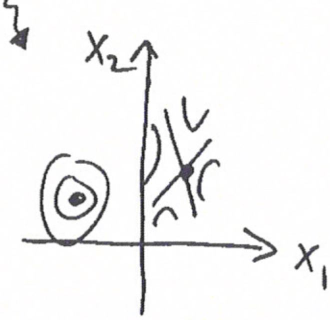
* kritieke punten ? ---

- $x_2 = 0$ (1^e DV)
- $h(x_1) - c x_1 = 0$ (2^e DV) $\Rightarrow x_1 = \text{-------}$

dus niet per se $x_1 = 0$!!

* analyse + faseplaatje ---

en vervolgens



Vb Beweging van een puntmassa op een veer

een 2^e orde DV

"$\vec{F} = m\vec{a}$" $\Leftrightarrow$ $u'' + \frac{c}{m}u' + \frac{k}{m}u = 0$

massa

wrijvingscoëfficiënt ($c>0$)

veerconstante >0

u : uitwijking
u' : snelheid
u'' : versnelling

herschrijven van een 2^e orde DV naar een stelsel van twee eerste orde DV en

Schrijf $x \overset{def}{=} u$ en $y \overset{def}{=} u'$

dan geldt $\begin{cases} x' = u' = y \\ y' = (u')' = u'' = -\frac{c}{m}u' - \frac{k}{m}u \\ \quad = -\frac{c}{m}y - \frac{k}{m}x \end{cases}$

oftewel: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ stelsel van twee 1^e orde DV'en

afhankelijk van k, c en m krijgen we de volgende situaties

$sp(A) = 0 - \frac{c}{m} = -\frac{c}{m} < 0$

$det(A) = 0 \cdot \left(-\frac{c}{m}\right) - \left(-\frac{k}{m}\right) \cdot 1 = \frac{k}{m} > 0$ (k & $m > 0$) $\Rightarrow$ geen zadelpunt

$D = \left(-\frac{c}{m}\right)^2 - 4 \cdot \frac{k}{m} = \frac{c^2}{m^2} - 4\frac{k}{m}$

4 gevallen:

- zonder demping (wrijving): $c = 0$, $sp(A) = 0$, $det(A) > 0$ $\Rightarrow$ centrumpunt
- met "onderdemping": $c^2 < 4mk$ ($\frac{c^2}{m^2} - 4\frac{k}{m} < 0$) dwz $D < 0$, $sp(A) < 0$, $det(A) > 0$ $\Rightarrow$ stabiele spiraal
- met "kritische demping": $c^2 = 4mk$ (dwz $D = 0$) en $sp(A) < 0$, $det(A) > 0$ $\Rightarrow$ stabiele knoop
- met "overdemping": $c^2 > 4mk$ (dwz $D > 0$) en $sp(A) < 0$, $det(A) > 0$ $\Rightarrow$ stabiele

Niet-lineaire DV in 1D (één variabele)

eerst

$$x' = f(x) \qquad x(t) = ?$$

$$x' = \frac{dx}{dt}$$

niet perse $= 0$

constante oplossing

Stationaire toestand: $\frac{dx_s}{dt} = f(x_s) = 0$ (x_s "kritiek punt" voldoet aan DV)

deze scalaire

$\boxed{\text{stabiel?}}$ ("aantrekkend")

verstoor x_s met kleine verstoring w, dwz schrijf $x = x_s + w$

met $w \ll x_s$

$\ll$ betekent: "veel kleiner dan"

vul dit in in DV:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(x_s + w) = \underbrace{\frac{dx_s}{dt}}_{=0} + \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dt} = f(x)$$

moet zijn

$f(x)$ is niet-lineair

Pas een Taylorontwikkeling (van f) toe rond het punt x_s:

$$f(x) = \underbrace{f(x_s)}_{=0 \text{ (per def.)}} + f'(x_s)\underbrace{(x - x_s)}_{=w \text{ (per def.)}} + \underbrace{\frac{f''(x_s)}{2!}(x-x_s)^2 + \cdots}_{}$$

verwaarlozen van hogere orde termen

($x - x_s = w$ klein
dus $(x-x_s)^2 = w^2$ nog kleiner (per def.) etc ...)

$\approx f'(x_s).w =$

bekijk dus

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dw}{dt} = f'(x_s)w}$$

een constante!

bepaalt de evolutie van de verstoring (groeit? daalt?)

(eigenlijk $\approx$)

de afgeleide van f in het stationaire punt oplossing w van deze speciale DV: hangt af van beginvoorwaarde (hier niet van belang)

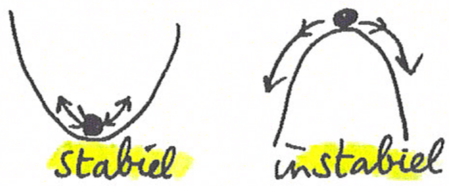
$$w(t) = C \cdot e^{f'(x_s)\,t}$$

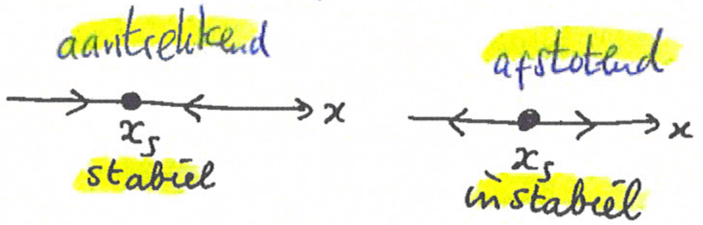
(oplossingen "lopen weg")

als $f'(x_s) > 0$ dan zal w groeien en dus zal x_s instabiel zijn

als $f'(x_s) < 0$ dan zal w dalen en dus zal x_s stabiel zijn ("aantrekken")

in een figuur (schematisch):





Hoe in 2D? (twee variabelen)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,y) \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = g(x,y) \end{cases}$$

het kritieke punt (x_s, y_s) (stationaire toestand) voldoet aan

$$\begin{cases} \dfrac{dx_s}{dt} = f(x_s, y_s) = 0 \\[2mm] \dfrac{dy_s}{dt} = g(x_s, y_s) = 0 \end{cases}$$

(x_s, y_s) stabiel? ook hier natuurlijk niet per se $(0,0)$

verstoor dit punt met (w_1, w_2): "veel kleiner dan"

$$\begin{cases} x = x_s + w_1 & , w_1 \ll x_s \\ y = y_s + w_2 & , w_2 \ll y_s \end{cases}$$

(zie vorige keer voor lineaire f en g)

f en g zijn niet-lineair

net als in 1D: nu 2D Taylor rond (x_s, y_s):

g) 17

te verwaarlozen

$$\begin{cases} f(x,y) = \underbrace{f(x_s,y_s)}_{=0 \text{ per def.}} + \frac{\partial f}{\partial x}(x_s,y_s)\underbrace{(x-x_s)}_{=w_1} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_s,y_s)\underbrace{(y-y_s)}_{=w_2} + \text{hogere orde termen} \\ g(x,y) = \underbrace{g(x_s,y_s)}_{=0 \text{ per def.}} + \frac{\partial g}{\partial x}(x_s,y_s)\underbrace{(x-x_s)}_{=w_1} + \frac{\partial g}{\partial y}(x_s,y_s)\underbrace{(y-y_s)}_{=w_2} + \underbrace{\text{hogere orde termen}}_{\text{te verwaarlozen}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x,y) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_s,y_s)\, w_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_s,y_s)\, w_2 \\ g(x,y) \approx \frac{\partial g}{\partial x}(x_s,y_s)\, w_1 + \frac{\partial g}{\partial y}(x_s,y_s)\, w_2 \end{cases}$$

oftewel:

$$\begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix} \approx \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_s,y_s) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_s,y_s) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_s,y_s) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_s,y_s) \end{pmatrix}}_{\text{Jacobiaan } \mathcal{J}} \underbrace{\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}}_{\text{verstoring}}$$

(een 2x2 matrix)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \underbrace{\frac{dx_s}{dt}}_{} + \frac{dw_1}{dt} \\ \frac{dy}{dt} = \underbrace{\frac{dy_s}{dt}}_{=0 \text{ per def.}} + \frac{dw_2}{dt} \end{cases}$$

(=0 per def.)

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\mathcal{J}}_{\text{matrix}}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}}$$

nu zitten we in de situatie van afgelopen les (lineair stelsel)

eigenwaarden van $\mathcal{J}$ bepalen nu het karakter van de stationaire punten (x_s, y_s)

dus nu niet per se (0,0) en wellicht meerdere stationaire punten case study "Brusselator" — 4 chemische reacties

$$\boxed{\begin{aligned} A &\xrightarrow{k_1} X \\ B + X &\xrightarrow{k_2} Y + C \\ 2X + Y &\xrightarrow{k_3} 3X \\ X &\xrightarrow{k_4} D \end{aligned}}$$

dit wordt beschreven door **twee** DVen.
[A] en [B] worden even constant verondersteld
$= a$ (noem) $= b$ (noem)

andere m.l. vele DVen ...

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k_1 a - k_2 b x + k_3 x^2 y - k_4 x = f(x,y) & \text{noem} \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = k_2 b x - k_3 x^2 y = g(x,y) & \text{noem} \end{cases}$$

met $\boxed{\begin{aligned} x &= [X] \\ y &= [Y] \end{aligned}}$

neem voor 't gemak even : $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1$
(ter illustratie)

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a - bx + x^2 y - x \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = bx - x^2 y \end{cases}}$$

nu nog twee parameters over

(niet-lineair stelsel van twee DVen)

een kritiek punt : $\begin{cases} x_s = a \\ y_s = b/a \end{cases}$ (check door invullen)
(in dit model)

aard van dit punt ?

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\[2mm] \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b + 2xy - 1 & x^2 \\ b - 2xy & -x^2 \end{pmatrix}$$

in het kritieke punt (vul in : $x = x_S = a$ en $y = y_S = b/a$) :

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} -b + 2a\frac{b}{a} - 1 & a^2 \\ b - 2a\frac{b}{a} & -a^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b-1 & a^2 \\ -b & -a^2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{denk nu aan diagram!}}$

$\boxed{sp(\mathcal{J})} = b-1-a^2$ $\boxed{>0 \text{ als } b > a^2+1}$ en $\boxed{<0 \text{ als } b < a^2+1}$

$\boxed{\det(\mathcal{J})} = -(b-1)a^2 - (-b a^2)$

$= -\cancel{b}a^2 + a^2 + \cancel{b}a^2 = \boxed{a^2 > 0}$ (altijd)

$\boxed{D} = (sp(\mathcal{J}))^2 - 4\det(\mathcal{J})$

$= (b-1-a^2)^2 - 4a^2$

check!

blijkt $= (b-1-a^2-2a)(b-1-a^2+2a)$

$= (b-(a+1)^2)(b-(a-1)^2)$ <0 als $(a-1)^2 < b < (a+1)^2$

en >0 voor andere a en b waarden

$\boxed{\text{Tabel maken}}$ (zie volgende blz)

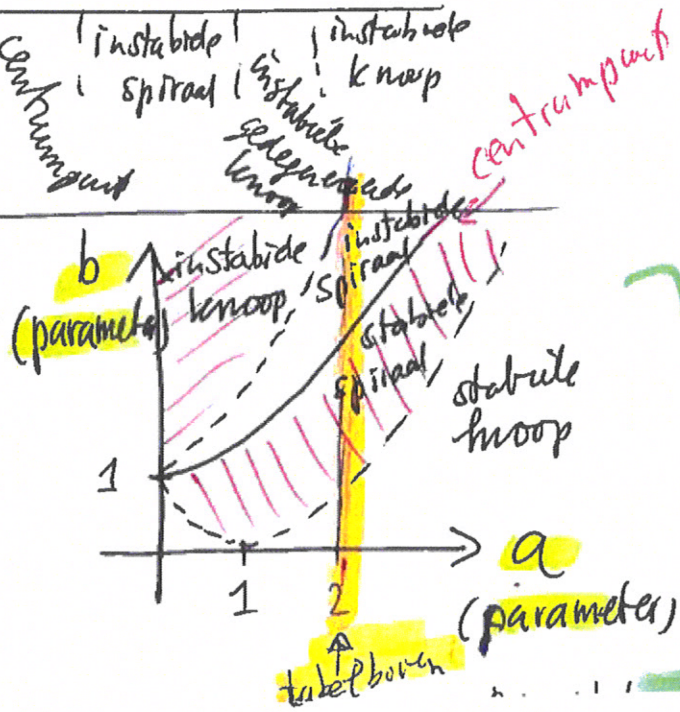
$\longrightarrow$

vb $a=2$

b $\xrightarrow{\text{toenemend}}$	<1	$=1$	tussen 1 en 5	$=5$	tussen 5 en 9	$=9$	>9
$b-5 = sp(J)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$4 = det(J)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(b-9)(b-1) = D$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
type	stabiele knoop	stabiele gedegenereerde knoop	stabiele spiraal	centrumpunt	instabiele spiraal	instabiele gedegenereerde knoop	instabiele knoop

stabiliteitsdiagram:

("bifurcatiediagram")



faseplaatje (schets)

$$\frac{dy}{dx} = 0 = \frac{bx - x^2 y}{a - bx + x^2 y - x}$$

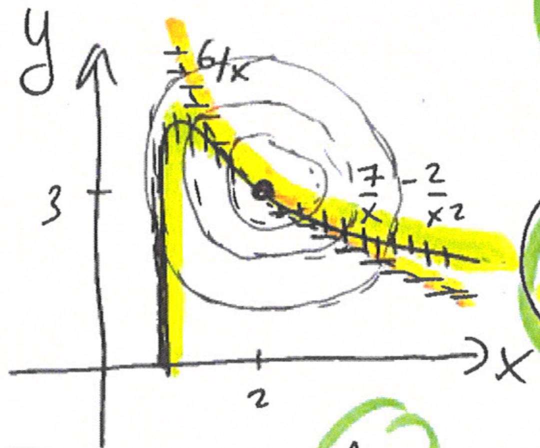
$$\Rightarrow x(b - xy) = 0 \quad \text{dwz} \quad y = \frac{b}{x} \text{ of } x = 0$$

teller=0

$$\frac{dy}{dx} = \infty \Rightarrow a - bx + x^2 y - x = 0$$

noemer=0

$$\text{dwz } y = \frac{(1+b)x - a}{x^2} = \frac{1+b}{x} - \frac{a}{x^2}$$



vb $a=2$, $b=6$

centrum punt

$$\frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow$$ een kromme --- in figuur "/" tekenen op die kromme

$$\frac{dy}{dx} = -1 \Rightarrow$$ een kromme --- in figuur "\\" " " "

etcetera

"vlak opvullen"

en krommen schetsen (+ kritieke punten en hun aard)

vb uit de biologie (ecologie)

$$\begin{cases} x' = x(1-x-y) \\ y' = y\left(\frac{3}{4} - y - \frac{1}{2}x\right) \end{cases}$$

x : populatie 1

y : populatie 2

(twee soorten vis in een vijver die concurreren om voedsel)

kritieke punten : (beide rechterleden moeten nul zijn!)

$$\begin{cases} x(1-x-y) = 0 \\ y\left(\frac{3}{4} - y - \frac{1}{2}x\right) = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ in 1^e $\Rightarrow$ $y = 0$ in 2^e of $y = \frac{3}{4}$ in 2^e $\Rightarrow$ $(0,0)$ en $\left(0, \frac{3}{4}\right)$

$1 - x - y = 0$ in 1^e

dwz $x = 1 - y$ invullen in 2^e

$$\Rightarrow y\left(\frac{3}{4} - y - \frac{1}{2}(1-y)\right) = 0$$

$$y\left(\frac{3}{4} - y - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y\right) = 0$$

$$y\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}y\right) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ of } y = \frac{1}{2}$$

$x = 1$ $\qquad$ $x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ 4 kritieke punten : $(0,0)$, $\left(0, \frac{3}{4}\right)$, $(1,0)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Jacobiaan

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1-2x-y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -x$$

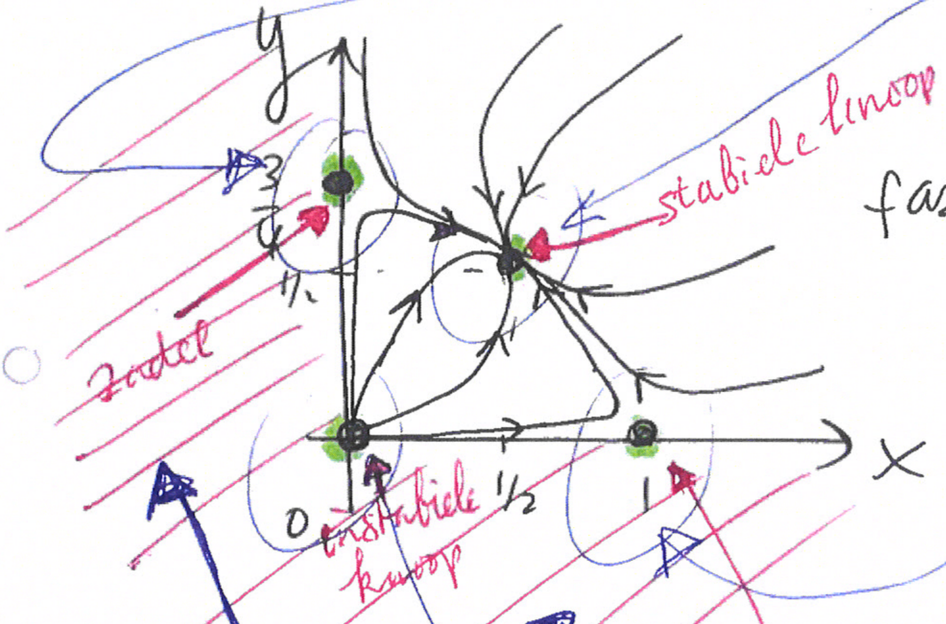
$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{1}{2}y \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{3}{4} - 2y - \frac{1}{2}x$$

$(0,0) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{3}{4}$ → instabiele knoop

$(0,\frac{3}{4}) \rightarrow \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 3/8 & -3/4 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_1 = -\frac{3}{4}, \lambda_2 = \frac{1}{4}$ → zadelpunt

$(1,0) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = \frac{1}{4}$ → zadelpunt

$(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0$ → stabiele knoop



faseplaatje (schets)

x en y positieve waarden

deze gebieden zijn (niet-relevant voor deze toepassing!)

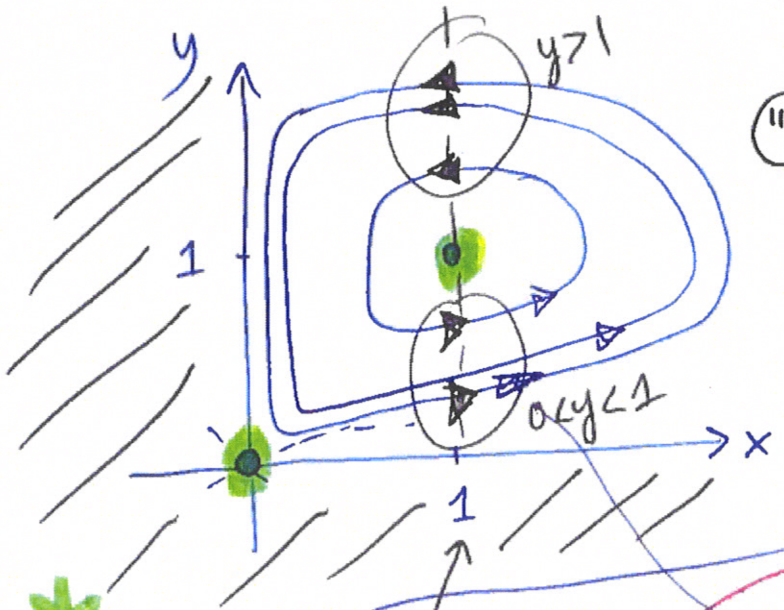
Roofdier-prooi model

bijv. Lynx en sneeuwhaas in Canada

$$\begin{cases} x' = a(x - xy) \\ y' = -c(y - xy) \end{cases}$$

bijv: $a=2, c=1$: $x=0$ en $y=0$ $\Rightarrow$ $(0,0) \to$ zadelpunt (blijkt)

$y=1$ en $x=1$ $\Rightarrow$ $(1,1) \to$ centrumpunt (blijkt)



"biologisch evenwicht"

periodieke oplossingen !

pijlen? in figuur

bijv $x=1$: (op "de lijn")
$$\begin{cases} x' = 2(1-y) & \boxed{0<y<1} \\ y' = -(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow x' > 2$$

dus x neemt toe in de tijd

dus pijl naar rechts

($y>1 \Rightarrow x'<0$
x neemt af in de tijd)

Ook hier geldt, dat vanwege de toepassing, oplossingen met $x, y < 0$ niet interessant zijn!
(zie gearceerde gebieden in schets)