vb 1

Stel we hebben een 10 x 10 - matrix A.

Hoe komen we aan de eigenwaarden van A?

Uitwerken van det $(A-\lambda I)=0$ geeft (bijv.):

$$\lambda^{10} + \underbrace{56}_{=-sp(A)}\lambda^{9} + \cdots + 8\lambda \underbrace{-13}_{=\det(A)} = 0$$

[l.h.a. voor $n \times n$: $\lambda^{n} - sp(A)\lambda^{n-1} + \underbrace{\cdots}_{\substack{\text{polynoom in } \lambda \\ \text{van graad} \leq n-2}} + (-1)^{n}\det(A) = 0$]

$$\lambda_1 = ?, \ \lambda_2 = ?, \ \cdots, \ \lambda_{10} = ?$$

Er bestaat geen formule om deze te berekenen ...!

Hoe gaan we dit aanpakken?

Beschouw de rij getallen $x_0, x_1, x_2, \ldots$

(zie ook les 1)

Convergeert deze rij? .... ?

Vb 2

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{i+1} = \frac{1}{2}\left(x_i + \frac{2}{x_i}\right), \quad i = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

recursie

een niet-lineaire recursie

"successief substitueren"

bereken: $x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{2}{x_0}\right) = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2} = 1.5$

$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{2}{x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3/2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right)$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{6} = \frac{17}{12}$

$= 1.41667$

$x_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{2}{17/12}\right) = \ldots = 1.4142\ldots$

etcetera ...

opm. $\underbrace{\lim_{i\to\infty} x_{i+1} = \lim_{i\to\infty} x_i}_{\text{noem deze } x} = \lim_{i\to\infty} x_{i-1} = \ldots$

$$\underset{i\to\infty}{\Rightarrow} \quad \boxed{x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)} \Leftrightarrow 2x = x + \frac{2}{x}$$

$\Leftrightarrow 2x^2 = x^2 + 2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$!?!

vb 3 E = energie
T = temperatuur

verband tussen T en E wordt gegeven door: $E(T)$

Stel we willen weten bij welke temperatuur T de energie gelijk aan E_0 is, dan moeten we oplossen: $E(T) = E_0 \iff \underbrace{E(T) - E_0}_{\text{noem deze } f(T)} = 0$

I.h.a. $\begin{cases} \text{gegeven de functie } f \\ \text{bepaal } x \text{ zodanig dat } \boxed{f(x) = 0} \end{cases}$ ⊙

de gezochte x-waarden heten → nulpunten van f
→ "wortels" van de vergelijking ⊙

---

vb 4 = vb 3 maar nu wordt de minimale energiewaarde gezocht, oftewel voor welke T is E minimaal.

--> onderzoek de vergelijking $\underbrace{E'(T)}_{\text{noem deze } g(T)} = 0$

⇝ zoek nulpunten van g
en onderzoek of dit een maximum of minimum voor E oplevert (en bij welke T).

Als $f(x)$ een lineaire functie is: $f(x) = ax + b$

dan is het nulpunt $x = -\frac{b}{a}$

Als $f(x) = ax^2 + bx + c$, dan zijn de nulpunten te berekenen via de abc-formule: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Als $f(x)$ een derdegraadspolynoom is, dan

(via een ingewikkelde uitdrukking)

$x_1 = \ldots$

$x_2 = \sim$

$x_3 = --$

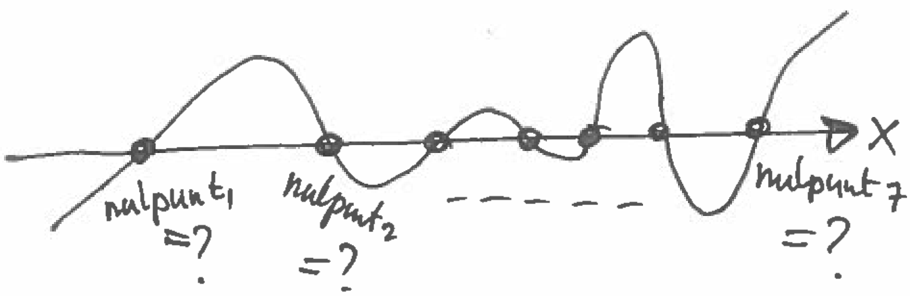
Als $f(x) = \sin(x)$, dan zijn de nulpunten $x = k \cdot \pi$

met $k = 0, \pi, 2\pi, \ldots$

en $k = \ldots, -2\pi, -\pi$

en voor sinus/cosinus-achtige functies zijn de nulpunten nog te bepalen via een of andere formule .....

Voor algemene functies f? ONBEKEND



We gaan de nulpunten **benaderen**.

Dit kan op vele manieren ....

Wij benaderen de gezochte x mbv een iteratieformule:

stap 1 herschrijf $f(x)=0$ naar $x = g(x)$

(Welke g?)

een andere functie (wel gerelateerd aan f natuurlijk)

stap 2 schrijf: $x_{i+1} = g(x_i)$

$i = 0, 1, 2, 3, \ldots$

met startwaarde x_0

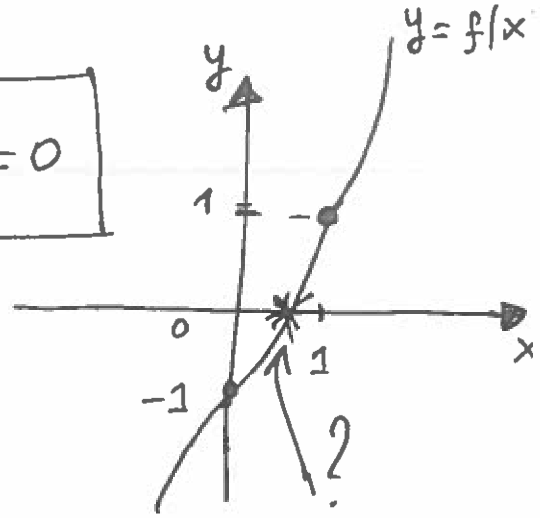
dwz $x_1 = g(x_0)$, $x_2 = g(x_1)$, $x_3 = g(x_2)$, ...

- convergeert deze rij?
- convergeert deze rij naar het nulpunt van f?
- hoe "snel"?
- wanneer stoppen we de iteratie? (bij welke waarde van de index i)

6)

Vb 5

$$\boxed{f(x) = x^3 + x - 1 = 0}$$



---

methode 1 herschrijf: $x(x^2+1) - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x(x^2+1) = 1$$

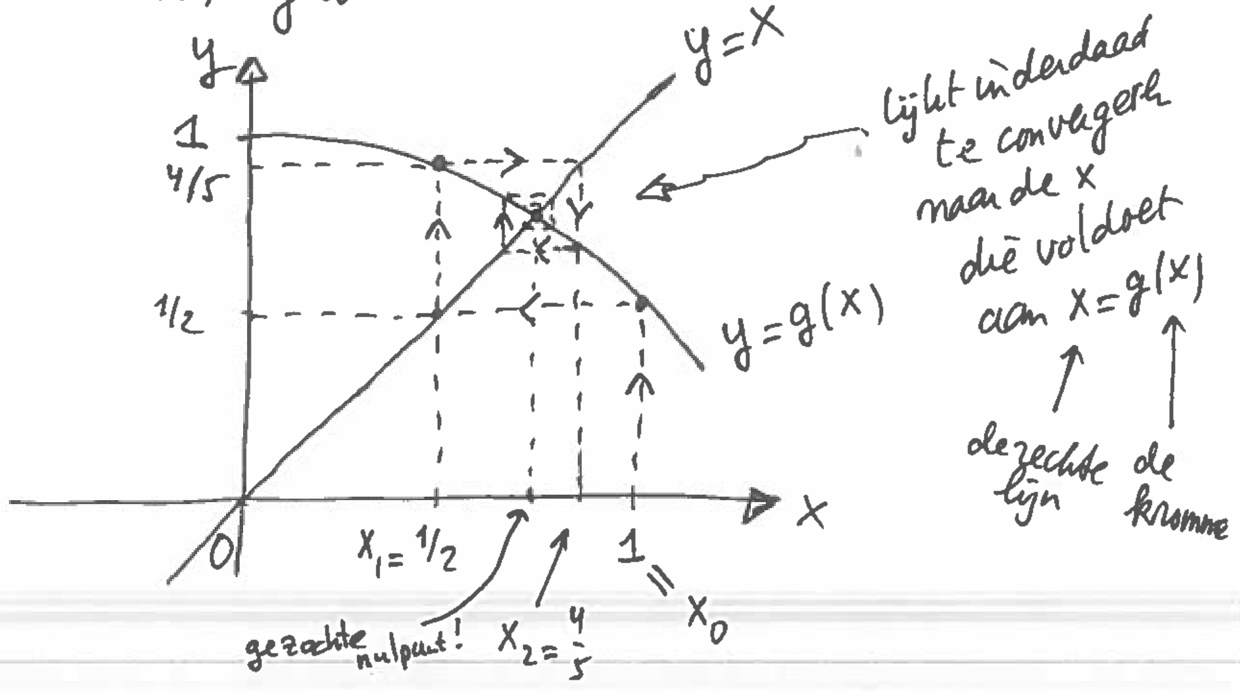
$$\Leftrightarrow \quad x = \underbrace{\frac{1}{x^2+1}}_{\text{noem deze } g(x)}$$

iteratief proces: $x_{i+1} = g(x_i) = \dfrac{1}{x_i^2+1} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$

neem bijv $x_0 = 1$

$$x_0 = 1,\ x_1 = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2},\ x_2 = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{5/4} = \frac{4}{5},\ x_3 = \frac{1}{\left(\frac{4}{5}\right)^2+1} = \frac{1}{41/25} = \frac{25}{41}$$

$x_4 = \ldots$ convergeert dit?



<u>methode 2</u> herschrijf: $x^3+x-1=0$

$\Leftrightarrow \underbrace{x^3+2x-1}_{\text{noem deze nu } g(x)}=x$

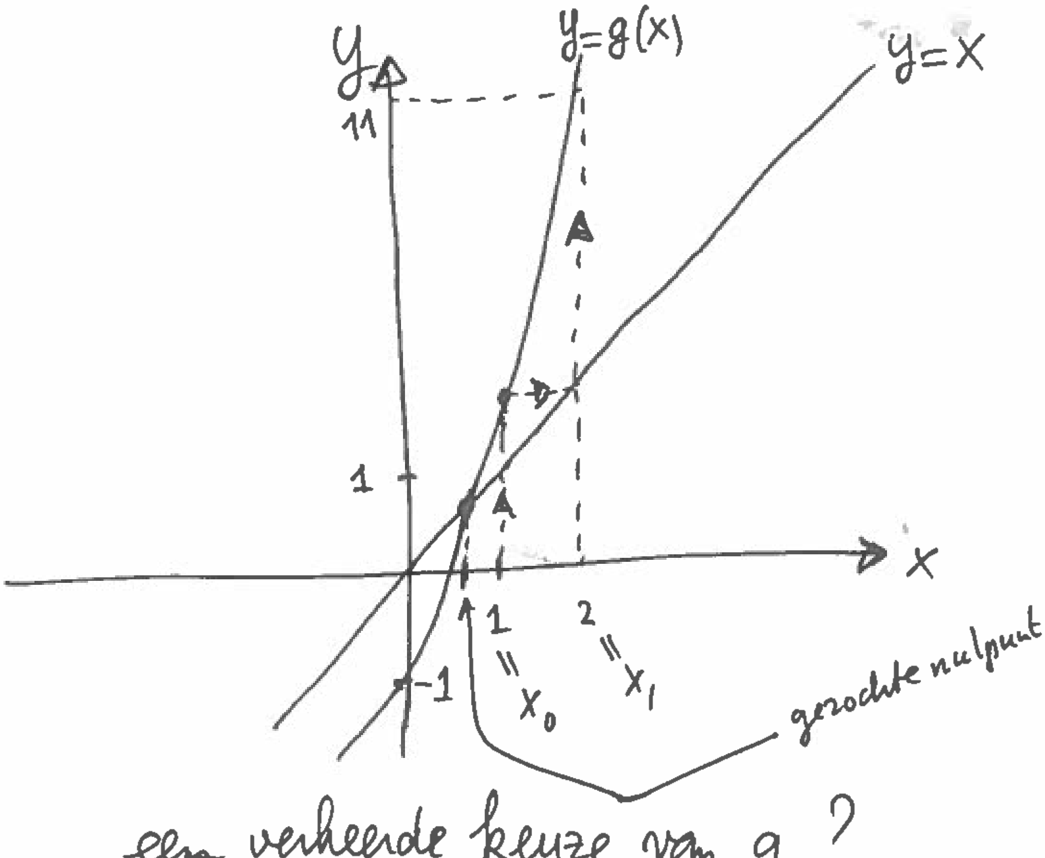
iteratief proces:
$$\begin{cases} x_{i+1} = g(x_i) = x_i^3+2x_i-1 & i=0,1,2,\dots \\ \text{neem weer } x_0=1 & \text{(ligt volgens het plaatje dichtbij het gezochte nulpunt van } f) \end{cases}$$

$x_0=1$, $x_1=1^3+2-1=2$, $x_2=2^3+4-1=11$, $x_3=11^3+22-1=\dots$

etcetera

lijkt te divergeren!

Teken weer in een plaatje: $y=x$ en $y=g(x)$



een verkeerde keuze van g?

- De keuze van $g(x)$ is dus belangrijk!
- Er bestaan, voor gegeven $f(x)=0$, veel mogelijke $g(x)$ (sterker nog, er zijn ∞ - veel keuzes!)
- Is er een "slimme" keuze van $g(x)$ mogelijk?

Eerst even een analyse van $f(x)=0$ ($\Leftrightarrow x=g(x)$)

Noem het gezochte nulpunt van f : a, dwz $\boxed{f(a)=0}$

en dus ook $\boxed{a=g(a)}$

Schrijf uit de Taylorreeks van g rond het nulpunt a:

$$g(x) = g(a) + (x-a)g'(a) + \tfrac{1}{2}(x-a)^2 g''(a) + \ldots$$

Evalueer dit in $x = x_i$ ← de i-de waarde in het iteratieproces $x_{i+1} = g(x_i)$

$$\Rightarrow \underbrace{g(x_i)}_{\overset{\parallel}{x_{i+1}}} = \underbrace{g(a)}_{\overset{\parallel}{a}} + (x_i-a)g'(a) + \tfrac{1}{2}(x_i-a)^2 g''(a) + \ldots$$

we weten: $\Rightarrow x_{i+1} = a + (x_i-a)g'(a) + \tfrac{1}{2}(x_i-a)^2 g''(a) + \ldots$

oftewel:

$$\underbrace{x_{i+1}-a}_{\substack{\text{dit is de fout}\\ \text{die gemaakt wordt}\\ \text{in iteratieslag } i+1\\ (\text{"volgende fout"})}} = g'(a)\underbrace{(x_i-a)}_{\substack{\text{dit is de fout}\\ \text{die gemaakt wordt}\\ \text{in iteratieslag } i\\ (\text{"vorige fout"})}} + \tfrac{1}{2}g''(a)\underbrace{(x_i-a)^2}_{\substack{\text{de "vorige}\\ \text{fout"}\\ \text{in het}\\ \text{kwadraat}}} + \ldots$$

Dicht bij het gezochte nulpunt is $x_i - a$ klein en dus $(x_i - a)^2$ nog kleiner, $(x_i - a)^3$ nog veel kleiner, etcetera

Dwz $\quad x_{i+1} - a \approx g'(a)\,(x_i - a)$ (hogere machten van $x_i - a$ worden verwaarloosd)

Als $g'(a) \neq 0$ en $|g'(a)| < 1$, dan wordt de "volgende fout" kleiner dan de "vorige fout" (die al klein was ---): $|x_{i+1} - a| < |x_i - a|$

$$|x_{i+2} - a| < |x_{i+1} - a| < |x_i - a|$$

$$|x_{i+3} - a| < |x_{i+2} - a| < |x_{i+1} - a| < |x_i - a|$$

etcetera

dit convergeert (mogelijk langzaam ---)

"de fout wordt steeds kleiner"

Wat als $|g'(a)| > 1$; dan $|x_{i+1} - a| > |x_i - a|$

de fout wordt groter, ook al start je dichtbij het nulpunt!

$\Rightarrow$ divergentie

Speciaal geval: stel $g'(a) = 0$

dan $\quad x_{i+1} - a \approx \dfrac{(x_i - a)^2}{2}\, g''(a)$

$\Rightarrow$ de fout neemt dan kwadratisch af!

dus "snelle" convergentie

Een "slimme" (?) $g(x)$:

(welke $g(x)$ heeft $g'(a)=0$, zonder dat we a kennen?)

we "kiezen": $$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

1) check of deze g wel overeenkomt met $f(x)=0$.

$$x = g(x) \iff x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\iff 0 = \frac{-f(x)}{f'(x)}$$

$$\iff f(x) = 0 \quad (\text{als } f'(x) \neq 0)$$

2) wat is $g'(a)$?

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$g'(x) = 1 - \left[\frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\right]$$

quotiëntregel

$$= 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

$$= 1 - \left[1 - \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\right]$$

$$= \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

$$\Rightarrow \quad g'(a) = \frac{f(a)f''(a)}{(f'(a))^2}$$

$$= \frac{0 \cdot f''(a)}{(f'(a))^2} = 0 \quad \S \;!!!$$

--- als $\underline{f'(a) \neq 0}$

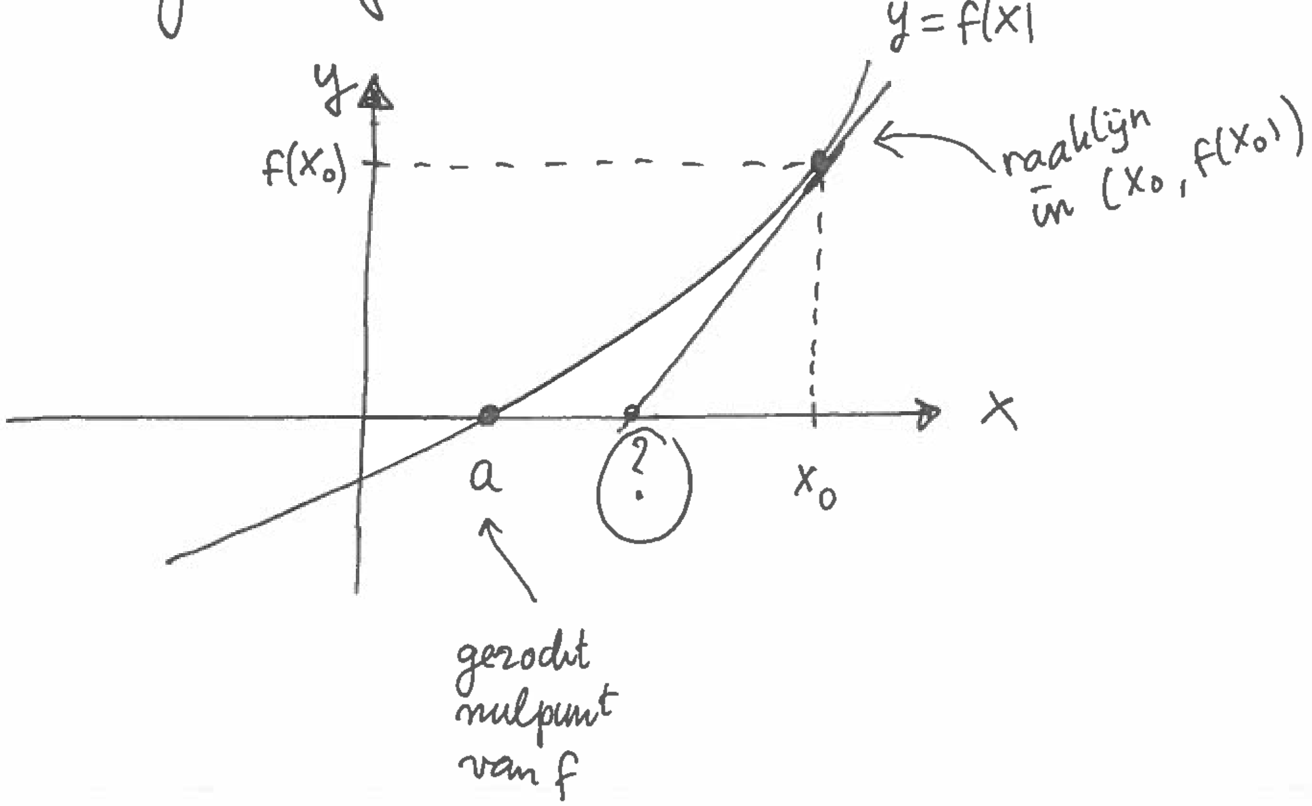
(anders $\frac{0}{0}$ en we weten dat dit nader onderzocht dient te worden!)

$\Longrightarrow$ met deze $g(x)$: een kwadratische afname van de fout (als je in de buurt blijft van de oplossing)

Deze methode $\begin{cases} x_{i+1} = x_i - \underbrace{\dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}}_{} = g(x_i) & i = 0, 1, 2, \ldots \\ x_0 = \ldots \end{cases}$

heet Newton–Raphson (ook wel afgekort als NR)

Een afleiding via raaklijnen:



raaklijn in $(x_0, f(x_0))$: $y = Ax + B$

$$A = f'(x_0) \quad \text{(de richtingscoëfficiënt)}$$

$$\Rightarrow \quad y = f'(x_0)\,x + B$$

deze rechte lijn gaat door $(x_0, f(x_0))$: $f(x_0) = f'(x_0)\,x_0 + B$

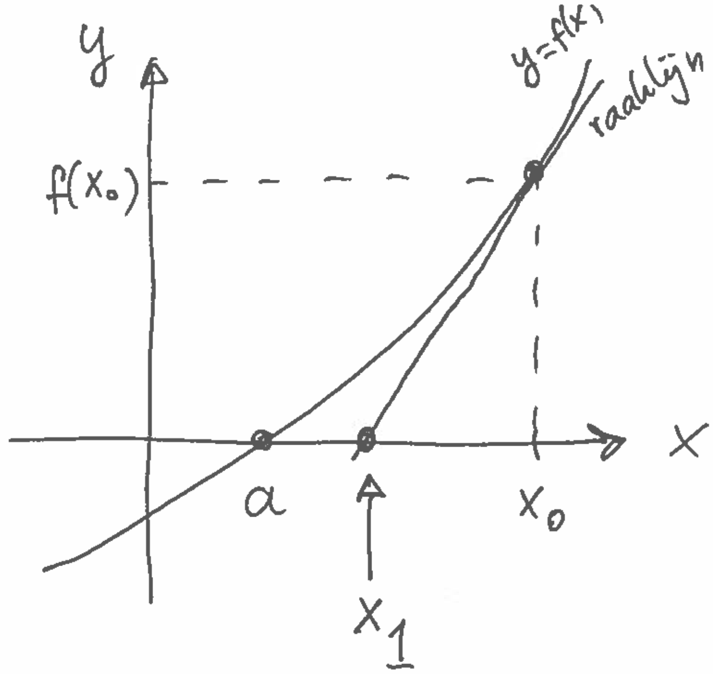
$$\Rightarrow \quad B = f(x_0) - f'(x_0)\,x_0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y = f'(x_0)\,x + f(x_0) - f'(x_0)\,x_0}$$

het nulpunt van deze rechte lijn : $0 = f'(x_0)\,x + f(x_0) - f'(x_0)\,x_0$!!

$$\Rightarrow \quad x = \frac{f'(x_0)\,x_0 - f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

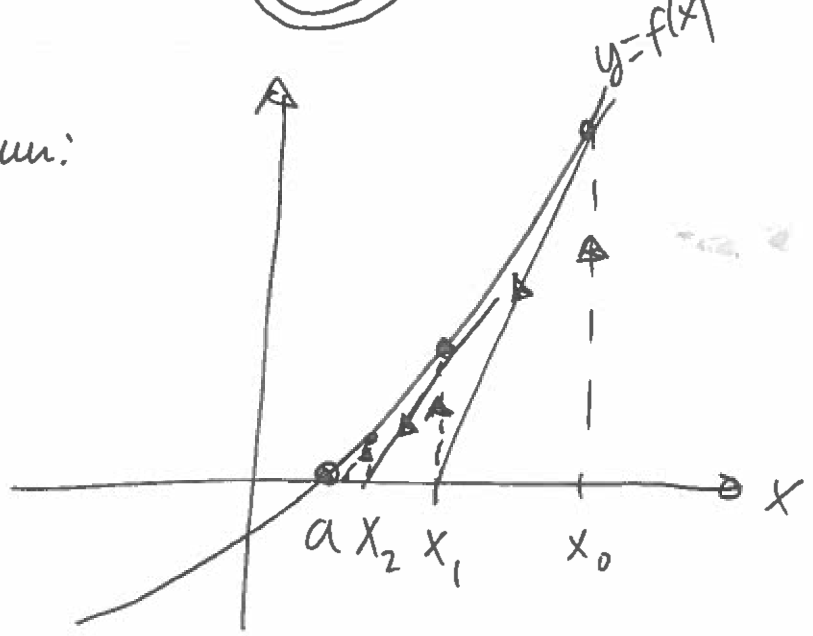
Noem deze x_1



herhaal dit proces $\Rightarrow$ $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

etcetera $\Rightarrow$ NR !

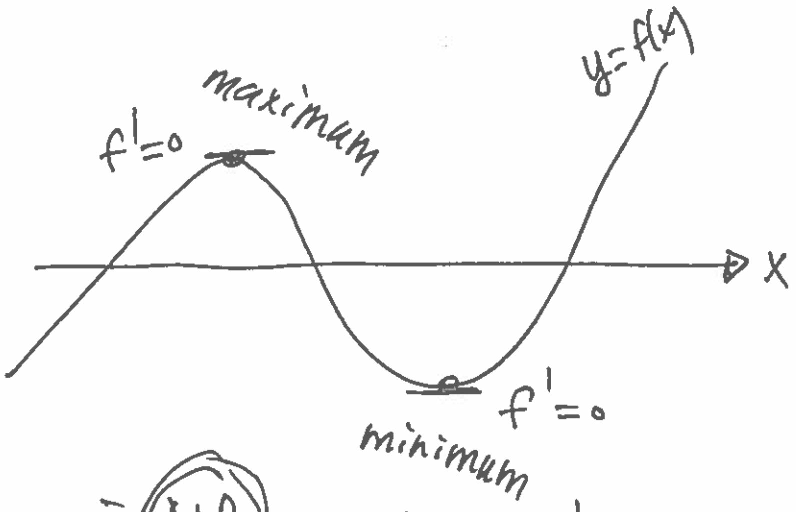
In een figuur:



- welke startwaarde x_0 ?
- wat gebeurt er als(wel) $f'(a)=0$?
- hoe voor minima of maxima (ipv nulpunten)?
- hoe voor meerdere dimensies? ($\rightarrow$ volgende les)

minima/maxima : zoek x waarvoor $f'(x)=0$.

(dwz nulpunten van f')



verwang in NR f door f' :

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i - \dfrac{f'(x_i)}{f''(x_i)}, \quad i=0,1,2,\ldots \\ x_0 \text{ startwaarde} \end{cases}$$

---

als $f'(a)=0$, dan $x_{i+1}-a \approx \text{constante}\,.\,(x_i-a)$
(of ≈ 0 ...)

dwz de fout gaat **lineair omlaag** (langzamer) : $\boxed{\text{"orde = 1" convergentie}}$

als $f''(a)=0$, dan $x_{i+1}-a \approx \text{constante}\,.\,(x_i-a)^3$ ←!!
(of ≈ 0)

dwz de fout gaat **kubisch omlaag** (sneller!) : $\boxed{\text{"orde = 3" convergentie}}$

"normaal gesproken" ($f'\neq 0, f''\neq 0$) : $x_{i+1}-a \approx \text{constante}\,.\,(x_i-a)^2$: **kwadratische foutafname** $\boxed{\text{"orde = 2" convergentie}}$