

Taylorreeksen & T-opgaven

Inleiding

Fourierreeksen (zie hoofdstuk 15 van Steiner) worden opgebouwd uit de functies $1, \cos \frac{\pi x}{L}, \cos \frac{2\pi x}{L}, \dots, \sin \frac{\pi x}{L}, \dots$. Ook de machtsfuncties $1, x, x^2, x^3, \dots$ zijn in de praktijk als bouwstenen van een reeks nuttig. Zo ontstaat een *machtrees*:

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots$$

De *coëfficiënten* $c_0, c_1, \dots$ van de *machtrees* kunnen reële of complexe getallen zijn.

Met behulp van het $\sum$ -teken wordt de *machtrees* geschreven als

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \quad (1)$$

Algemener worden ook machtsfuncties $(x - a)^n$ gebruikt. Hierin is a een reëel getal. De *machtrees*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n \quad (2)$$

heet dan *machtrees rond a* . In deze terminologie heet de *machtrees* (1) dan een *machtrees rond 0*.

We kunnen nu allerlei vragen stellen:

- Welke functies f zijn te schrijven als *machtrees*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n. \quad (3)$$

Als f zo te schrijven is noemt men de *machtrees* de *Taylorreeks van f rond a* .

De Taylorreeks rond 0 wordt ook wel *reeks van Maclaurin* genoemd.

- Hoe bereken je de coëfficiënten van de Taylorreeks van f rond a ?
- Voor welke x is de formule (3) geldig, of anders gezegd: voor welke x geldt

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N c_n (x - a)^n?$$

Opmerking

Het is vaak nuttig bij *machtrees* om ook complexe waarden van de variabele te beschouwen. In dit geval geven we de variabele aan met de letter z en wordt uitdrukking (1) dus $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ en analoog wordt (2) dan $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$ waarin ook a een complex getal mag zijn.

De Taylorcoëfficiënten

Veronderstel dat de functie f voorgesteld kan worden door een Taylorreeks

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n. \quad (4)$$

Substitutie van de waarde a voor x geeft $f(a) = c_0$ (want alle termen $c_n(x-a)^n$ met $n > 0$ zijn dan 0).

Als we vervolgens (4) differentiëren vinden we:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n(x-a)^{n-1}. \quad (5)$$

(Merk op dat de sommatie-index n om een voor de hand liggende reden nu begint bij de waarde 1.)

In formule (5) substitueren we weer de waarde a voor x en we vinden $f'(a) = c_1$. Nogmaals differentiëren geeft:

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) n c_n(x-a)^{n-2}. \quad (6)$$

We vinden $f''(a) = 2c_2$.

Zo doorgaande vinden we voor een willekeurig getal k dat $f^{(k)}(a) = k!c_k$, ofwel:

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (7)$$

De formule voor de Taylorreeks van een functie f is dus:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n. \quad (8)$$

Voorbeeld

$f(x) = e^x$. We nemen $a = 0$. Er geldt $f^{(k)}(x) = e^x$ en dus $f^{(k)}(0) = 1$ voor iedere k . Als de exponentiële functie inderdaad door een machtreeks rond 0 kan worden voorgesteld vinden we:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n. \quad (9)$$

Invullen van $x = 1$ geeft een bekende formule voor het getal e .

Toelichting bij de machtreekscoëfficiënten

De hierboven gevolgde berekening roept enkele vragen op. Allereerst: de somfunctie wordt, zelfs willekeurig vaak, gedifferentieerd. Omdat een functie die differentieerbaar is ook continu is, zal de somfunctie van een Taylorreeks continu moeten zijn. De vraag rijst, welke eigenschappen de somfunctie van een

Taylorreeks heeft. En vervolgens: voor welke waarden van x is formule (8) nu geldig?

De antwoorden worden gegeven door de volgende stelling:

Hoofdstelling over machtreeksen. *Bij iedere machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ bestaat een R met $0 \leq R \leq \infty$ met de eigenschap dat voor alle x met $|x-a| < R$ de reeks convergent is en voor alle x met $|x-a| > R$ de reeks divergent is.*

Het getal R (of het symbool ∞) heet de *convergentiestraal* van de machtreeks. Op het interval $(a-R, a+R)$ (of op de hele reële rechte als $R = \infty$) definieert de machtreeks dus een functie f : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$.

Deze functie f is bovendien willekeurig vaak differentieerbaar en voor het berekenen van de afgeleide geldt de ‘oneindige-somregel’:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}.$$

Deze nieuwe reeks heeft dezelfde convergentiestraal R .

De convergentiestraal R kan berekend worden uit:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \quad (10)$$

of uit

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} \quad (11)$$

mits deze limieten bestaan (als beide bestaan dan zijn ze gelijk).

Opmerkingen

1. Bovenstaande stelling is ook juist als we in plaats van reële getallen complexe getallen toelaten. De verzameling der complexe getallen z met $|z-a| = R$ heet dan de convergentiecirkel van de machtreeks omdat de reeks voor alle z met $|z-a| < R$ convergent is en voor alle z met $|z-a| > R$ divergent is. Dit verklaart ook de naam convergentiestraal in de stelling.
2. De stelling doet geen uitspraak over het gedrag van de reeks voor x met $|x-a| = R$. Voor deze x is, afhankelijk van de betreffende machtreeks, nog van alles mogelijk.
3. De mogelijkheid bestaat dat een machtreeks convergentiestraal 0 heeft. De reeks convergeert dan alleen in a en is onbruikbaar.
4. De vraag welke functies door een Taylorreeks kunnen worden voorgesteld is met deze stelling nog niet beantwoord. Wel volgt uit de stelling dat alleen willekeurig vaak differentieerbare functies door een Taylorreeks kunnen worden voorgesteld. We gaan hierop niet verder in (zie ook Kreyszig §14.3), maar geven alleen een voorbeeld.

De functie f gedefinieerd door $f(x) = e^{-1/x^2}$ als $x \neq 0$ en $f(0) = 0$ heeft de eigenschap dat $f^{(n)}(0) = 0$ voor iedere $n = 1, 2, \dots$. De coëfficiënten van zijn Taylorreeks rond 0 zouden dus alle gelijk aan 0 moeten zijn. Duidelijk is dat de gevonden machtreeks hier niet de functie voorstelt en dus onbruikbaar is.

Voorbeeld

Zie het voorbeeld $f(x) = e^x$ hierboven. De machtreekscoëfficiënten zijn $c_n = 1/n!$, en dus $c_n/c_{n+1} = n+1$. Er volgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{c_{n+1}} = \infty$, dus $R = \infty$; met andere woorden, de reeks convergeert voor iedere waarde van x .

Voorbeelden van Taylorreeksen ROND 0

$$\begin{aligned}
 e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n & \text{alle } x \\
 \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} & \text{alle } x \\
 \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} & \text{alle } x \\
 \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n & |x| < 1 \\
 \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n & |x| < 1 \\
 \arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} & |x| < 1 \\
 (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n & |x| < 1
 \end{aligned}$$

Opmerkingen

1. De reeks $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ wordt *meetkundige reeks* genoemd.
2. De coëfficiënten van de Taylorreeksen van al deze functies met uitzondering van die van $\arctan$ zijn te berekenen met behulp van formule (7) omdat alle hogere afgeleiden van die functies eenvoudig te berekenen zijn.
Die voor $\arctan$ kunnen bijvoorbeeld gevonden worden door gebruik te maken van de formule $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$. Substitueer hiertoe eerst $x = -y^2$ in de Taylorreeks van $\frac{1}{1-x}$. We vinden $\frac{1}{1+y^2} = 1 - y^2 + y^4 - y^6 + \dots$ en na integreren over het interval $[0, x]$ (of $[x, 0]$ als $x < 0$) wordt dit $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$.
3. Voor de uitdrukking $\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$ gebruikt men meestal de notatie $\binom{\alpha}{n}$ en dus

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad |x| < 1.$$

4. Laat α een geheel positief getal k zijn. Omdat voor gehele k geldt $\binom{k}{n} = 0$ als $n > k$, is de Taylorreeks in dit geval een veelterm en we vinden, nu voor alle x ,

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} x^n.$$

Deze formule heet het *binomium van Newton*. Het binomium kan natuurlijk ook op een meer directe manier bewezen worden.

5. Voor $\alpha = \frac{1}{2}$ vinden we $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \dots$ als $|x| < 1$.
6. De convergentiestralen zijn eenvoudig te berekenen met behulp van formule (10). Bij de reeks voor $\cos x$ lijkt het of deze formule niet gebruikt kan worden omdat de coëfficiënten bij oneven n gelijk aan 0 zijn, maar als we de reeks opvatten als een machtreeks in de variabele x^2 in plaats van in de variabele x , dan komen deze coëfficiënten niet voor en kan formule (10) worden toegepast. We vinden $R = \infty$.

Bij de reeks voor $\sin x$ kunnen we eerst een factor x voor het Σ -teken brengen en vervolgens dezelfde procedure toepassen als bij de reeks voor $\cos x$. Weer is $R = \infty$.

De beide volgende reeksen leveren geen probleem: $R = 1$, en ook bij de reeks voor $\arctan x$ ziet men, na een factor x voor het Σ -teken te hebben gebracht, dat de convergentiestraal gelijk aan 1 is.

De laatste reeks tenslotte is weer een directe toepassing van formule (10).

7. Dat de machtreeksen in deze voorbeelden inderdaad de functies voorstellen is niet vanzelfsprekend is (zie opmerking 4 op blz. 3). We komen hier nog op terug, zie blz. 6.

Toepassingen

Het berekenen van limieten

Limieten zoals $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ en $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ zijn met behulp van Taylorreeksen eenvoudig te berekenen. Als voorbeeld behandelen we de eerste limiet:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}.$$

Als we van deze reeks $\lim_{x \rightarrow 0}$ nemen, dan hebben alle termen waarvoor $n > 0$ limiet gelijk aan 0. De term met $n = 0$ is gelijk aan 1. Conclusie: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Op dezelfde manier vinden we dat de beide andere limieten gelijk aan 1 zijn.

Maar ook ingewikkelder voorbeelden laten zich met behulp van Taylorreeksen eenvoudig uitrekenen, zoals bijvoorbeeld $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - \cos \sqrt{2}x}{\sqrt{1+x^4} - 1} = \frac{2}{3}$. Met behulp van de Taylorreeksen rond 0 voor resp. e^x , $\cos x$ en $\sqrt{1+x}$ volgt

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \dots, \quad \cos \sqrt{2}x = 1 - x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \dots \quad \text{en} \quad \sqrt{1+x^4} = 1 + \frac{1}{2}x^4 + \dots$$

$$\text{Dus } \frac{e^{-x^2} - \cos \sqrt{2}x}{\sqrt{1+x^4} - 1} = \frac{(1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \dots) - (1 - x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \dots)}{(1 + \frac{1}{2}x^4 + \dots) - 1}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^4 + \dots}{\frac{1}{2}x^4 + \dots} \text{ waarin } \dots \text{ steeds betekent een som van termen met machten}$$

van x die tenminste gelijk aan 6 zijn. Na delen van teller en noemer door x^4 en verder vereenvoudigen vinden we $\frac{\frac{2}{3} + \dots}{1 + \dots}$, waarin $\dots$ nu betekent een som van termen met machten van x die tenminste gelijk aan 2 zijn. Nemen we hiervan $\lim_{x \rightarrow 0}$ dan vinden we $\frac{2}{3}$.

Uit deze berekeningen gaan we vermoeden dat een beginstuk van een Taylorreeks van een functie f een goede benadering van f zal zijn. Daarop gaan we nu nader in.

Benaderingen van functies door veeltermen

Laat $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ de Taylorreeks van een functie f zijn. Een beginstuk

$\sum_{n=0}^N c_n(x-a)^n$ van deze reeks heet *Taylorveelterm van f rond a* , en wel de *Taylorveelterm van orde N* . Als $c_N \neq 0$ dan is de graad van deze veelterm gelijk aan N en anders kleiner dan N .

Op grond van de ervaringen in de voorgaande paragraaf over het berekenen van limieten verwachten we dat een Taylorveelterm van f een goede benadering van de functie f zal geven en vermoedelijk des te beter naarmate zijn orde hoger is. Hoe goed is de benadering? Met andere woorden, kunnen we iets zeggen over het verschil

$$|f(x) - \sum_{n=0}^N c_n(x-a)^n|?$$

De volgende stelling biedt de mogelijkheid op deze vragen een antwoord te geven.

Stelling (de formule van Taylor met restterm van Lagrange):

Als $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ op $(a-R, a+R)$, dan bestaat er bij ieder getal x in $(a-R, a+R)$ een getal ξ tussen a en x zo dat

$$f(x) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} (x-a)^{N+1}.$$

De term $\frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} (x-a)^{N+1}$ heet *restterm van orde N* en is genoemd naar Lagrange.

Toepassing van de formule van Taylor:

Als we op het interval $(a - R, a + R)$ de Taylorveelterm $\sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$ beschouwen als benadering van $f(x)$, dan is de gemaakte fout gelijk aan de restterm.

Dit idee hebben we eigenlijk al eerder in een voorbeeld gebruikt; we hebben toen de restterm steeds aangegeven door $\dots$. We hoefden ons daar niet te bekommeren om de grootte van de gemaakte fout omdat we $\lim_{x \rightarrow a}$ namen en de limiet van de resttermen toch gelijk aan 0 was.

Als we echter concreet de functiewaarde $f(x)$ benaderen door de waarde in x van een Taylorveelterm van f , dan hebben we hieraan alleen iets als we weten hoe groot de gemaakte fout is, of althans een bovenschatting van de gemaakte fout kunnen geven. (Een bovenschatting van de gemaakte fout is een positief getal M met de eigenschap dat de absolute waarde van de gemaakte fout ten hoogste gelijk is aan M .)

We nemen als **voorbeeld** de benadering op het interval $(-1, 1)$ van e^x door een Taylorveelterm $\sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} x^n$. Om iets over de gemaakte fout te kunnen zeggen gaan we de restterm $\frac{e^\xi}{(N+1)!} x^{N+1}$ schatten.

Omdat de e-macht een stijgende functie is, geldt $e^\xi < e^x$ als $x > 0$ (want $0 < \xi < x$) en $e^\xi < 1$ als $x < 0$ (want dan $x < \xi < 0$).

Nu kunnen we de restterm schatten. We nemen als voorbeeld $N=9$. Omdat $e < 3$ en $|x| < 1$, vinden we

$$\left| \frac{e^\xi}{(N+1)!} x^{N+1} \right| < \frac{3}{10!} < 10^{-6}.$$

Conclusie: voor alle x in $(-1, 1)$ geldt $\left| e^x - \sum_{n=0}^9 \frac{1}{n!} x^n \right| < 10^{-6}$.

Op het interval $(-2, 2)$ is de benadering door de 9^e orde Taylorveelterm al veel minder goed, want een schatting van de restterm op dit interval geeft $\left| \frac{e^\xi}{(N+1)!} x^{N+1} \right| < \frac{3^2 \cdot 2^{10}}{10!} < 3 \cdot 10^{-3}$.

Desgewenst kunnen we ook op het interval $(-2, 2)$ een Taylorveelterm vinden die de functiewaarden tot op een fout van ten hoogste 10^{-6} benadert. We zullen dan echter een grotere N moeten kiezen. Het vergroten van de N maakt de benadering inderdaad beter omdat de factor $\frac{1}{(N+1)!} x^{N+1}$ bij vaste x kleiner

wordt als N voldoende groot wordt. (Bedenk dat $\frac{x^{N+1}}{(N+1)!} = \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdots \frac{x}{N+1}$

en dat de breuken $\frac{x}{k}$ kleiner dan 1 zijn zodra $k > x$. Het gevolg is dus dat bij vaste x geldt dat $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{x^{N+1}}{(N+1)!} = 0$.)

Na enig rekenwerk vinden we dat $N = 14$ voldoet en dat dus voor alle x in

$(-2, 2)$ geldt

$$\left| e^x - \sum_{n=0}^{14} \frac{1}{n!} x^n \right| < 10^{-6}.$$

Het berekenen van functiewaarden zoals e^x , $\sin x$, $\cos x$ enz. is dus teruggebracht tot (weliswaar een zeer groot aantal) optellingen en vermenigvuldigingen. Op deze wijze zijn rekenapparaatjes in staat om snel een goede benadering van dergelijke functiewaarden te geven.

Het schatten van de fout in deze benaderingen met behulp van de restterm van Lagrange kan natuurlijk alleen worden gedaan als alle afgeleiden te berekenen zijn. Bij bijvoorbeeld $\arctan$ mislukt het. Dan moet een andere formule voor de restterm gebruikt worden. Hierop gaan we niet verder in.

Samenstellen van Taylorreeksen

We volstaan met een voorbeeld. We bepalen de termen van de Taylorreeks van de functie $\sin(e^x - 1)$ tot en met de orde vier. Omdat $\sin y = y - \frac{y^3}{6} + \dots$ en $e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$, is

$$\begin{aligned} \sin(e^x - 1) &= \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots \right) - \frac{1}{6} \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots \right)^3 + \dots \\ &= \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots \right) - \frac{1}{6} \left(x^3 + \frac{3}{2}x^4 + \dots \right) + \dots \\ &= x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{24}x^4 + \dots \end{aligned}$$

Met behulp van een rekenmachientje kan men de juistheid van de gevonden benadering controleren; neem bijvoorbeeld $x = 0,01$.

Opgave T1.

Bereken de Taylorreeks rond 0 van de functies $\sinh$ en $\cosh$.
Wat zijn de convergentiestralen?

Opgave T2.

- Bereken de Taylorreeks rond een willekeurig punt a van de functie e^x .
- Bereken de Taylorreeks rond $\frac{\pi}{2}$ van de functie $\sin x$.
- Bereken de Taylorreeks rond -1 van de functie $\frac{1}{1-x}$.
- Bereken van deze reeksen ook de convergentiestralen.

Opgave T3.

Substitueer in de complexe Taylorreeks rond 0 van de functie e^z voor z de waarde ix , waarin x een reëel getal is.

Wat zijn het reële en imaginaire deel van de gevonden reeks? Welke bekende formule vind je?

Opgave T4.

Controleer dat de convergentiestraal van de Taylorreeks rond 0 van de functie $(1+x)^\alpha$ gelijk is aan 1.

Opgave T5.

Substitueer in de Taylorreeks rond 0 van $(1+x)^\alpha$ voor α de waarde -1 en controleer dat er een reeds bekende reeks verschijnt.

Opgave T6.

Bereken $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$.

Opgave T7.

Bereken de volgende limieten:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \ln(1+x)} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{\sin(x^2)} \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1-x)} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\tan x - x} \end{array}$$

Opgave T8.

Pas de formule van Taylor toe voor $a = 0$ en $f(x) = e^x$.

Substitueer in de gevonden formule voor x de waarde 1.

Gebruik vervolgens dat $0 < \xi < 1$ en dat dus $e^\xi < e$.

Welke ongelijkheid vind je zo en wat volgt hieruit voor e ?

Wat vind je als je N achtereenvolgens de waarden 1, 2 en 3 geeft?

Opgave T9.

Controleer dat $\left| \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{1}{24}$ voor $|x| < 1$.

Opgave T10.

- a) Bereken de Taylorveelterm van orde 2 en de bijbehorende restterm $R(x)$ van $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ rond $x = 0$.

- b) Controleer dat voor x met $-1 < x < 0$ geldt $|R(x)| \leq \frac{5}{16}$.

Opgave T11.

Bereken $\sin \frac{1}{10}$ in 10 decimalen nauwkeurig. (Houd er rekening mee dat bij het benaderen van de afzonderlijke termen in de Taylorveelterm door decimale breuken afrondfouten optreden!)

Opgave T12.

Bereken van de Taylorontwikkeling van $f(x) = \ln(1 + xe^x)$ de termen tot en met de orde 3.

Opgave T13.

Bepaal van de functie $\sin(e^x - 1)$ (gebruik de tabel van Taylorreeksen op blz. 4) de termen van de Taylorreeks van orde vier en vijf.

Opgave T14.

Onderzoek (eventueel met Mathematica of Matlab) hoe groot N moet zijn opdat

$$\left| e^x - \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} \right| < \frac{1}{100},$$

- a) voor $x = 1$,
- b) voor $x = -2$,
- c) voor $x = 20$.

Opgave T15.

- i)
 - a) Bepaal de Taylorveeltermen van de sinusfunctie rond 0 van orde 1 – 6.
 - b) Verklaar waarom deze Taylorveeltermen twee aan twee gelijk zijn.
 - c) Plot met Mathematica of Matlab in één grafiek de functie $\sin$ en de Taylorveeltermen van orde 1, 3, 5, ..., 11.
- ii) Doe hetzelfde voor de arctangensfunctie.