TENTAMEN Wiskunde 2 (SK-BWS-13)

MAANDAG 4 NOVEMBER 2024; 9:00-11:30

1. Schrijf je naam, voorletters en studentennummer op elk vel papier.
2. Schrijf ook je naam (maar geen uitwerkingen) op het omslagvel.
3. Alle pagina's zijn genummerd: maak iedere opgave op het bijbehorende vel!
4. *Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien* **hoe** *je eraan gekomen bent.*
5. Het gebruik van het boek van *Steiner* en de *formulebladen* is wel toegestaan, echter **niet** toegestaan zijn: aantekeningen en uitwerkingen van opgaven!
6. (Grafische) rekenmachientjes mogen wel worden gebruikt, maar laptops en verbindingen met internet (natuurlijk) **niet**.
7. Met DV wordt in de vragen bedoeld: DifferentiaalVergelijking.

SUCCES!

Vraag 1: $\leftrightarrow$ *LES 1 (max. 15 pt)*

Gegeven zijn de vijf reeksen:

$$(a)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n-1}{3^n}, \quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad (c)\ \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-n}, \quad (d)\ \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n^3}, \quad (e)\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-2}{\pi}\right)^n.$$

Laat zien dat:

- reeks (a) *convergeert* (m.b.v. "ratio test")
- reeks (b) *divergeert* (m.b.v. "comparison test")
- reeks (c) *convergeert* (m.b.v. "integral test")
- waarom divergeert reeks (d)?
- waarom convergeert reeks (e)?

Vraag 2: $\leftrightarrow$ *LES 2 (max. 10 pt)*

Gegeven is dat de energie E en de dichtheid ρ op de volgende manier afhangen van de temperatuur T:

$$E(T) = \cos(T) - \sin(T) - 1 \quad \text{en} \quad \rho(T) = \mathrm{e}^T - 1.$$

(a) Bepaal, door gebruik te maken van bekende Taylorreeksen, de Taylorreeks (*tot en met* de term met T^5) van $E(T)$ *rond* de temperatuur $T = 0$.

(b) Bereken *m.b.v. onderdeel* (a): $\lim_{T\to 0} \frac{E(T)}{\rho(T)}$.

Vraag 3: $\leftrightarrow$ *LES 5 (max. 10 pt)*

Bepaal m.b.v. *scheiding van variabelen* de oplossing $y(x)$ van de DV:

$$x\mathrm{e}^{x^2} + yy' = 0, \quad y > 0$$

met beginvoorwaarde $y(0) = 1$. Hint: herken de primitieve van de functie $x\mathrm{e}^{x^2}$.

Vraag 4: $\leftrightarrow$ *LES 6 (max. 14 pt)*

Gegeven is de *inhomogene* tweede-orde DV:

$$y'' - y' - 6y = 5 - 6x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Bepaal, achtereenvolgens, de algemene *homogene* oplossing, een *particuliere* oplossing en de *volledige oplossing* van deze DV.

Vraag 5: $\leftrightarrow$ *LES 8 (max. 16 pt)*

Beschouw het volgende stelsel *niet-lineaire* DVen;

$$\begin{cases} x' = -x + \gamma y, \quad \gamma \geq 0, \\ y' = y + \alpha x + \beta x^2, \quad \alpha \geq 0, \ \beta \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(a) Bepaal de Jacobiaan (matrix) horend bij dit stelsel DVen.

(b) Bereken alle kritieke punten van dit stelsel voor het geval $\alpha = 1, \beta = -1, \gamma = 1$ en ook voor het geval $\alpha = \beta = 1, \ \gamma = 0$.

(c) Bepaal de *aard* van deze kritieke punten voor beide gevallen uit onderdeel (b).

(d) *Schets* de faseplaatjes voor $\alpha = \beta = \gamma = 0$ en ook voor $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 0$.

Vraag 6: $\leftrightarrow$ *LES 9 (max. 10 pt)*

We bekijken nu de functie $f(x) = x^2 + x - 2$ en de volgende *vier* iteratieve processen $x_{i+1} = \varphi(x_i),\ i = 0, 1, 2, ...$ om de nulpunten a en b van f te benaderen (de startwaarde x_0 wordt voldoende dicht bij het nulpunt gekozen):

1. $\varphi(x) = \frac{2}{x} - 1,$
2. $\varphi(x) = \frac{x^2+2}{2x+1},$
3. $\varphi(x) = \sqrt{2-x},$
4. $\varphi(x) = x^2 + 2x - 2.$

(a) Bepaal de nulpunten $a < 0$ en $b > 0$ van f en laat zien dat de gegeven functies φ inderdaad kandidaat zijn voor het genoemde iteratieve proces.

(b) Voor welke φ convergeert het proces naar het (positieve) nulpunt b van f (en welk proces divergeert?)? Motiveer je antwoorden!

(c) Welke van de vier iteratieve processen komt met de methode van Newton-Raphson overeen? (leg uit waarom!)
En wat is het extra voordeel van deze methode t.o.v. de andere methoden?

Vraag 7: $\leftrightarrow$ *LES 10 (max. 15 pt)*

Gegeven is de energieverdeling $\mathcal{E}(x, y) = x^3 - 6x^2 - 8y^2 + 2024$.

(a) Bepaal $\nabla\mathcal{E}$ en bereken de richtingsafgeleide van $\mathcal{E}$ in het punt $(1, -1)$ in de richting van de vector $[-1, -1]^T$.

(b) Bepaal de Hessiaan (matrix) $\mathcal{H}$ en $\nabla \cdot (\nabla\mathcal{E})$.

(c) Bereken de stationaire punten van $\mathcal{E}$.

(d) Bepaal het karakter van de stationaire punten (maximum, minimum, zadel of "onduidelijk").

(e) *Schets*, met de informatie uit (d), de hoogtelijnen van de energie $\mathcal{E}$ in het xy-vlak. Wat is de maximale waarde van de energie in het maximum?

Z.O.Z. voor Vraag 8!

Vraag 8: $\leftrightarrow$ *LES 14 (max. 10 pt)*

We gaan met behulp van de *Laplace-transformatie* de volgende DV oplossen:

$$y'' + 4y = \sin(2t)$$

met begincondities: $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$.

(a) Pas de Laplace-transformatie $\mathcal{L}$ toe op deze DV en vul vervolgens de twee begincondities in. Maak hierbij gebruik van de formulebladen en de tabel.

(b) Bereken nu de oplossing van deze DV. De tabel in de formulebladen kan hierbij weer van nut zijn.