

Opgave 54:

— Voor $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}$ is de algemene oplossing:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^t \\ c_2 e^{2t} \end{pmatrix}.$$

λ_1 en λ_2 zijn groter dan 0 $\rightarrow$ instabiele map.

Voor $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$ is de algemene oplossing:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} \dots$$

$\lambda_1 > 0$ en $\lambda_2 < 0 \rightarrow$ zadelpunt.

Voor $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}$ is de algemene oplossing:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3i \end{pmatrix} e^{3it} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3i \end{pmatrix} e^{-3it}$$

Beide eigenwaarden zijn complex met een reëel deel gelijk aan 0 $\rightarrow$ centrum.

Voor $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \vec{x}$ is de algemene oplossing:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(-2+2i)t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{(-2-2i)t}$$

Twee complexe eigenwaarden met een reëel deel kleiner dan 0 $\rightarrow$ stabiele spiraal.

Los $x'' + \frac{1}{9}x = 0$ op.

Definieer $x' = y$.

Dan geldt: $y' = x' = -\frac{1}{9}x$.

We hebben nu dus het volgende stelsel:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{9} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

De algemene oplossing wordt:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3}i \end{pmatrix} e^{\frac{1}{3}it} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3}i \end{pmatrix} e^{-\frac{1}{3}it}$$

Twee complexe eigenwaarden met een reëel deel gelijk aan 0 $\rightarrow$ centrum.

Los $x'' + ax = 0$ op. Pas exact dezelfde truc toe als in het vorige onderdeel. De eigenwaarden zijn:

$\lambda = \pm \sqrt{-a}$. We onderscheiden 3 regimes:

$a = 0 \rightarrow$ hier kun je niets over zeggen

$a > 0 \rightarrow \lambda = \pm i\sqrt{a} \rightarrow$ centrum

$a < 0 \rightarrow \lambda = \pm \sqrt{-a} \rightarrow$ zadelpunt

Opgave SS

Split $x'' - x + x^2 = 0$ in 2 vergelijkingen
(zie opgave S4). Je krijgt:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + x^2 \end{cases}$$

Kritieke punten zijn $(0,0)$ en $(1,0)$

Bereken de functie $f(x,y) = x - x^2$ in een
Taylorreeks rond $(0,0)$:

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) y + \dots$$

$$\Rightarrow f(x,y) \approx x \text{ rond } (0,0).$$

Dus rond $(0,0)$ krijg je het stelsel:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

Dit stelsel is lineair!

Eigenwaarden bepalen geeft $\lambda = \pm 1 \rightarrow$ zadelpunt.

Doe hetzelfde rond $(1,0)$. Je krijgt:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mag je negeren bij het oplossen
van dit lineaire stelsel. Eigenwaarden zijn $\lambda = \pm i \rightarrow$
 $(1,0)$ is een centrumpunt.

§6

$(0,0)$: zadelpunt

$(1,0)$: rechtsdraaiend centrumpunt

§7

a) $(-1,0)$: zadelpunt

$(0,0)$: rechtsdraaiend centrumpunt

b) $(0,0)$: rechtsdraaiend centrumpunt

$(2,0)$: zadelpunt

c) $(-1,0)$: zadelpunt, $(0,0)$: rechtsdraaiend centrumpunt
en $(1,0)$: zadelpunt

d) $(-3,0)$: rechtsdraaiend centrumpunt

$(0,0)$: zadelpunt

$(5,0)$: rechtsdraaiend centrumpunt

e) $(-2,0)$, $(2,0)$ en $(0,0)$: rechtsdraaiend centrumpunt

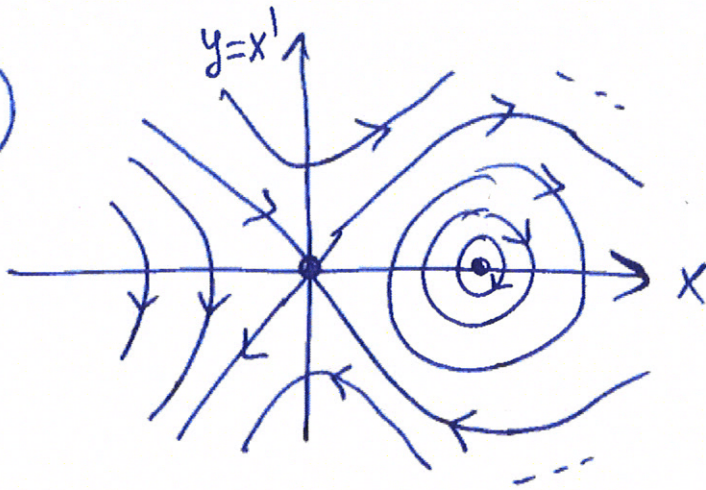
$(-1,0)$ en $(1,0)$: zadelpunt

f) $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 0)$ voor gehele waarden van k : zadelpunt

en $(\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, 0)$ " " " : rechtsdraaiend centrumpunt

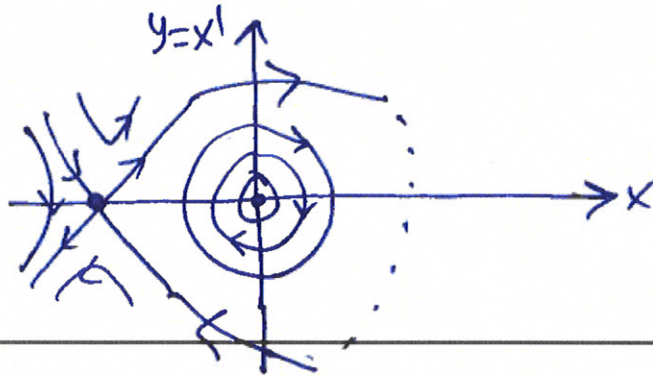
S8

S6 a)

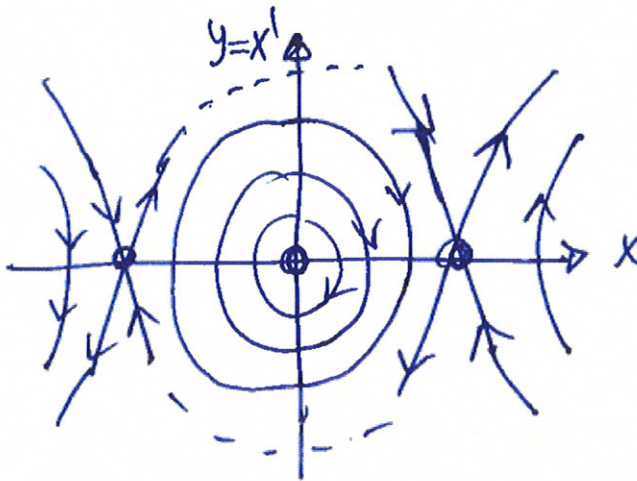


Schets

S7 a)



S7 c)



S7 d)

